Кубок ЛФИ 2023

10.s04.e05

Содержание

Кубит **2**

Часть 1. (4 балла) Однокубитные гейты в квантовом компьютере . . . 2

Состояние кубита . . . 2

Действия с кубитами . . . 3

Осцилляции Раби . . . 5

Фиделити операций . . . 6

Коррекция ошибок . . . 6

Часть 2 (5 баллов). Ловушка Пауля . . . 8

Захват и удержание ионов в ловушках Пауля . . . 8

Введение . . . 8

Численное моделирование . . . 9

Доплеровское охлаждение ионов в ловушке Пауля . . . 10

Вопросы по Доплеру . . . 11

Часть 3 (1 балл). Лазерный пинцет . . . 15

Приближение геометрической оптики . . . 15

Решение основной задачи **16**

Часть 1. Однокубитные гейты в квантовом компьютере . . . 16

Состояние кубита . . . 16

Действия с кубитами . . . 16

Осцилляции Раби . . . 20

Фиделити операций . . . 20

Коррекция ошибок . . . 21

Часть 2. Ловушка Пауля . . . 22

Введение . . . 22

Численное моделирование . . . 23

Доплеровское охлаждение ионов в ловушке Пауля . . . 29

Часть 3. Лазерный пинцет . . . 36

Приближение геометрической оптики . . . 36

Люди создают ловушки и сами в них попадают.
Хардли Хавелок, книга «Ренегат»

Кубит

Вопросы по математике можно задавать Гридневу Илье, по программированию — Шишкину Паше.

Часть 1. (4 балла) Однокубитные гейты в квантовом компьютере

Квантовый бит или *кубит* — это единица хранения памяти в квантовом компьютере. От младшего брата и классического аналога, бита, принимающего лишь два значения — 0 и 1, кубит отличается тем, что представляет собой квантово-механическую систему, обладающую квантовыми свойствами. Учёт этих свойств и описание работы кубитов производятся с помощью правильно подобранного математического аппарата. В этой части задачи мы познакомимся с самими кубитами и основными операциями с ними.

Состояние кубита

В атомах энергия электрона часто не может изменяться непрерывно, а принимает дискретные значения (например, в атоме водорода). Кубит — это модель квантово-механической системы, в которой рассматривается только два уровня энергии. Например, в одном из компьютеров в Российском квантовом центре (РКЦ) в качестве кубитов используется ион кальция, одним из уровней которого является основное состояние внешнего электрона, а другое — одно из его возбужденных состояний.

Состояние кубита описывается двумерным комплексным вектором

$$\psi = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 \end{pmatrix},$$

где c_0 и c_1 — это комплексные функции, которые называются *амплитудами вероятности*, для которых выполняется условие $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$.

Если $\psi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ то это основное состояние, аналогичное тому, когда классический бит принимает значение 0. Если $\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то это возбуждённое состояние, аналогичное тому, когда классический бит принимает значение 1. Произвольное же состояние кубита можно представить в виде

$$\psi = c_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_0\psi_0 + c_1\psi_1.$$

Можно также сказать, что функции c_0 и c_1 являются *амплитудами обнаружения* кубита в состояниях ψ_0 и ψ_1. Из квантовой механики следует, что если мы проведём какое-либо измерение состояния кубита, то он обязательно окажется или в состоянии ψ_0, или в состоянии ψ_1. Число $|c_0|^2$ показывает вероятность того, что после измерения состояния кубита он окажется в состоянии 0, а $|c_1|^2$ — вероятность того, что он окажется в состоянии 1. До измерения кубит находится в состоянии $\psi = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 \end{pmatrix}$, т. е. в суперпозиции этих двух состояний.

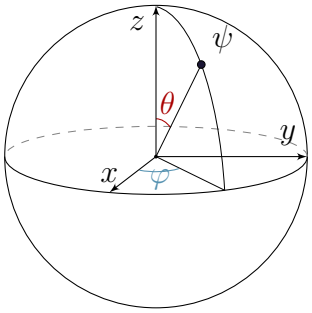


Рис. 1: Сфера Блоха

Квантово-механическая система отличается от классической тем, что при её измерении её состояние принципиально изменяется. В случае кубитов после измерения он оказывается либо в состоянии $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, либо в состоянии $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Пример 1. Кубит находится в состоянии $\begin{pmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix}$. Если мы проведём измерение состояния квантово-механической системы, то он окажется в состоянии $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ с вероятностью $1/4$, а в состоянии $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ с вероятностью $3/4$.

Пример 2. Кубит находится в состоянии $\begin{pmatrix}i/\sqrt{2}\\\sqrt{2}/2\end{pmatrix}$. Вероятности того, что после проведения измерения состояния кубита он окажется в состоянии ψ_0 или ψ_1 равны $1/2$.

1.1. *(0,1 балл)* Известно, что кубит находится в состоянии $\begin{pmatrix}\frac{1+i}{2}\\x\end{pmatrix}$. Найдите x.

Из того факта, что $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$ следует, что одним из способов, которым можно задать общий вид состояния кубита является выражение

$$\psi = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_0 + e^{i\varphi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_1.$$

Такую параметризацию часто выбирают из-за её удобной и наглядной интерпретации через сферу Блоха (см. рис. 1). На ней состояние характеризуется единичном вектором, образующим угол θ с осью z. Его проекция на плоскость xy образует угол φ с осью x.

Важно отметить, что в общем виде состояние кубита определено с точностью до глобальной фазы:

$$\psi = e^{i\alpha}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_0 + e^{i\varphi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_1\right).$$

Действия с кубитами

Аналогично логическим операциям в классическом компьютере (И, ИЛИ, НЕ и др.), в квантовом компьютере вычисления проводятся с помощью квантовых операций над кубитами, которые также называют квантовыми *гейтами*. Различают однокубитные гейты,

действующие только на один кубит, и многокубитные гейты, действующие на набор кубитов размером 2 и больше. Действие гейта изменяет состояние кубита и может быть представлено матрицей, действующей на вектор ψ. В этой части задачи мы предлагаем вам поработать с однокубитными гейтами.

Матрицей однокубитного гейта является комплекснозначная матрица размера 2×2

$$U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

со следующими свойствами: $U^\dagger U = UU^\dagger = I$, где $U^\dagger = (U^T)^*$ — транспонирование и комплексное сопряжение матрицы U, I — единичная матрица. Матрицы, обладающие таким свойством, также называют *унитарными матрицами*.

Действие матрицы на состояние кубита описывается обычным матричным умножением матрицы на вектор-столбец

$$U\psi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

1.2. *(0,1 балл)* Вычислите вероятность, с которой кубит окажется в состоянии 0 после действия на него гейта U, считая элементы A, B, C и D и c_1, c_0 известными.

Произвольное линейное преобразование $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ определяется восемью вещественными параметрами. Требование унитарности уменьшает количество независимых параметров.

1.3. *(0,1 балл)* Сколько независимых вещественных параметров однозначно задает унитарное преобразование?

1.4. *(0,1 балл)* Найдите унитарное преобразование U, если известно, что $U^2 = U$.

1.5. *(0,1 балл)* Докажите, что последовательно выполненные однокубитные гейты также являются однокубитным гейтом.

Однокубитные гейты часто раскладывают через матрицы Паули, которые имеют следующий вид

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.6. *(0 баллов)* Проверьте, что матрицы Паули являются унитарными.

1.7. *(0,2 балла)* Подействуйте по отдельности матрицами Паули на вектор $\begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$. Как изменятся амплитуды обнаружения состояния ψ_0 и ψ_1. Изобразите исходное и полученное состояния на сфере Блоха.

1.8. *(0,1 балл)* Какой геометрический смысл имеет каждое из преобразований X, Y, Z?

1.9. *(0,1 балл)* Найдите разность $XY - YX$?

Введём элемент (гейт) Адамара

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.10. *(0,1 балл)* Найдите, чему равны следующие матрицы

$$HXH, \quad HYH, \quad HZH.$$

1.11. *(0,1 балл)* Подействуйте элементом Адамара на состояния $(\psi_0+\psi_1)/\sqrt{2}$. Чему будут равны вероятности обнаружить кубит в состояниях ψ_0 и ψ_1 после дейтвия этого гейта? Как изменится ответ, если исходное состояние было $(\psi_1-\psi_0)/\sqrt{2}$?

При решении следующего пункта вам могут быть полезны следующие формулы. Определим понятие экспоненты от матрицы

$$e^{\alpha A} = I + \alpha A + \frac{\alpha^2}{2!}A^2 + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!}A^n + \ldots$$

1.12. *(0,5 балла)* Найдите

$$R_x(\theta) = \exp\left(-\frac{i\theta X}{2}\right), \quad R_y(\theta) = \exp\left(-\frac{i\theta Y}{2}\right), \quad R_z(\theta) = \exp\left(-\frac{i\theta Z}{2}\right).$$

Считайте, что θ — действительное число.

1.13. *(0,1 балл)* Являются ли R_x, R_y, R_z однокубитными гейтами?

1.14. *(0,3 балла)* Какой геометрический смысл имеет каждое из преобразований R_x, R_y, R_z?

Из предыдущих пунктов и их геометрической интерпретации следует, что произвольный однокубитный гейт можно представить следующим образом

$$U = e^{i\alpha}R_z(\beta)R_y(\gamma)R_z(\delta),$$

где α, β, γ и δ — некоторые вещественные числа.

1.15. *(0,2 балла)* Подберите параметры α, β, γ и δ, чтобы получить гейт Адамара.

1.16. Предложите однокубитный гейт, чтобы перейти из состояния $c_0 = c_1 = 1/\sqrt{2}$ в состояние

(a) *(0,2 балла)* $c_0 = \sqrt{2}/2$ и $c_1 = i\sqrt{2}/2$;

(b) *(0,2 балла)* $c_0 = \sqrt{3}/2$ и $c_1 = 1/2$;

(c) *(0,2 балла)* $c_0 = \sqrt{3}/2$ и $c_1 = i/2$.

Осцилляции Раби

В квантовом компьютере на ионах любое манипулирование кубитами производится с помощью лазеров. Так, для проведения однокубитных операций необходимо светить на ион лазером с частотой, в точности равной частоте перехода. Для кальция эта частота равна 411,0421297763931 ТГц (длина волны лазера на этой частоте равна 729,3472767939562 нм). Матрица гейта в таком случае зависит от времени, в течение которого мы светим лазером на ион, и задается следующей формулой

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) & e^{-i\varphi+i\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \\ e^{i\varphi-i\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) & \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Здесь Ω — это параметр, характеризующий взаимодействие иона с лазером, который называется частотой Раби, φ — фаза лазера и t — время. Частота Раби взаимодействия иона с лазером определяется внутренними свойствами иона и интенсивностью лазерного пучка.

1.17. *(0,2 балла)* Найдите, какими должны быть время гейта (длительность лазерного импульса) и фаза лазера, чтобы матрица гейта была равна матрице Паули Y, если частота Раби равна 1,6/2π МГц.

Фиделити операций

В лазере существуют шумы интенсивности и частоты и другие несовершенства экспериментальной установки, которые приводят к ошибкам, в результате чего реальный гейт может отличаться от того, который мы хотели реализовать. Это приводит к потери точности (фиделити) операций.

Для вычисления точности операций используется следующее правило. Пусть исходно кубит находится в некотором состоянии ψ, а нам необходимо провести гейт G, в результате которого будет получено состояние $G\psi = g_0\psi_0 + g_1\psi_1$. В ходе проведения эксперимента был реализован другой гейт $\tilde{G}$, несколько отличающийся от исходного, и получено состояние $\tilde{G}\psi = \tilde{g}_0\psi_0 + \tilde{g}_1\psi_1$. Тогда фиделити F вычисляется по следующей формуле:

$$F = |\tilde{g}_0^* g_0 + \tilde{g}_1^* g_1|^2.$$

Пусть нашей целью было провести гейт Адамара, а получилось ~~как всегда~~ преобразование

$$\tilde{H} = \frac{1}{\sqrt{1+0{,}99^2}} \begin{pmatrix} 0{,}99 & 1 \\ 1 & -0{,}99 \end{pmatrix}.$$

1.18. *(0,2 балла)* Найдите фиделити, если начальное состояние было $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.19. *(0,2 балла)* Чему будет равно фиделити для начального состояния из предыдущего пункта, если мы хотели провести преобразование Адамара 10 раз и каждый раз получали матрицу $\tilde{H}$?

1.20. *(0,2 балла)* Как изменится ответ на первый вопрос 18, если начальное состояние было $\begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$.

Коррекция ошибок

Как и для классического компьютера, для квантового компьютера разработаны специальные коды, которые позволяют исправлять (проводить коррекцию) возникающих ошибок. В данном пункте мы рассмотрим **классический** способ коррекции ошибок, чтобы понять идею алгоритма.

Пусть мы будем считать одним логическим битом компьютера (состояние которого, например, мы хотим передать на некоторое расстояние) три физических бита. В ходе передачи состояния логического бита один или несколько битов из тройки физических могут изменить свои состояния. Будем считать ошибкой только ситуацию, в которой физический бит переворачивается, т. е. его состояние меняется на противоположное, и пусть вероятность переворота одного физического бита p.

После передачи физические биты могут либо оказаться в правильном состоянии, либо перевернуться и привести к ошибке. Будем считать, что состоянием логического бита будет состояние, в котором оказалось большинство физических битов. Т. е. если после измерения мы фиксируем результат как 001, то считаем, что логический бит находится в состоянии 0. А если результат 101, то считаем, что состояние логического бита — 1. Если после выполнения операции перевернулось два бита одновременно, тогда мы определим состояние ошибочно. Эта схема является простейшей схемой коррекции ошибок, для которой

мы увеличиваем количество физических носителей единицы хранения информации, и за счет этого повышаем устойчивость к ошибкам.

До передачи все биты находятся в правильном состоянии.

1.21. *(0,4 балла)* Найдите, какой должна быть вероятность переворота одного физического бита p, чтобы кодирование тремя битами было надёжнее, чем одним.

Часть 2 (5 баллов). Ловушка Пауля

Для создания кубитов нам необходимо локализовать отдельные ионы в пространстве. Для превращения атомов кальция в кубиты их сначала отделяют от кусочка кальция методом лазерной абляции, затем однократно ионизуют, при этом атом превращается в положительно заряженный ион, а после – захватывают в ловушку Пауля, помещенную в сверхвысокий вакуум. Дальнейшее, более глубокое охлаждение ионов практически до нулевой температуры позволяет создать основное состояние кубита.

Захват и удержание ионов в ловушках Пауля

Введение

2.1. Пусть в окрестности начала декартовой системы координат функция потенциала имеет вид:

$$\varphi(x, y, z) = \alpha \left(x^2 + y^2 + z^2\right),$$

где α — некоторая константа.

(a) *(0,2 балла)* Найдите проекции напряженности электрического поля $E_x(x, y, z)$, $E_y(x, y, z)$ и $E_z(x, y, z)$.

(b) *(0,3 балла)* Найдите, чему равна плотность заряда в начале координат.

(c) *(0,1 балла)* В каком случае она будет равна нулю.

Согласно хорошо известной теореме Ирншоу в том случае, если есть только электростатические поля, то заряд не может находиться в устойчивом положении равновесия. Однако, если электрические поля переменные, то можно создать ситуацию, где траектория движения заряженной частицы будет всегда ограничена в пространстве. Для этого необходимо подобрать правильную конфигурацию электродов, а также частоты и амплитуды подаваемых на них напряжений. Одним из примеров, где это было реализовано служит ловушка Пауля, свойства которой предлагается изучить в данной части задачи.

Ловушкой Пауля называется совокупность электродов, на которые подаются постоянные и осциллирующие на радиочастоте напряжения. При правильно подобранных параметрах потенциалов и частоты в пространство между электродами можно захватить заряженные частицы.

Конфигурация электрических полей ловушки Пауля описывается следующим аналитическим потенциалом:

$$\Phi = \left(-\frac{V_{\text{RF}} \cos \Omega t}{r_0^2} - \frac{k_z U_{\text{DC}}}{z_0^2}\right) \frac{x^2}{2} - \left(\frac{-V_{\text{RF}} \cos \Omega t}{r_0^2} + \frac{k_z U_{\text{DC}}}{z_0^2}\right) \frac{y^2}{2} + \frac{k_z U_{\text{DC}}}{z_0^2} z^2, \tag{1}$$

где Ω — циклическая радиочастота электродов, V_{RF} — напряжения на радиальных электродах переменных полей, r_0 и z_0 — геометрические параметры ловушки (расстояния от центра ловушки до соответствующих электродов), U_{DC} — напряжение на аксиальных электродах, k_z — геометрический параметр аксиального удержания.

В наших обозначениях оси OX и OY называются радиальными осями ловушки, а ось OZ — аксиальной.

2.2. *(0,1 балла)* Пусть $V_{\text{RF}} = 0$. Изобразите качественно траекторию частицы, если в нулевой момент времени она находится в точке с координатами $(1; 1; 0)$ и ее начальная скорость равна нулю. Заряд частицы считайте положительным, $U_{DC} > 0$.

2.3. *(0,1 балла)* Рассмотрим плоскость $z = 0$. Пусть $\frac{V_{\text{RF}}}{r_0^2} = \frac{2k_z U_{\text{DC}}}{z_0^2}$. Изобразите качественно зависимость $\Phi(x, y, 0)$ в момент времени $t = 0$ и в момент времени $t = \pi/\Omega$.

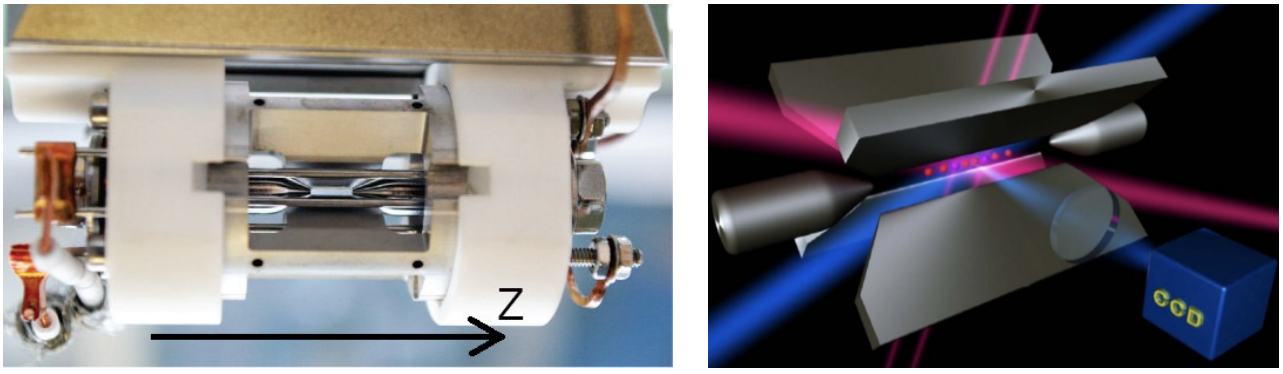


Рис. 2: Фотография и схема ловушки Пауля, с сайта quantumoptics.at лаборатории Райнера Блатта, г. Инсбрук, Австрия

Уравнения движения для частицы массы m и заряда e в данном потенциале, следующие из (1), называются уравнениями Матье и имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{d\tau^2} + (a_x - 2q_x \cos 2\tau)\, x = 0, \\ \dfrac{d^2y}{d\tau^2} + (a_y - 2q_y \cos 2\tau)\, y = 0, \\ \dfrac{d^2z}{d^2\tau} + a_z z = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где параметры уравнений описываются следующими формулами

$$\tau = \frac{\Omega}{2}t, \quad a_x = a_y = -\frac{a_z}{2} = -\frac{4ek_z U_{\text{DC}}}{mz_0^2\Omega^2}, \quad q_x = -q_y = q = \frac{2eV_{\text{RF}}}{mr_0^2\Omega^2}.$$

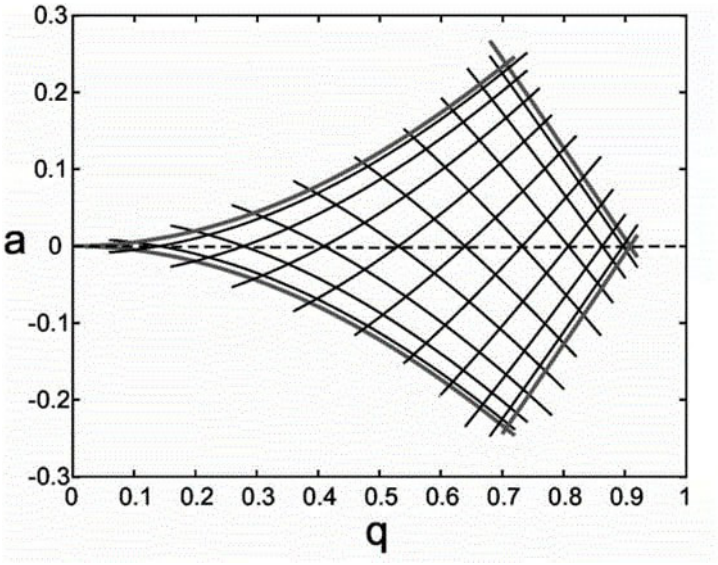
Заметим, что параметры уравнений Матье зависят от экспериментальных характеристик ловушки: напряжений на электродах, радиочастоты и геометрических параметров. Следовательно, свойства уравнений Матье (и, как следствие, их решений) могут контролироваться соответствующим изменением параметров ловушки Пауля.

Если параметры ловушки подобраны хорошо, решения уравнений Матье (2) такие, что траектория иона ограничена в пространстве. Мы будем считать, что ион захвачен в том случае, если его траектория ограничена и амплитуда колебаний иона меньше геометрических размеров ловушки (менее 1 мм). Для такого захвата значения параметров a и q по всем направлениям движения (аксиальному и радиальным) должны принадлежать **зоне стабильности**. Пример диаграммы стабильности для некоторой ловушки Пауля представлен на рисунке. Заштрихованная область — это зона стабильности, незаштрихованная — область параметров, при которой ионы покидают ловушку.

Численное моделирование

В этой части задачи мы предлагаем вам численно промоделировать уравнения траектории ионов в ловушке Пауля и изучить их свойства.

Для того, чтобы вам не пришлось ничего программировать, мы подготовили тетрадку в среде Google Colab. Можно использовать без смс, но с регистрацией.



Проходите по ссылке на тетрадку (на всякий случай, вот она еще раз). заходите в свой гуглаккаунт, нажимаете на выполнение кода и вы счастливы. Да, ячейки можно скрывать и открывать нажатием на треугольник. Работать стало удобнее!

Подробно про то, как пользоваться тетрадкой рассказано в данном видео. ~~Если~~ Когда у вас ~~останутся~~ появятся вопросы о том, как пользоваться данной тетрадью, то вы можете их задать в личные сообщения вот этому человеку. Не стесняйтесь, он готов и заряжен отвечать 25 (двадцать пять) на 7.

Замечание. В тетрадке параметр RF_frequency — это не циклическая частота, он связан с параметром в формуле 1 формулой RF_frequency $= \Omega/2\pi$.

2.4. *(0,3 балла)* Пусть $a_x = -0{,}1$. При каких значениях параметра q_x в диапазоне от -2 до 2 траектории ионов вдоль оси x будут ограниченными в пространстве. В качестве ответа приведите интервалы параметра q_x. Границы интервала определите с точностью до 0,1. Будет ли ион захвачен в ловушку?

2.5. *(0,3 балла)* Пусть $a_x = 0{,}1$. При каких значениях параметра q_x в диапазоне от -2 до 2 траектории ионов вдоль оси x будут ограниченными в пространстве. В качестве ответа приведите интервалы параметра q_x. Границы интервала определите с точностью до 0,1. Будет ли ион захвачен в ловушку?

2.6. *(0,3 балла)* Пусть $a_y = -0{,}01$. При каких значениях параметра q_y в диапазоне от -2 до 2 траектории ионов вдоль оси x будут ограниченными в пространстве. В качестве ответа приведите интервалы параметра q_y. Границы интервала определите с точностью до 0,1. Будет ли ион захвачен в ловушку?

Доплеровское охлаждение ионов в ловушке Пауля

Для более эффективной работы ловушки Пауля ионы охлаждают, используя эффект Доплера. В этой части задачи мы более подробно изучим то, как это делается.

Вопросы по Доплеру

2.7. *(0 баллов)* Источник излучает свет на частоте ω_0 и движется вдоль прямой, соединяющей его и приемник со скоростью ν_0. Чему равна частота излучения, которую будет детектировать приемник?

2.8. *(0,2 балла)* Источник и приемник находятся в точках A и B соответственно. Источник движется со скоростью v_0 перпендикулярно к AB, приемник движется со скоростью v_0 вдоль линии AB (см. рис.). Чему равна частота излучения, которую будет детектировать приемник, если в системе отсчета источника он испускает сигнал на частоте ω_0?

2.9. *(0,1 балла)* Рассмотрим идеальный газ. Вероятность того, что скорость атома газа лежит в интервале от v до $v + dv$ определяется выражением

$$N 4\pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv,$$

где m — масса атома, k — константа Больцмана, T — температура газа, N — нормировочный постоянный множитель. Найдите наиболее вероятную скорость атома. Наиболее вероятной скоростью называется скорость, близкой к которой обладает наибольшее число молекул.

2.10. *(0 баллов)* Атом движется со скоростью v_0 навстречу лазерному пучку. Электрон находится в основном состоянии. Электрон может перейти в возбужденное состояние если поглотит фотон с частотой ω_0. Чему должна быть равна отстройка лазера $\Delta\omega$ от частоты ω_0 чтобы атом поглотил фотон?

2.11. *(0 баллов)* Импульс фотона с частотой ω определяется выражением $\hbar\omega/c$. Найдите скорость атома из предыдущего пункта, если он поглотил фотон.

2.12. *(0,3 балла)* В экспериментальной установке поток одиночных атомов натрия вылетает со средней скоростью 10^5 см/с навстречу лазерному источнику с длиной волны 363,8 нм. При взаимодействии с лазерным излучением атом поглощает фотон и переходит из основного энергетического состояния в возбуждённое. При дальнейшем движении атом может вернуться в исходное состояние при вынужденном или спонтанном испускании фотона. Вынужденное испускание фотона провоцируется взаимодействием с внешним фотоном и испущенный фотон имеет такое же значение энергии и направление распространения, как и провоцирующий (при этом этот процесс никак не влияет на провоцирующий фотон). А при спонтанном испускании новый фотон имеет то же значение энергии, что и последний поглощенный фотон, но уже случайное направление. Считая процессы вынужденного и спонтанного излучения равновероятными рассчитайте среднее количество поглощений фотонов лазерного излучения атомами натрия, необходимое для «охлаждения» атомов до нулевой скорости движения.

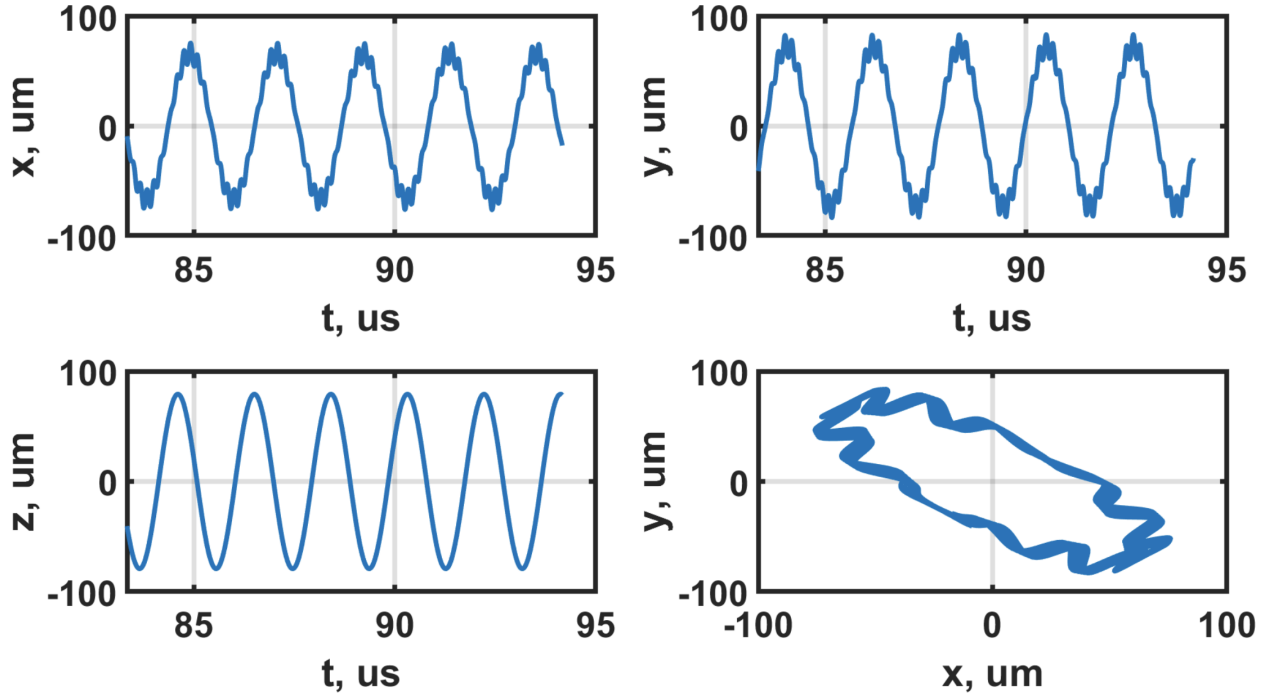
В экспериментах с ловушками Пауля часто используют доплеровское охлаждение. В следующих пунктах сначала будет анализироваться ситуация без доплеровского охлаждения, а в п. 2.15 мы его реализуем.

Если ионы охлаждены достаточно (до температуры[1] меньше мК), приближенное решение вдоль радиальных координат описывается следующей формулой:

$$x(t) \propto \cos\left(\frac{\omega_x t}{2}\right)\left(1 - \frac{q_x}{2}\cos\Omega t\right),$$

где первый множитель — колебания на секулярной частоте $\omega_x/2$, а второй множитель описывает небольшие и частые осцилляции иона вдали от центра ловушки.

2.13. *(0,1 балла)* Подберите параметры Ω, U_{DC} и V_{RF} так, чтобы захватить ион. Физическими являются напряжения от 1 до 1000 В. Радиочастоту можно менять в пределах от 20 до 30 МГц. Получите картинки таким образом, чтобы были обязательно видны осцилляции на секулярной частоте и микродвижения. Должны получиться картинки примерно следующего вида. В качестве ответа пришлите значения параметров и графики с подписанными осями и единицами измерений.



2.14. *(0,2 балла)* Из графиков координат от времени найдите секулярные частоты колебаний иона в ловушке. Сравните с частотами, полученными в спектре. Проверьте, что в спектре появляется также частота микродвижений, совпадающая с радиочастотой, подаваемой на электроды.

2.15. *(0,4 балла)* Включите охлаждение ионов. Для этого перейдите к ячейке «исследование ванны Ланжевена», в которой добавляется сила вязкого трения, действующая на ион и уменьшающая его кинетическую энергию. У ланжевеновской ванны есть параметр скорости охлаждения γ, и температура T_0, до которой мы хотим охладить (или нагреть) ион. Включите ланжевеновскую ванну с различными параметрами γ и T_0. Постройте графики зависимости температуры иона от времени. Сравните время τ, за которое температура иона уменьшается в 10 раз с параметрами ланжевеновской ванны. В качестве ответа на этот пункт представьте графики и формулу, связывающую параметры ланжевеновской ванны со временем τ.

[1] температура иона определяется его кинетической энергией, деленной на константу Больцмана k

2.16. В рамках численного моделирования, с помощью ланжевеновской ванны мы можем охладить ион до нуля кельвинов (задаем параметр $T_0 = 0$). Если ионов в ловушке несколько, то при охлаждении до нуля они занимают некоторые положения равновесия в потенциале ловушки и кулоновском потенциале их взаимного отталкивания, и полученное «твердое тело» называется кулоновским кристаллом. Поместите 5 ионов в ловушку при тех параметрах, которые вы подобрали в предыдущих пунктах, и охладите их до нуля.

(a) *(0 баллов)* Опишите конфигурацию полученного кристалла?

(b) *(0 баллов)* Выстраиваются ли ионы в линейную цепочку вдоль оси OZ? (Если ионы выстроились в линейную цепочку, то радиальные координаты равны 0 с очень хорошей точностью, $< 10^{-34}$).

2.17. *(1 балл)* Тот факт, выстраиваются ли ионы вдоль линии, зависит от соотношения секулярных частот вдоль радиальных и аксиальной осей (см. верхний рис. на следующей странице). А именно, для линейности цепи должно выполняться условие следующего вида:

$$\left(\frac{\omega_r}{\omega_z}\right)^2 \geqslant \frac{N^\alpha}{A},$$

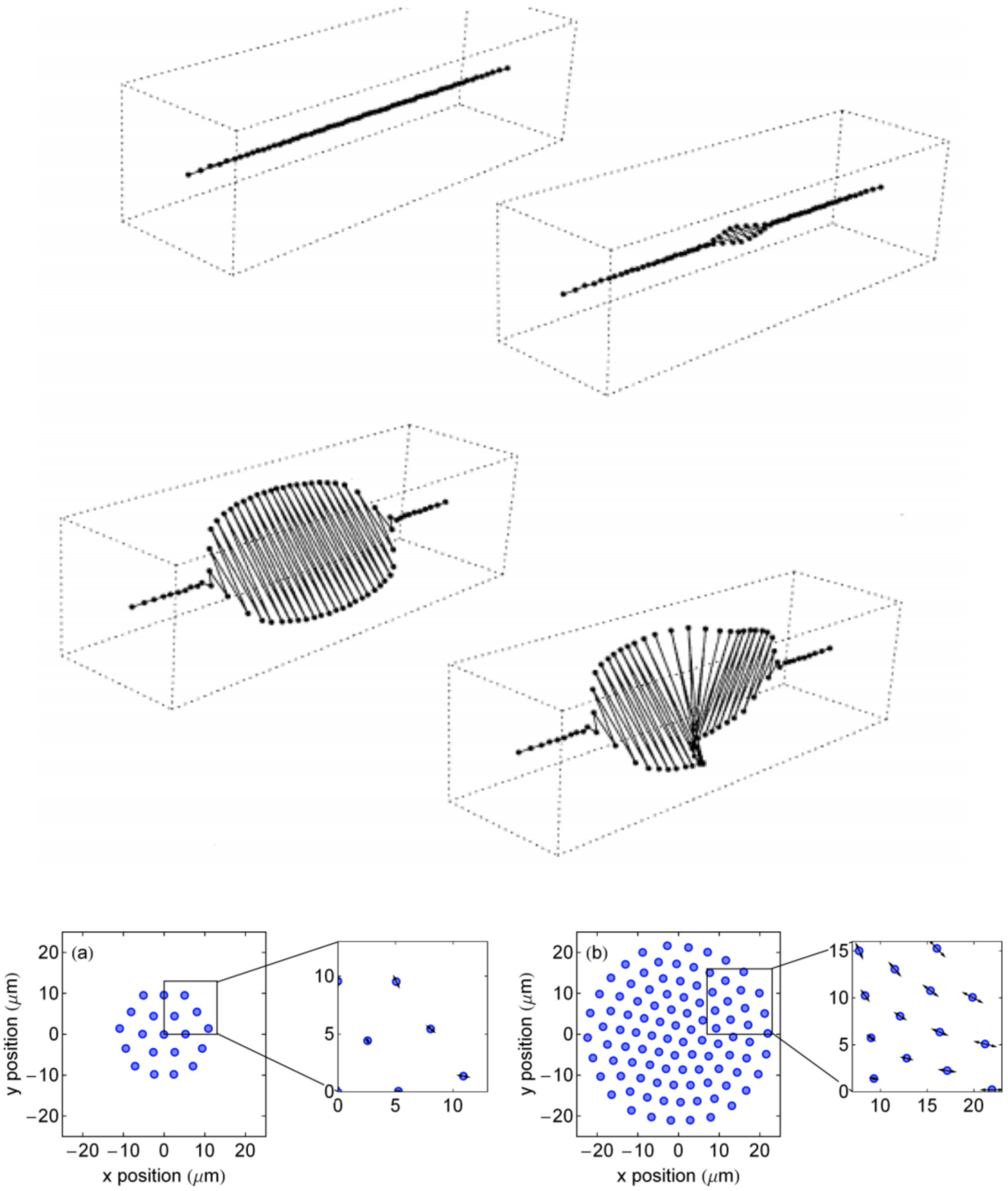
где α и A — некоторые константы, которые вам необходимо найти.

Замечание! При проведении моделирования в этих пунктах проверяйте, что у вас действительно получается линейный кристалл, а также то, что при данных параметрах ловушки ионы ей захватываются.

2.18. *(1 балл)* При других частотах колебаний, ионы будут выстраиваться в двумерную решетку перпендикулярно аксиальному направлению (см. нижний рис. на следующей странице). В этом случае должно выполняться условие:

$$\frac{\omega_z}{\omega_r} > (BN)^\beta$$

найдите параметры B и β.


(a)
y position (μm)
x position (μm)
(b)
y position (μm)
x position (μm)

Часть 3 (1 балл). Лазерный пинцет

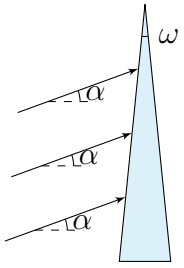
Ловушка Пауля не единственный вариант схемы захвата ионов. Например, сущестует метод лазерного пинцета, про который и пойдёт речь в данной части задачи.

Приближение геометрической оптики

В том случае, когда длина волны излучения достаточно мала, мы можем рассматривать вопрос взаимодействия излучения с веществом в рамках геометрической оптики. Как и в части 2 будем рассматривать свет как поток фотонов, импульс отдельного фотона будет равен $\hbar\omega/c$, где ω — частота излучения, а c — скорость света, $\hbar$ — приведённая постоянная Планка. Считайте, что $\hbar\omega$ — это энергия отдельного фотона.

3.1. *(0 баллов)* Пусть свет нормально падает на плоскую поверхность. Мощность излучения, приходящаяся на единицу площади равна I. Чему равно давление света, если поверхность полностью поглощает свет? Если полностью отражает? Если отражает долю фотонов равную α.

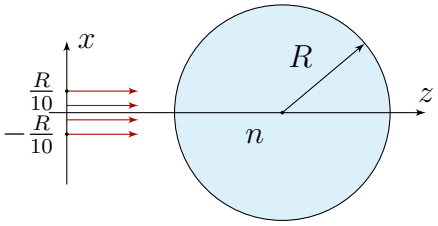
3.2. *(0,3 балла)* На тонкую призму с показателем преломления n и малым углом при при вершине ω (см. рис.) падает параллельный пучок, составляющий малый угол α с горизонтом. Найдите величину и направление силы, действующей на призму со стороны пучка. Считайте, что свет призмой не отражается и не поглощается. Мощность излучения, приходящаяся на единицу площади равна I, площадь пучка S. Считайте, что пучок полностью попадает на призму.



3.3. На цилиндр с показателем преломления n радиуса R, находящийся в вакууме, падает тонкий пучок света так, как показано на рисунке. Мощность света на единицу площади зависит от координаты x по закону $I = I_0(1 - x/R)$, при $x \in [-R/10, R/10]$. При других значениях интенсивность равна 0. Считайте, что свет цилиндром не отражается и не поглощается. Высота цилиндра равна H.

(a) *(0,4 балла)* Чему равна сила, действующая на цилиндр?

(b) *(0,2 балла)* В какую сторону она направлена?



3.4. *(0,1 балла)* Как изменится направление силы, если показатель преломления цилиндра будет меньше показателя преломления окружающей среды?

Авторы задачи: Лианна Акопян и Отделение Физики

Решение основной задачи

Часть 1. Однокубитные гейты в квантовом компьютере

Состояние кубита

1.1. Единственное ограничение на комплексное число x — условие нормировки

$$\left|\frac{1+i}{2}\right| + |x|^2 = 1.$$

Отсюда получаем

$$|x| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\varphi},$$

где φ — произвольная фаза: $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Действия с кубитами

1.2. После действия на кубит гейта U, кубит находится в состоянии

$$\tilde{\psi} = U\psi = \begin{pmatrix} Ac_1 + Bc_0 \\ Cc_1 + Dc_0 \end{pmatrix}.$$

Тогда вероятность того, что после измерения он окажется в состоянии 0, равна

$$P = |Cc_1 + Dc_0|^2.$$

1.3. Запишем условие унитарности

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{C} \\ \overline{B} & \overline{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A|^2 + |B|^2 & A\overline{C} + B\overline{D} \\ C\overline{A} + D\overline{B} & |C|^2 + |D|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем 4 уравнения

$$\begin{cases} |A|^2 + |B|^2 = 1, \\ |C|^2 + |D|^2 = 1, \\ A\overline{C} + B\overline{D} = 0, \\ C\overline{A} + D\overline{B} = 0. \end{cases}$$

Заметим, что если применить операцию комплексного сопряжения к третьему уравнению, то получится четвертое. Значит в этой системе только первые три уравнения независимы.

Третье уравнение комплексное, а значит эквивалентно тому, что вещественная и мнимая части от $A\overline{C} + B\overline{D}$ равны нулю. Таким образом, эта система из четырех независимых вещественных уравнений. Следовательно, число вещественных параметров, однозначно задающих унитарное преобразование, равно $8 - 4 = 4$.

1.4 Умножим уравнение $U^2 = U$ слева на $U^\dagger$. В левой и правой частях получим соответственно

$$U^\dagger U^2 = (U^\dagger U)U = IU = U, \quad U^\dagger U = I.$$

Значит, $U = I$.

1.5 Последовательное выполнение гейтов U_1 и U_2 эквивалентно применению матрицы U_2U_1. Проверим условие унитарности

$$(U_2U_1)^\dagger(U_2U_1) = U_1^\dagger U_2^\dagger U_2 U_1 = U_1^\dagger I U_1 = U_1^\dagger U_1 = I.$$

Значит матрица U_2U_1 действительно является гейтом.

1.7 Обозначим вектор $\begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ как ψ_y. Результат действия матриц Паули на ψ_y:

$$X\psi_y = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad Y\psi_y = \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad Z\psi_y = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

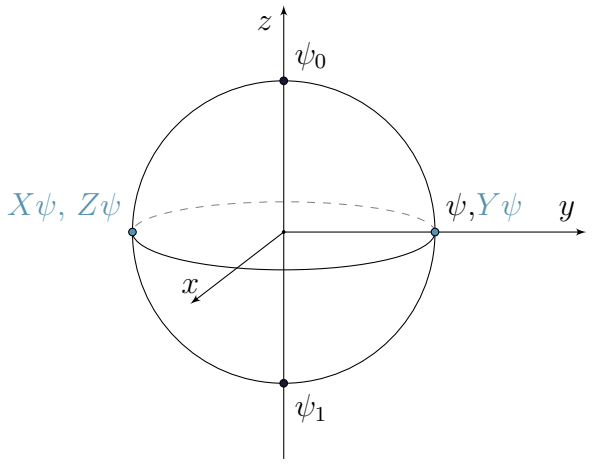
Видно, что амплитуды обнаружения не изменились. Чтобы изобразить эти состояния на сфере Блоха, приведем их к виду $\psi = \cos(\theta/2)\psi_0 + e^{i\varphi}\sin(\theta/2)\psi_1$, где $\theta \in [0, \pi]$. Для этого домножим первый вектор на $-i$, второй и третий на -1 (знаком $\simeq$ обозначено равенство с точностью до глобальной фазы)

$$X\psi_y \simeq \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad Y\psi_y \simeq \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad Z\psi_y \simeq \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим углы

$$\theta_x = \frac{\pi}{2}, \varphi_x = -\frac{\pi}{2}, \quad \theta_y = \frac{\pi}{2}, \varphi_y = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_z = \frac{\pi}{2}, \varphi_z = -\frac{\pi}{2}.$$

Отметим полученные состояния на сфере Блоха:



1.8 Обозначим векторы, направленные вдоль осей x, y, z как ψ_x, ψ_y, ψ_z, а векторы, направленные в противоположную им сторону, как $\psi_{-x}, \psi_{-y}, \psi_{-z}$. Заметим, что $\psi_z = \psi_0$, а $\psi_{-z} = \psi_1$. Из предыдущего пункта видим, что

$$X\psi_y \simeq Z\psi_y \simeq \psi_{-y}, \quad Y\psi_y \simeq \psi_y.$$

Подействовав матрицами Паули на ψ_x, ψ_z, получим

$$X\psi_x \simeq \psi_x, \quad Y\psi_x \simeq Z\psi_x \simeq \psi_{-x}, \qquad X\psi_z \simeq Y\psi_z \simeq \psi_{-z}, \quad Z\psi_z \simeq \psi_z.$$

Значит матрицы X, Y, Z поворачивают эти вектора на угол π относительно осей x, y, z соответственно. А значит это верно и для любого вектора на сфере Блоха, так как любой

вектор можно представить в виде суммы векторов ψ_x, ψ_y, ψ_z с некоторыми коэффициентами.

1.9 По определению находим
$$XY - YX = 2iZ.$$
Отсюда следует, что порядок выполнения поворотов важен.

1.10 По определению находим
$$HXH = Z, \quad HYH = -Y, \quad HZH = X.$$

1.11 Обозначим состояние $(\psi_0+\psi_1)/\sqrt{2}$ как ψ_{++}. До действия гейтом Адамара вероятности обнаружить кубит в состояниях 0 и 1 равны 1/2. Результат действия на него гейта Адамара
$$H\psi_{++} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Вероятность обнаружить этот кубит в состоянии 1 равна единице, а в 0 — нулю.

В случае состояния $\psi_{+-} = (\psi_1 - \psi_0)/\sqrt{2}$ вероятности обнаружить кубит в состояниях 0 и 1 также равны 1/2. После действия на него гейтом Адамара
$$H\psi_{+-} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Теперь вероятность обнаружить кубит в состоянии 1 равна нулю, а в состоянии 0 — единице. Таким образом, с помощью гейта Адамара можно различить эти два состояния.

1.12 Заметим, что $X^2 = Y^2 = Z^2 = I$. Тогда для $R_x(\theta)$ получаем
$$R_x(\theta) = I + \left(-\frac{i\theta}{2}\right) X + \frac{1}{2!}\left(-\frac{i\theta}{2}\right)^2 I + \ldots = I\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(-\frac{i\theta}{2}\right)^{2n} + X\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\left(-\frac{i\theta}{2}\right)^{2n+1}.$$
Учитывая, что $i^2 = -1$, получаем
$$R_x(\theta) = I\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^{2n} - iX\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^{2n+1}.$$
Видно, что коэффициенты при матрицах — это разложения в ряд Тейлора косинуса и синуса. Тогда получаем
$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}.$$
Аналогично для R_y, R_z
$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad R_z(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}.$$

1.13 Нужно проверить, являются ли матрицы R_x, R_y, R_z унитарными. Для R_x получаем с учетом того, что $\sin^2(\theta/2) + \cos^2(\theta/2) = 1$
$$R_x(\theta)R_x(\theta)^\dagger = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

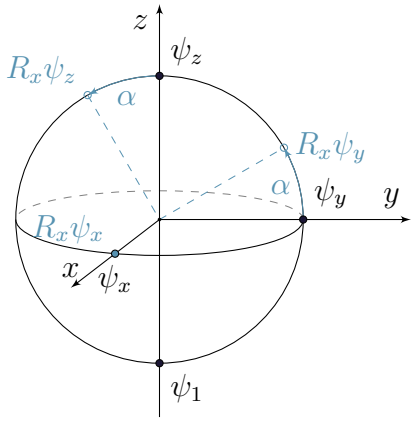
Для R_y

$$R_y(\theta)R_y(\theta)^\dagger = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Наконец для R_z

$$R_z(\theta)R_z(\theta)^\dagger = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит все три матрицы являются однокубитными гейтами.



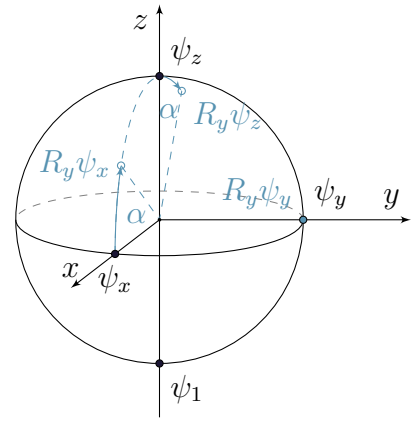
1.14 Подействуем матрицей $R_x(\theta)$ на векторы ψ_x, ψ_y, ψ_z:

$$R_x(\theta)\psi_x = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \simeq \psi_x.$$

$$R_x(\theta)\psi_y = \begin{pmatrix} i(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right))/\sqrt{2} \\ (\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right))/\sqrt{2} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

$$R_x(\theta)\psi_z = \begin{pmatrix} -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Видно, что матрица $R_x(\theta)$ повернула все эти векторы вокруг оси x на угол θ против часовой стрелки. Так как любой вектор можно представить в виде суммы ψ_x, ψ_y, ψ_z с некоторыми коэффициентами, то это верно для любых векторов.



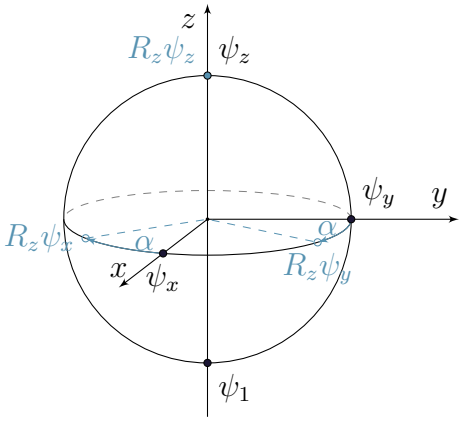
Подействуем матрицей $R_y(\theta)$ на векторы ψ_x, ψ_y, ψ_z:

$$R_y(\theta)\psi_x = \begin{pmatrix} (\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right))/\sqrt{2} \\ (\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right))/\sqrt{2} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

$$R_y(\theta)\psi_y = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \simeq \psi_y.$$

$$R_y(\theta)\psi_z = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Матрица $R_y(\theta)$ повернула ψ_x, ψ_y, ψ_z вокруг оси y на угол θ по часовой стрелке, значит она так действует и на произвольный вектор.



Подействовав матрицей $R_z(\theta)$ на векторы ψ_x, ψ_y, ψ_z, получим:

$$R_z(\theta)\psi_x = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2}/\sqrt{2} \\ e^{i\theta/2}/\sqrt{2} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} e^{-i\theta}/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$$R_z(\theta)\psi_y = \begin{pmatrix} ie^{-i\theta/2}/\sqrt{2} \\ e^{i\theta/2}/\sqrt{2} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} e^{i(\pi/2-\theta)}/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$$R_z(\theta)\psi_z = e^{i\theta/2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \simeq \psi_z.$$

Матрица $R_z(\theta)$ поворачивает ψ_x, ψ_y, ψ_z вокруг оси z на угол θ по часовой стрелке, значит на произвольный вектор она действует так же.

1.15 Умножив матрицы, получим:

$$U = e^{i\alpha} \begin{pmatrix} e^{-i(\beta+\delta)/2} \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) & -e^{i(\delta-\beta)/2} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \\ e^{i(\beta-\delta)/2} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) & e^{i(\beta+\delta)/2} \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

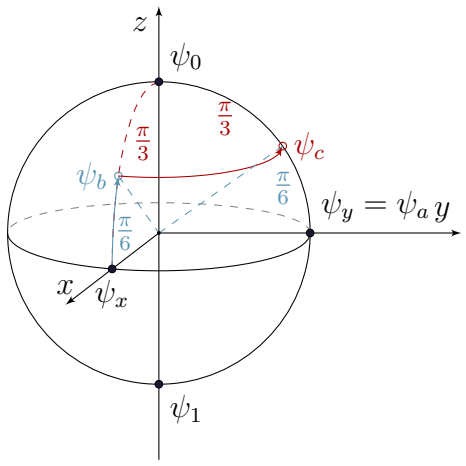
Видно, что подходят параметры $\alpha = \pi/2, \beta = 0, \gamma = \pi/2, \delta = \pi$.

1.16 a) Требуется получить из вектора ψ_x вектор $\psi_a = \psi_y$. Это можно сделать, подействовав матрицей $R_z(-\pi/2)$.

b) Вектор ψ_b, который требуется получить, лежит в плоскости xz и составляет угол $\pi/6$ с осью x. Поэтому его можно получить, подействовав матрицей $R_y(\pi/6)$.

c) Вектор ψ_c, который требуется получить в данном пункте, лежит в плоскости yz и составляет тот же угол с осью y, что вектор ψ_b с осью x. Таким образом, нужно просто повернуть вектор ψ_b вокруг оси z на $\pi/2$:

$$\psi_c = R_z\left(-\frac{\pi}{2}\right)\psi_b = R_z\left(-\frac{\pi}{2}\right) R_y\left(\frac{\pi}{6}\right)\psi_x.$$



Осцилляции Раби

1.17 Видно, что подходят параметры $\varphi = \pi$, $\Omega t/2 = \pi/2$, откуда получаем

$$t = \frac{\pi}{\Omega} \approx 12{,}3 \cdot 10^{-6} \text{ с}.$$

Фиделити операций

1.18 Результат действия гейта Адамара на начальное состояние:

$$H\psi_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Если подействовать $\tilde{H}$, получим:

$$\tilde{H}\psi_z = \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}99^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix}.$$

Посчитав фиделити по определению, получаем:

$$F = \frac{1}{2} \frac{(1 + 0{,}99)^2}{1 + 0{,}99^2} \approx 1 - 2{,}5 \cdot 10^{-5}.$$

1.19 Заметим, что $\tilde{H}^2 = I$. Значит действие матрицей $\tilde{H}$ 10 раз не меняет состояние. Следовательно фиделити равно единице.

1.20 Результат действия гейта Адамара на новое начальное состояние:

$$H\psi_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i+1 \\ i-1 \end{pmatrix}.$$

Если подействовать $\tilde{H}$, получим:

$$\tilde{H}\psi_y = \frac{1}{\sqrt{2(1+0{,}99^2)}}\begin{pmatrix} 1+0{,}99i \\ i-0{,}99 \end{pmatrix}.$$

Посчитав фиделити по определению, получим $F = 1$.

Коррекция ошибок

1.21 В случае кодирования одним битом вероятность ошибки равна p. В случае кодирования тремя битами ошибка произойдет, если перевернутся все три бита или какие-то два бита. Два из трех битов можно выбрать тремя способами, поэтому вероятность ошибки равна

$$P_{\text{fail}} = p^3 + 3p^2(1-p).$$

Получаем квадратное неравенство:

$$p^3 + 3p^2(1-p) < p, \quad \Longleftrightarrow \quad 2\left(\frac{1}{2} - p\right)(1-p) > 0.$$

Отсюда получаем, что $p < 1/2$.

Часть 2. Ловушка Пауля

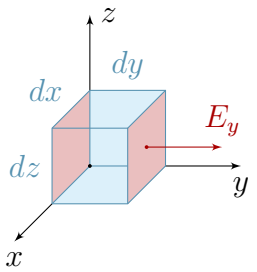
Введение

2.1 Пусть заряд q находится в точке с координатами x, y, z и переместился вдоль оси x на расстояние dx. В этом случае работа электрического поля будет равна:

$$dA = q\left(\varphi(x,y,z) - \varphi(x+dx,y,z)\right) = E_x dx,$$

откуда получаем, что проекция напряженности электрического поля на ось x будет равна $-2\alpha x$. Аналогично получаем, что $E_y = -2\alpha y$, а $E_z = -2\alpha z$.

Для ответа на второй вопрос мысленно выделим небольшой параллелепипед, одна из вершин которого будет находится в начале координат, а стороны будут равны dx, dy и dz. Найдем поток электростатического поля через этот параллелепипед. Через самый правый торец поток равен $d\Phi_1 = E_y dxdz = -2\alpha dxdydz$, через торец, который располагается в плоскости xOz поток равен нулю. Аналогично считая потоки через другие стороны параллелепипеда получаем, что поток равен



$$d\Phi = -6\alpha dxdydz = -6\alpha dV,$$

где dV — объем параллелепипеда. С другой стороны, по теореме Гаусса этот поток равен dq/ε_0, где dq — это заряд, который находится внутри параллелепипеда. Приравнивая эти выражения, находим плотность заряда, которая равна $\rho = -6\alpha$.

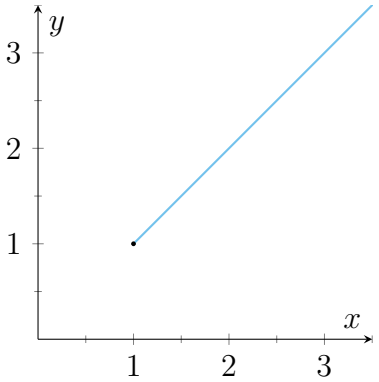
Условием того, что плотность заряда равна нулю будет равенство нулю α, что является достаточно важным результатом, указывающим на тот факт, что устойчивое положение равновесие в случае только Кулоновских сил невозможно.

2.2 Если $V_{RF} = 0$, потенциал принимает вид

$$\Phi = -\frac{k_z U_{\text{DC}}}{z_0^2}\frac{x^2}{2} - \frac{k_z U_{\text{DC}}}{z_0^2}\frac{y^2}{2} + \frac{k_z U_{\text{DC}}}{z_0^2} z^2.$$

Тогда сила, действующая на ион, равна

$$\vec{F} = e\left(\frac{k_z U_{DC}}{z_0^2}x,\ \frac{k_z U_{DC}}{z_0^2}y,\ -\frac{k_z U_{DC}}{z_0^2}2z\right).$$



Так как изначально $z = 0$, а значит и $F_z = 0$, то частица всегда будет оставаться в плоскости xy. В начальный момент сила направлена вдоль прямой $x = y$, поэтому частица всегда будет оставаться на этой прямой, удаляясь на бесконечность из точки старта.

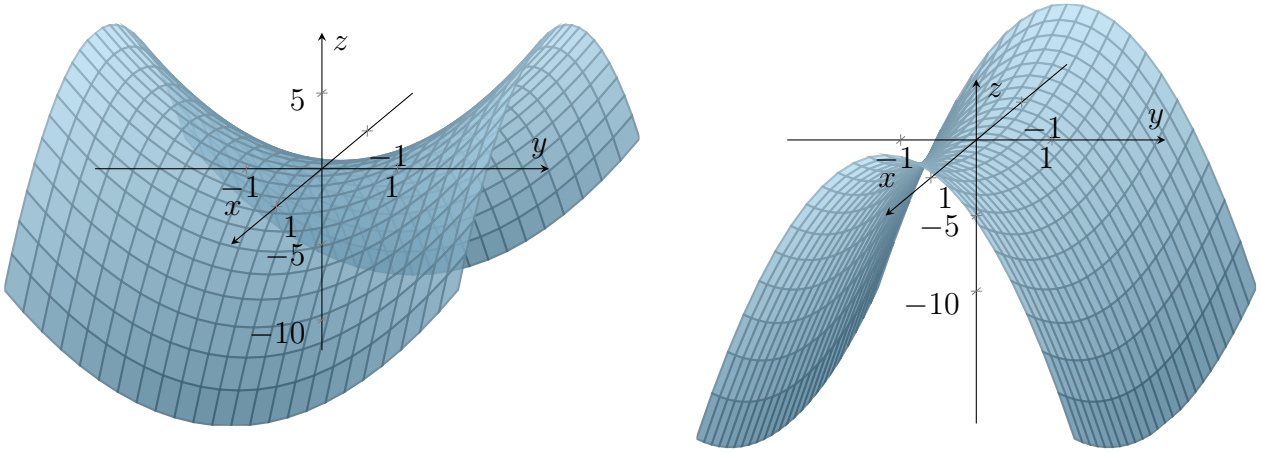
2.3 Обозначим $V_{RF}/r_0^2 = 2A$, тогда потенциал принимает вид

$$\Phi = -Ax^2\cos\Omega t + Ay^2\cos\Omega t - A\frac{x^2}{2} - A\frac{y^2}{2}.$$

В моменты $t = 0$ и $t = \pi/\Omega$ потенциал принимает вид

$$\Phi_0 = -\frac{3}{2}Ax^2 + \frac{1}{2}Ay^2, \qquad \Phi_\pi = -\frac{3}{2}Ay^2 + \frac{1}{2}Ax^2.$$

Изобразим зависимость потенциала от координат:



Численное моделирование

2.4 Для начала упростим себе жизнь, выразив V_{RF} и U_{DC} через q_x и a_x(или через q_y и a_y), а также параметры установки. По условию

$$a_x = a_y = -\frac{4ek_z U_{\text{DC}}}{mz_0^2\Omega^2}, \quad q_x = -q_y = \frac{2eV_{\text{RF}}}{mr_0^2\Omega^2}.$$

Тогда мы получаем

$$U_{DC} = -\frac{mz_0^2\Omega^2 a_x}{4ek_z}, \quad V_{RF} = \frac{mr_0^2\Omega^2 q_x}{2e}.$$

Тогда именно так и будем задавать напряжения в коде, задавая именно параметры q_x, a_x, а не напряжения.

Далее внимательно рассмотрим уравнения Матье, в особенности те члены, что содержат q. Легко догадаться, что замена $\tau \to \tau + \pi/2$ с одной стороны эквивалента замене $q \to -q$, с другой стороны эквивалентна сдвигу начала отсчета по времени. Логично, что сдвиг начала времени не должен влиять на возможность захватить ион: захват иона должен представлять из себя некотрый процесс, который не зависит от начала времени. Таким образом из общих соображений можно сразу получить, что одинаковые по модулю и противоположные по знаку значения q будут давать один и тот же качественный результат. Отсюда также следует, что движение по осям x и y или одновременно устойчиво или одновременно неустойчиво.

Теперь внимательно посмотрим на уравнение для координаты z. Мы видим типичное уравнение гармонических колебаний в случае $a_z > 0$, или уравнение, решением которого являются уходящие на бесконечность экспоненты при $a_z < 0$. Значит, захват иона вдоль оси z возможен тогда и только тогда, когда $a_z > 0$. Это в свою очередь означает, что для захвата иона необходимо (но не факт, что достаточно) $a_x < 0$.

Теперь мы можем исследовать поведение иона в ловушке Пауля для различных значений a, q. Более того: мы можем проверить свои предположения, сделанные из общих соображений. Проведем измерения в диапазоне $q_x \in [-2, 2]$

Предлагаем вам перейти в тетрадку и убедиться самим во всем.

Как видим, ион действительно захватывается по всем 3 осям в области $|q| \in [0.5, 0.9]$

2.5 Снова произведем аналогичные измерения, но для $a_x = 0.1$. Из соображений выше очевидно, что ион не будет захвачен по оси z ни при каких значениях q.

Предлагаем вам перейти в тетрадку и убедиться самим во всем.

Как видим, ион действительно не захватывается по оси z, хоть и устойчив по x и y в области $q \in [-0.8, 0.8]$

2.6 Как мы уже показали, оси x и y или одновременно устойчивы, или одновременно неустойчивы. Так что самое интересное в данном пункте - исследовать, станет область устойчивости шире, или уже при уменьшении параметра a_y по модулю.

Из диаграммы для «некоторой» ловушки Пауля, можно предположить что ширина зоны станет выше, однако нет гарантии, что приведенныая диаграмма соответствует той ловушке, что исследуется в данной задаче. Более того: из пункта **2.4** очевидно, что диаграмма не соответствует ловушке из задачи, поскольку точка $a_x = -0.1, q_x = 0.9$ оказалась устойчивой, в то время как она лежит за пределами диаграммы, показанной в условии.

Чтобы проверить гипотезы выше произведем численный эксперимент.

Предлагаем вам перейти в тетрадку и убедиться самим во всем.

Получаем, что зона устойчивости стала шире, и ион в этой зоне захватыватся. $|q| \in [0.2, 0.9]$

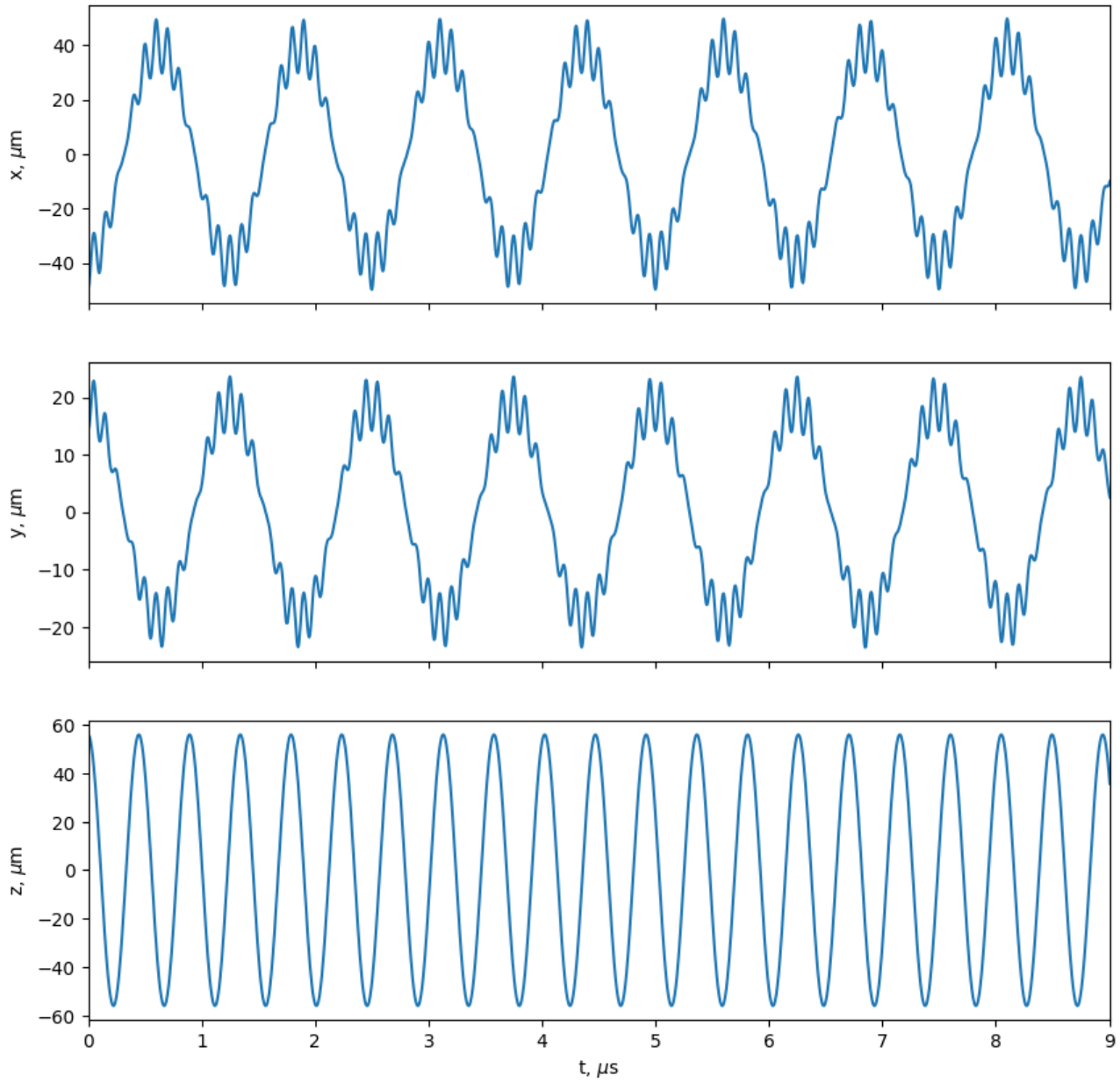


Рис. 3: Устойчивость по x, y и z, ион захватывается $q_x = 0.5$, $a_x = -0.1$

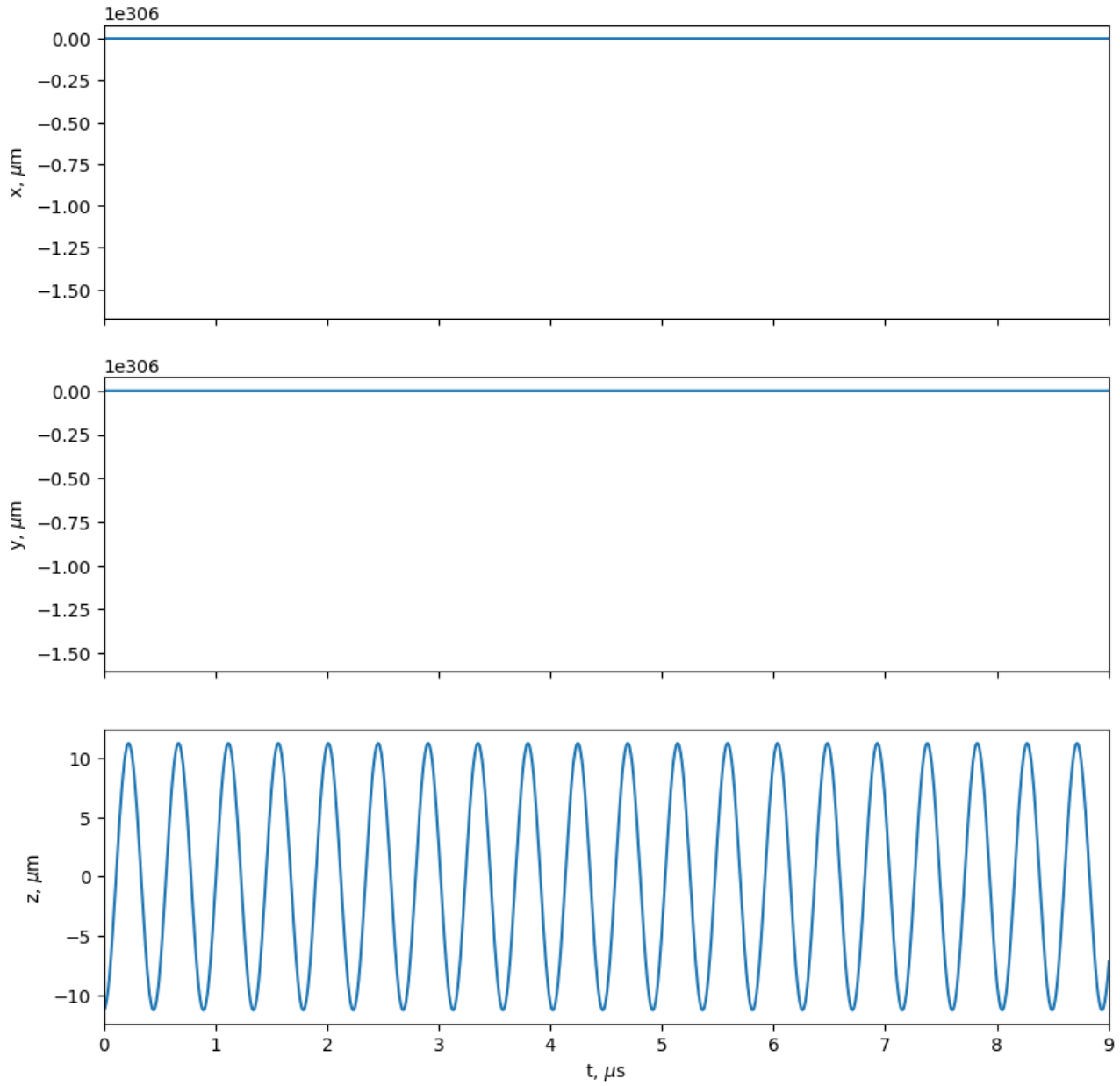


Рис. 4: Отсутствие устойчивости по x, y и устойчивость по z, ион не захватывается $q_x = 0.1$, $a_x = -0.1$

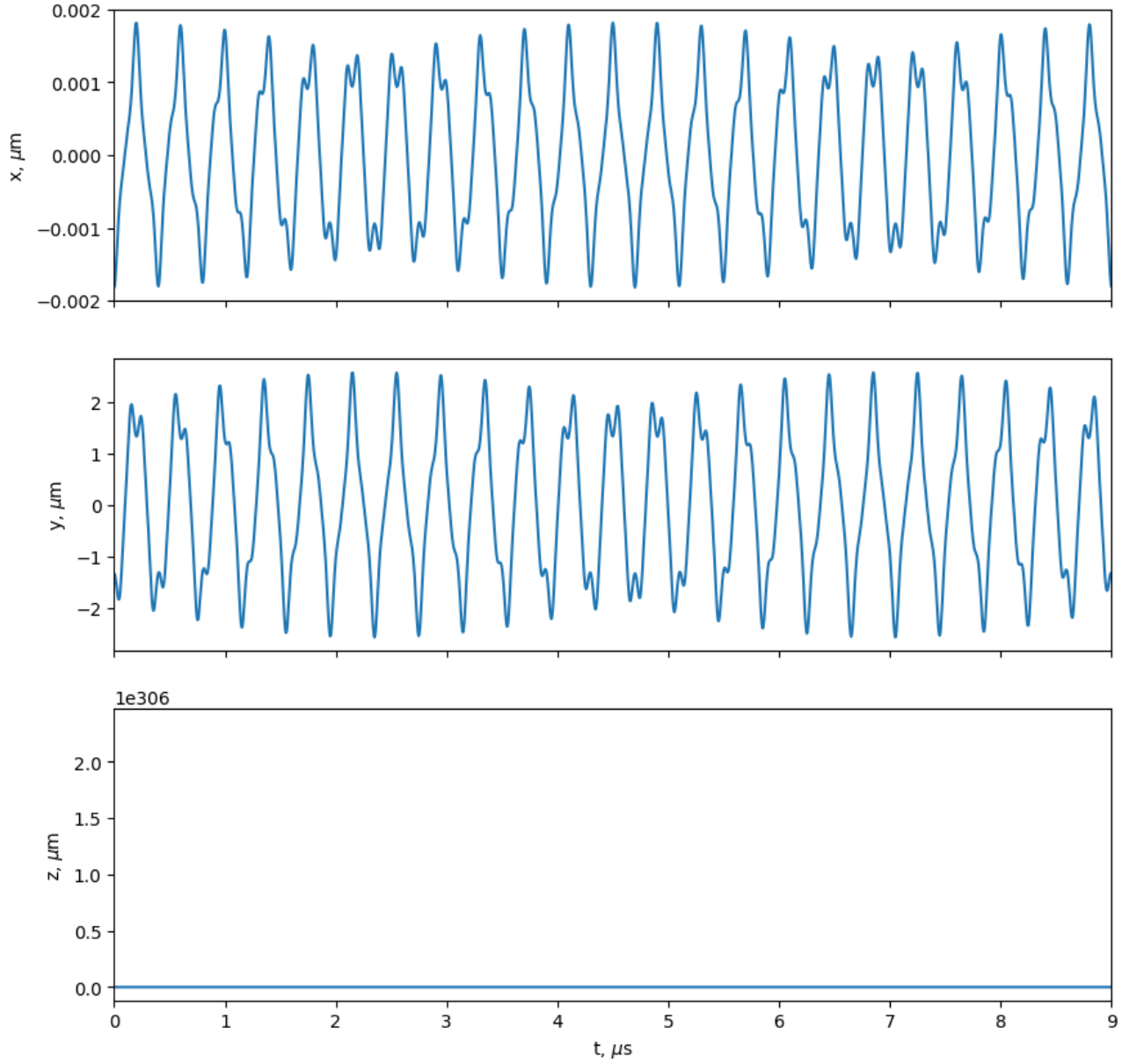


Рис. 5: Устойчивость по x, y и отсутствие устойчивости по z, ион не захватывается $q_x = 0.9$, $a_x = 0.1$

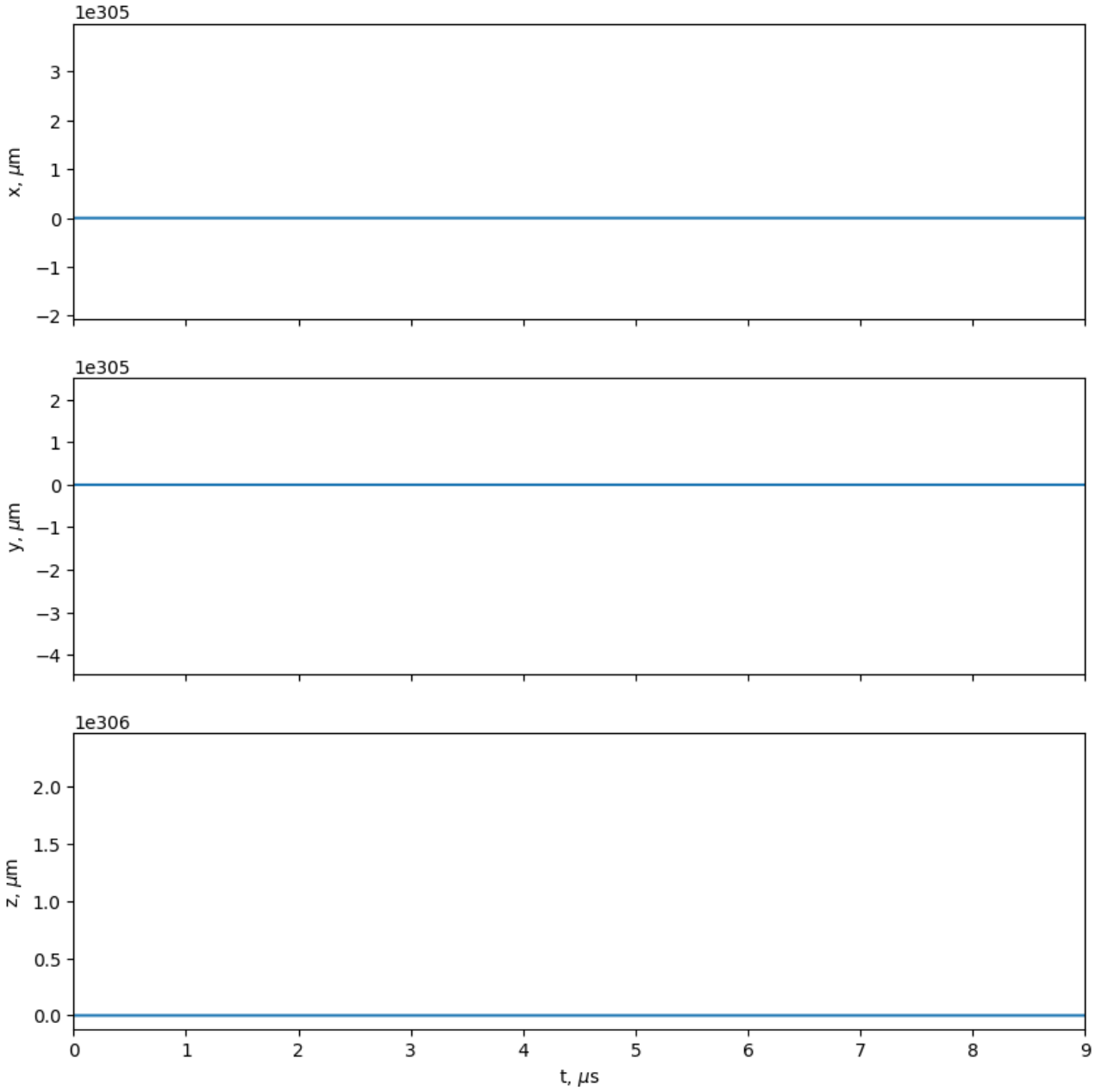


Рис. 6: Отсутствие устойчивости по x, y и z, ион не захватывается $q_x = 0.9$, $a_x = 0.1$

Доплеровское охлаждение ионов в ловушке Пауля

2.8 Перейдем в систему отсчета источника. Промежуток времени между сигналами, которые детектирует приемник, сокращается, так как он приближается к источнику со скоростью v_0:

$$\Delta t' = \frac{c}{c + v_0}\Delta t,$$

где c — скорость сигнала. Тогда частота, с которой он детектирует сигналы равна:

$$\omega = \left(1 + \frac{v_0}{c}\right)\omega_0.$$

2.9 Чтобы найти наиболее вероятную скорость, возьмем производную по модулю скорости от логарифма вероятности:

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dv} = 2\frac{1}{v} - \frac{m}{2kT}2v = 0, \quad \Longrightarrow \quad v_{\text{н. в.}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

2.12 Рассмотрим процесс вынужденного испускания фотона. Импульс фотона, который спровоцировал испускание, не изменяется в этом процессе. Когда атом переходит в возбужденное состояние, он поглощает фотон с импульсом $\vec{p}_0$. После процесса вынужденного излучения атом испускает фотон с таким же импульсом $\vec{p}_0$. Значит в результате поглощения фотона, а затем его вынужденного испускания, импульс атома не изменяется.

В случае спонтанного излучения атом испускает фотон произвольном направлении, поэтому в среднем процесс спонтанного излучения не изменяет импульс атома. Значит в результате поглощения фотона, а затем его спонтанного излучения, импульс атома уменьшается на импульс фотона. Таким образом, с учетом того, что процессы вынужденного и спонтанного излучения равновероятны, количество поглощений фотонов равно

$$N = 2\frac{mv_0}{p_\text{ф}},$$

где m — масса атома натрия, v_0 — его средняя скорость. Импульс фотона равен $p_\text{ф} = \hbar\omega/c$. Тогда, учитывая, что $\omega = 2\pi c/\lambda$, получаем

$$N = \frac{mv_0\lambda}{\pi\hbar} \approx 4{,}2 \cdot 10^4.$$

2.13 После решения предыдущих пунктов данный пункт не представляет особых проблем. Требуется только грамотное построение графиков и выбор каких-либо параметров a_x и q_x, дающих устойчивость.

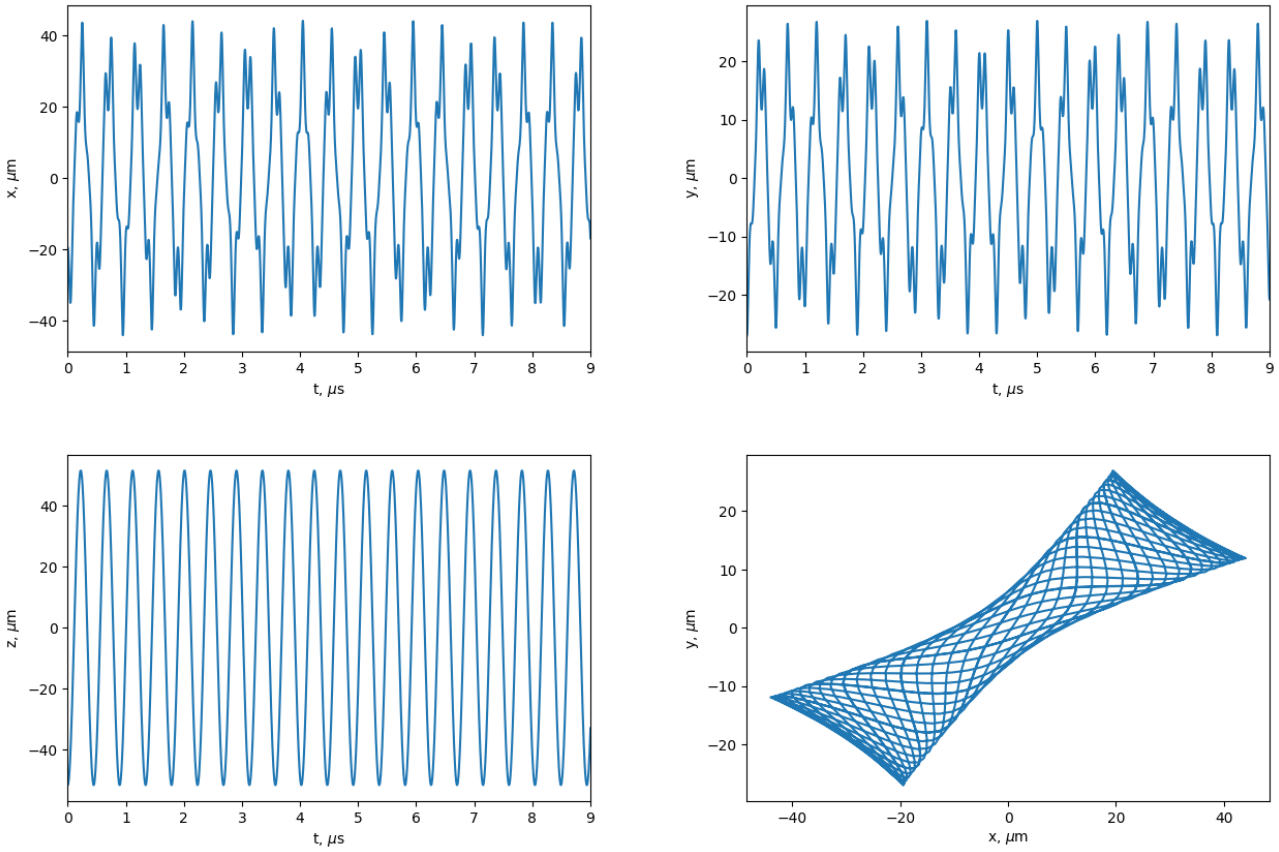
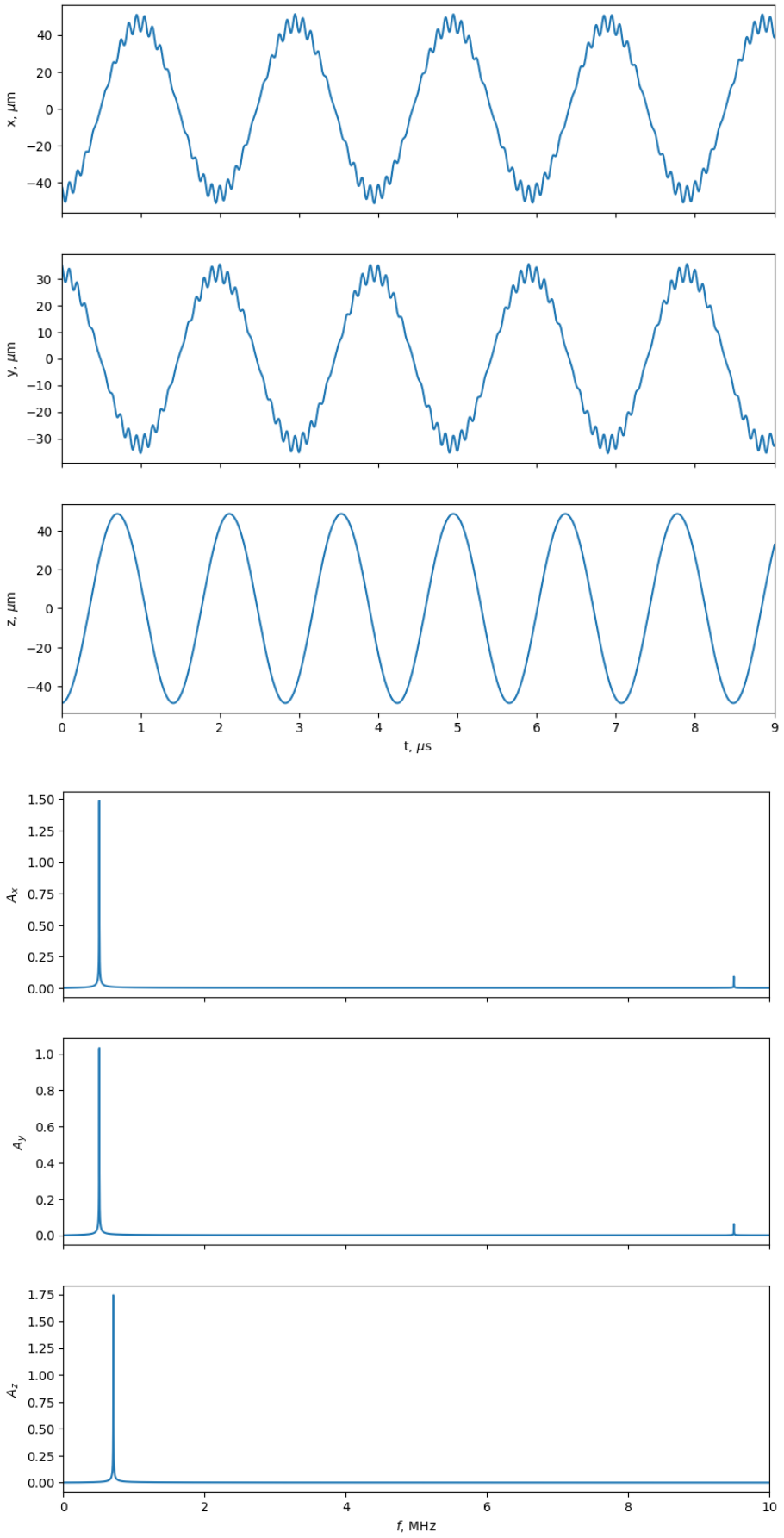


Рис. 7: $q_x = 0.7$, $a_x = -0.1$

2.14 Рассмотрим значения $q_x = 0{,}2$ и $a_x = -0{,}01$. Чтобы найти частоту из графика, найдем время между двумя максимумами и получим период колебаний $5T_x = 7\mu s$. Отсюда найдем частоту колебаний $\nu_x = 1/T_x = 0{,}71MHz$. Сравним данную величину с величиной, полученной в спектре $\nu_x = 0{,}71MHz$. Можно заметить, что с хорошей точностью частоты совпадают. А значит спектр в дальнейшем будет очень важным инструментом для рассчета частот. Аналогично для y и z.


x, μm
y, μm
z, μm
t, μs
A_x
A_y
A_z
f, MHz

2.15 Сравним скорость охлаждения при различных параметрах γ. Будем строить графики в логарифмическом масштабе по оси y, чтобы они были с неплохой точностью линейными. Посчитаем для 5 значений γ. Отсюда получаем набор графиков, а также связь $\tau = 0{,}46\gamma$. Более подробно вы можете исследовать данный вопрос в решенной тетрадке.

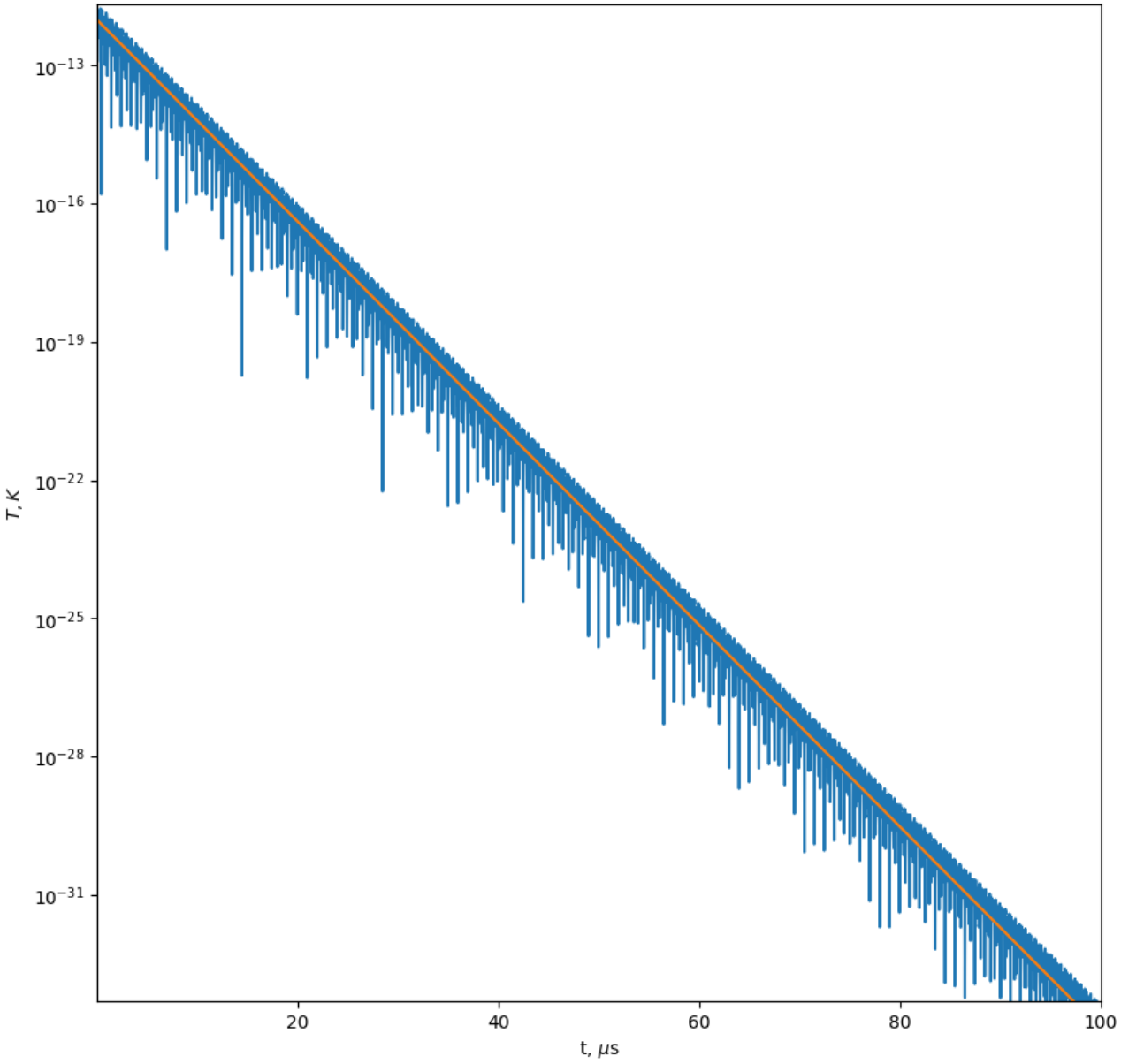


Рис. 8: $q_x = 0{,}2$, $a_x = -0{,}01$, $\gamma = 1e^{-5}$. Затухание температуры в логарифмическом масштабе

2.16 Вообще говоря ответ на данный вопрос зависит от выбранных вами параметров. Таким образом данный пункт скорее знакомит с кристаллами. Перейдем к подробному исследованию в последующих пунктах.

2.17 Данный пункт чисто экспериментальный. Следует в первую очередь определиться с тем, в каком виде мы хотим выводить данные. Среди очевидных: 3D структура, зависимость $\sqrt{x_{\text{last}}^2 + y_{\text{last}}^2}(z_{\text{last}})$ чтобы проверить что цепочка линейная. Однако, мы также рекомендуем следить ещё и за следующими графиками: $x(t)$ чтобы все время проверять тот факт, что кристал достаточно остыл, а также $y(x)$ чтобы в случае линейного кристалла

увидеть одну круглую точку.

Далее обсудим процесс получения искомой зависимости. Очевидно, что подбирать частоты под n — долгий и трудный процесс, ведь явный вид частот мы не знаем. А вот подбор количества ионов под какое-то соотношение частот гораздо удобнее. Таким образом, поставим наш численный эксперимент следующим образом:

1. Под заданную пару q_x, a_x ищем максимальное число ионов n, при котором они образуют линейную цепочку. Кроме того все время следим, что система охладилась, и отсутствие кристалла не связано с недостатком охлаждения.
2. Записываем в таблицу N, q_x, a_x
3. При помощи кода, аналогичного 2.14 находим частоты. Здесь важно помнить, что чем дольше время моделирования, тем выше точность частот.
4. Аппроксимируем зависимость функцией, заданной в условии.

q_x	a_x	$\left(\frac{\omega_r}{\omega_z}\right)^2$	N
0.05	0.0001	5.75	4
0.10	0.0001	24.50	10
0.15	0.0001	55.75	17
0.20	0.0001	99.5	24
0.25	0.0001	155.75	31
0.30	0.0001	224.5	38
0.35	0.0001	305.75	45
0.40	0.0001	399.50	53
0.45	0.0001	505.75	60
0.50	0.0001	624.50	68
0.55	0.0001	755.75	75
0.60	0.0001	899.50	82
0.90	0.0100	19.75	9
0.90	0.0200	9.625	6
0.90	0.0600	2.875	3

Откуда получаем, что $\alpha = 1{,}81$, $A = 3{,}2$.

Когда мы проделали все измерения, стоит проверить, что данная формула предсказывает результат не только для одного заданного значения a_x, но и для других значений этого параметра. Именно для этого и нужны последние 3 точки в таблице.

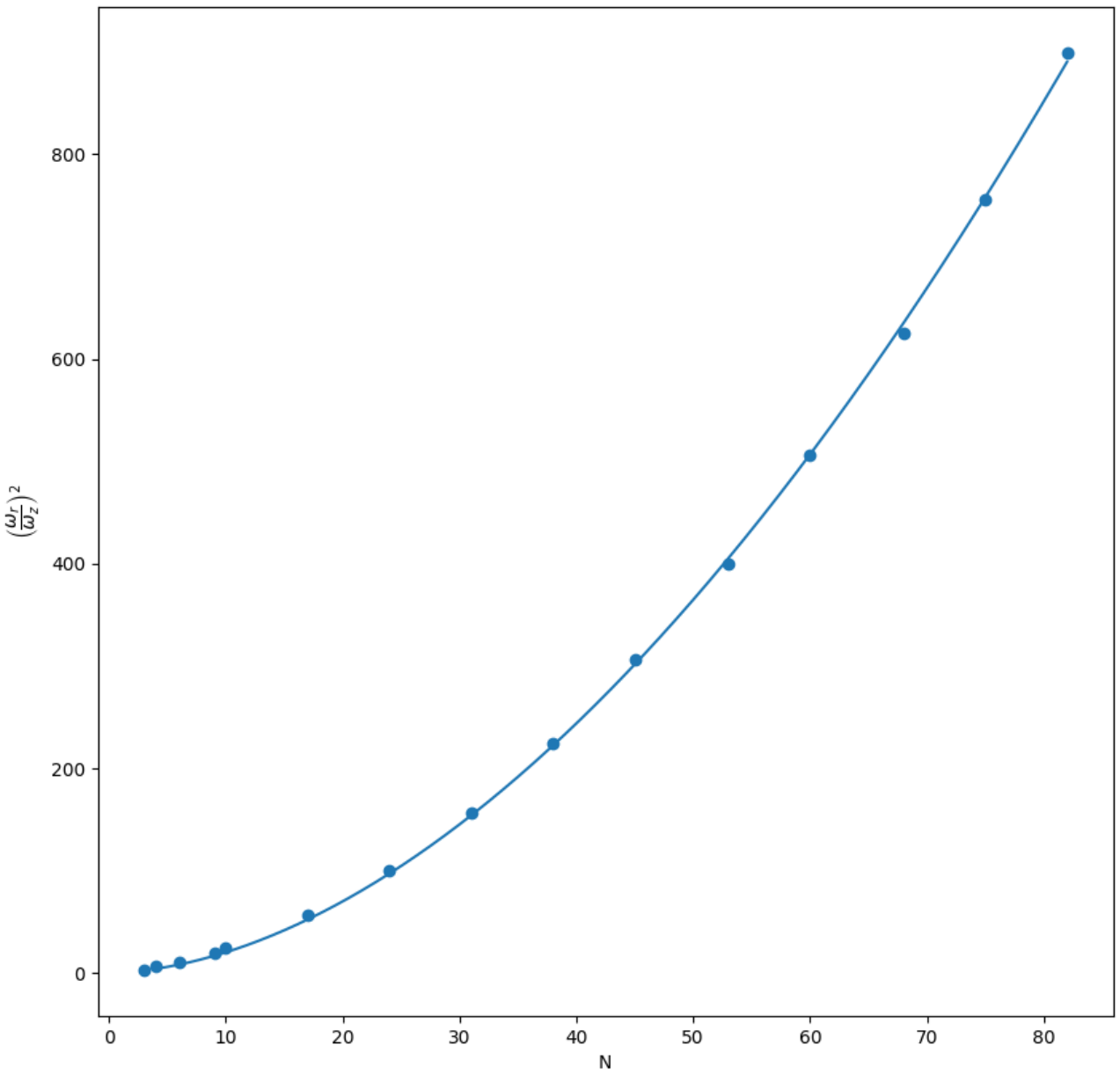


Рис. 9: Аппроксимация экспериментальных данных

2.18 Данный пункт аналогичен 2.17. Однако, есть одно важное отличие: различные серии измерений будут давать немного отличающиеся кривые. Строго говоря, в условии задачи написано: «если цепочка образует двумерную решетку, то выполняется условие». Таким образом надо выбрать самое мягкое условие из полученных. Если бы было написано: «при выполнении условия кристалл всегда двумерный», надо было бы брать самое жесткое. Впрочем, отличие не столь велико.

q_x	a_x	$\frac{\omega_z}{\omega_r}$	N
0.400	0.050	1.826	8
0.380	0.050	2.122	13
0.370	0.050	2.328	19
0.360	0.050	2.599	27
0.350	0.050	2.981	41
0.347	0.050	3.130	49
0.344	0.050	3.303	59
0.340	0.050	3.581	80
0.390	0.060	2.734	30
0.305	0.040	3.505	72

q_x	a_x	$\frac{\omega_z}{\omega_r}$	N
0.700	0.200	2.981	56
0.750	0.200	2.218	18
0.725	0.200	2.524	29
0.710	0.200	2.772	39
0.800	0.200	1.826	9
0.690	0.200	3.242	76

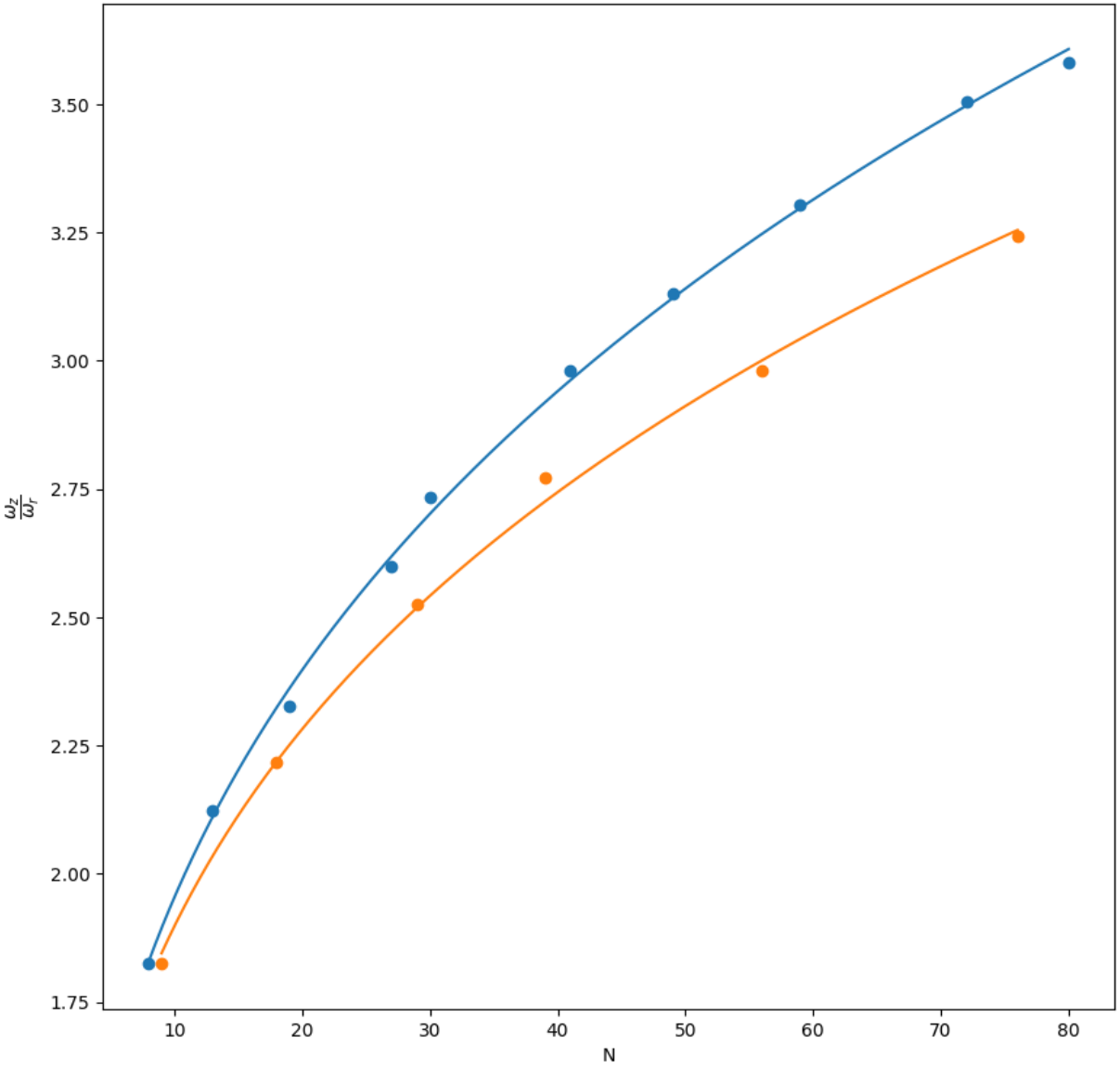


Рис. 10: Аппроксимация экспериментальных данных

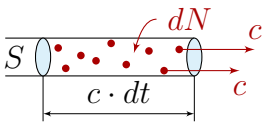
Откуда получаем, что $\beta = 0{,}3$, $B = 1$. Стоит отметить, что в силу размышлений выше давать в ответе более 1 значащей цифры бессмысленно.

Часть 3. Лазерный пинцет

Приближение геометрической оптики

Рассмотрим поток фотонов в виде цилиндра с площадью основания S и найдем импульс, который он переносит в единицу времени.

Пусть за время dt через площадку S проходит dN фотонов, каждый из которых несет импульс $\hbar\omega/c$. Следовательно суммарный импульс равен $dP = dN\hbar\omega/c$. Заметим, что $dN\hbar\omega = dW$, где dW — энергия переносимая световым импульсом через площадку S за время dt. Следовательно,



$$dP = \frac{dW}{c}.$$

Если все фотоны поглощаются площадкой, то весь импульс электромагнитного излучения будет передан площадке и сила давления света на нее будет равна

$$F = \frac{dP}{dt} = \frac{dW}{cdt} = \frac{\dot{W}}{c} \Rightarrow p = \frac{\dot{W}}{cS}.$$

Видно, что давление определяется отношением мощности $\dot{W}$ к величине площади, т.е. *интенсивностью света* I.

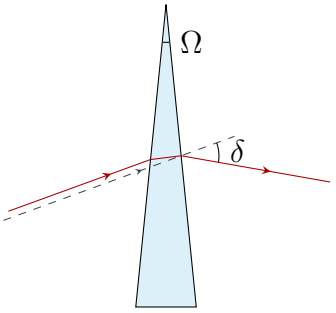
Если излучение падает нормально на площадку и оно полностью ей отражается, то изменение импульса отдельного фотона будет равно $2\hbar\omega/c$ (как при абсолютно упругом ударе). В этом случае давление света будет в два раза больше и будет равно $2I/c$.

Если излучение падает под углом φ и отражается от ровной поверхности, то в этом случае давление света уменьшится и будет равно $2I\cos\varphi/c$.

Если излучение падает под нулевым углом, но поервхность отражает только долю фотонов равную α, то та часть фотонов, которая была отражена передаст удвоенный импульс, а часть фотонов равная $1-\alpha$ передаст импульс $\hbar\omega/c$. Если мы одновременно учтем оба этих случая, то мы получим

$$p = \frac{2\alpha I}{c} + \frac{(1-\alpha)\,I}{c} = \frac{(1+\alpha)\,I}{c}.$$

3.2. Поскольку все углы малы, то мы можем воспользоваться известным фактом из геометрической оптики, что угол отклонения луча равен $\delta = \omega(n-1)$.



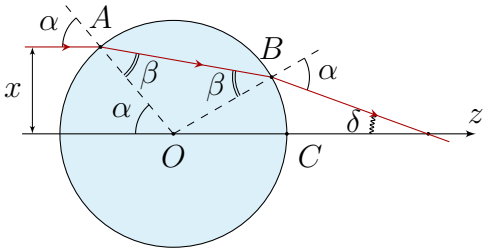
Тогда изменение импульса отдельного фотона будет равно $\hbar\omega\delta/c$ (см. рисунок). Аналогично суммируя изменение импульса всех фотонов получаем, что сила, действующая на призму будет равна

$$F = \frac{IS}{c}\,(n-1)\,\omega.$$

Из третьего закона Ньютона следует, что сила, действующая на призму будет направлена в сторону противоположную изменению импульса отдельного фотона. Учитывая малость угла отклонения импульса света, можно утверждать, что она направлена вверх.

3.3. На рисунке представлен отдельный фотон, который движется вдоль оптической оси на расстоянии x от нее. После прохождения цилиндра он отклоняется от первоначального направления и изменяет свой импульс и оказывает давление на цилиндр. Т.к. ΔAOB равнобедренный, то $\angle AOB = \pi - 2\beta$, откуда следует, что $\angle BOC = 2\beta - \alpha$. Тогда угол

$$\delta = \alpha - \angle BOC = 2\left(\alpha - \beta\right) = 2\left(\alpha - \alpha/n\right).$$



Найдем изменение импульса узкого слоя фотонов ширина которого в плоскости рисунка равна dx, а в направлении перпендикулярном плоскости рисунка равна высоте цилиндра H. Изменение импульса такого потока фотонов вдоль оси x за интервал времени dt будет равно

$$dp_x = -2\frac{x}{R}\frac{n-1}{n}\frac{I(x)H}{c}dxdt.$$

Интегрируя по ширине пучка, т.е. в пределах от $-R/10$ до $R/10$ мы получаем, что изменение импульса вдоль оси x равно

$$\Delta p_x = \frac{n-1}{n}\frac{I_0}{c}\frac{HR}{750}dt.$$

Т.е. сила, действующая на цилиндр будет направлена вниз, т.к. суммарное изменение импульса фотонов вдоль оси x направлено наверх и равна

$$F_x = \frac{n-1}{n}\frac{I_0}{c}\frac{HR}{750}.$$

Аналогично сила, действующая вдоль оси z равна

$$F_z = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{I_0}{c}\frac{HR}{750}.$$

Таким образом, если пучок света имеет некоторый профиль, т.е. зависимость интенсивности от координаты, то если показатель преломления некоторого объекта, например диэлектрического шара больше показателя преломления окружающей среды, то такой объект втягивается в область максимума интенсивности и такими объектами можно управлять и манипулировать.

В этом и состоит принцип работы лазерного пинцета в приближении геометрической оптики. Сила, создаваемая таким пинцетом, может быть порядка нескольких пН и позволяет манипулировать отдельными молекулами.

Пример работы лазерного пинцета можно посмотреть по ссылке.

3.4. В том случае, если показатель преломления цилиндра будет меньше показателя преломления окружающей среды, то фотоны будут отклоняться в другую сторону. Т.е. направление силы по вертикале изменится на противоположное, а по горизонтали останется тем же самым.