10.s04.e04

Алмаз — это кусок угля,
успешно переживший стресс.
Народная мудрость

Неограненные таланты Паши Шишкина

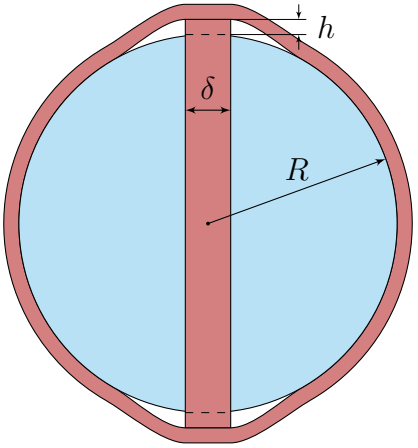
Паша Шишкин решил подготовить задачу на экспериментальный тур регионального этапа по физике и сделать её по-настоящему блестящей. В Шестёрочке он нашёл шар из графита радиуса R_1 и неограниченное количество канцелярских резинок в виде колечек известного радиуса, шириной δ и толщиной h. Жёсткость всех резинок равна k и **не изменяется при любых растяжениях**. Он поставил себе цель сделать из графитового шара алмаз. Для этого он начал обжимать шар канцелярскими резинками по следующей технологии:

- Каждая резинка делает только один оборот и не имеет самопересечений.
- Радиус растянутой резинки совпадает с радиусом того слоя, на который она натягивается, и обязательно лежит в диаметральной плоскости шара (см. рис.).
- Резинки надеваются так, чтобы форму можно было считать шаром в пределах погрешности эксперимента.
- Трения между резинками нет, гравитация на них не действует.

Опыт 1. ~~Подгоночный~~ Подготовительный

Пусть резинка имеет ширину δ и толщину h, а радиус шара R. Паша надел на него первую резинку, а затем надел вторую так, что их плоскости перпендикулярны друг другу.

1. *(1 балл)* Оцените разницу деформаций первой и второй резинки, если их начальный радиус был равен $R_0 < R$, считая $h \ll R$ и $\delta \sim h$.
2. *(Респект Паши Шишкина)* Найдите объём полости, образованной пересечением этих резинок и соотношение между δ, h и R, при котором суммарным объёмом таких полостей можно пренебречь.



В следующих опытах считайте, что:

- Паша настолько талантливый экспериментатор, что объёмом воздуха внутри шара из резинок можно пренебречь вне зависимости от того, какие у них линейные размеры.
- При сжатии объём шара изменяется как
$$\alpha_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T,$$
где $\alpha_T = 3 \cdot 10^{-11}$ Па$^{-1}$ — коэффициент изотермической сжимаемости, V и P – объем шара и оказываемое на него давление.
- Давление фазового перехода из графита в алмаз при комнатной температуре 27 °C считайте равным 10 ГПа.

Опыт 2. Теплопроводящие резинки фиксированной площади поперечного сечения

В рамках этого эксперимента Паша отобрал те резинки, которые при деформации не изменяли свою площадь поперечного сечения и хорошо проводили теплоту. Радиус этих резинок в недеформированном состоянии был $R_0 = 80$ см, ширина $\delta = 1$ см, толщина $h = 40$ мкм, жёсткость $k = 400$ Н/м, а радиус графитового шара $R_1 = 1$ м.

3. *(4 балла)* Какое количество резинок потребуется Паше Шишкину, чтобы превратить графит в алмаз?

Опыт 3. Теплопроводящие резинки фиксированного объёма

Павел продолжил свои опыты в Шестёрочке и отобрал те резинки, которые при деформации не изменяли свой объём и также хорошо проводили теплоту. Радиус резинок этого типа в недеформированном состоянии был $R_0 = 95$ см, ширина $\delta = 1$ см, толщина $h = 40$ мкм, жёсткость $k = 400$ Н/м.

4. *(4 балла)* Какое количество резинок потребуется Паше Шишкину, чтобы превратить графит в алмаз?

Опыт 4. Теплоизолированные резинки

Но и этого Паше было мало. Он отобрал те резинки, которые не проводили теплоту, и стал проводить аналогичный эксперимент.

5. *(1 балл)* Найдите аналитическую зависимость давления от температуры в этом процессе, если цель Паши Шишкина попасть в тройную точку графита ($P = 10{,}8$ МПа, $T = 4600$ К).
6. *(Респект Щебня)* Какая начальная температура должна быть в Шестёрочке при атмосферном давлении, чтобы графит Паши Шишкина всё-таки попал в тройную точку?

При сжатии графита суммарная работа внешних и внутренних сил может быть записана как

$$\delta A_{\text{sum}} = \beta_V P T dV, \qquad \beta_V = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V,$$

где β_V — изохорный коэффициент давления. Считайте, что удельная теплоёмкость графита постоянна его плотность и изохорный коэффициент давения постоянны, а коэффициенты адиабатической и изотермической сжимаемости равны друг другу.

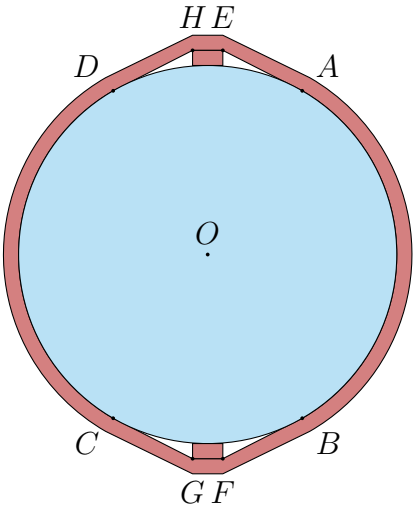
Замечания. 1. Для поиска значений табличных величин можете воспользоваться сервисом. **2.** В конце экспериментального тура вы можете съесть получившийся алмаз.

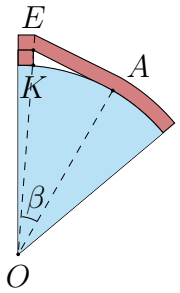
Автора задачи: Л. М. Колдунов, М. В. Конюхов, Щебень

Решение основной задачи

Опыт 1. ~~Подгоночный~~ Подготовительный

1. Найдем разность деформаций резинок не находя каждую из деформаций по отдельности. Такой метод точно лучше, поскольку считая каждую отдельно и округляя значение — можно потерять что-то важное. Заметим, что областям между точками A и B (см. рис.), а также между точками C и D второй резинки, будут соответствовать такие же участки на первой. Разница будет только на участках EA, BF, CG, DH. Поскольку все эти участки эквивалентны, то рассмотрим один из них (EA в криволинейном треугольнике $\triangle EAK$, см. рис.) и найдем разницу длин первой и второй резинки на этих участках.





Первая резинка будет полностью находиться на шаре радиуса R, а соответствующим участком на второй, будет прямой отрезок EA. Заметим, что хоть рассматриваемый сектор с центральным углом β мал, нельзя пренебречь отличием отрезка от дуги. Дело в том, что разница между EA и AK имеет такой же порядок малости.

Участок AK — это дуга, поэтому его длина $l_{AK} = \beta R$. Выразим угол β из треугольника $\triangle EOB$ и применим формулу Маклорена для арктангенса

$$\beta = \arctan\left(\frac{EA}{R}\right) \approx \frac{EA}{R} - \frac{(EA/R)^3}{3}.$$

Тогда

$$l_{AK} = EA - \frac{R}{3}\left(\frac{EA}{R}\right)^3.$$

Распишем разницу рассматриваемых длин

$$\Delta = EA - l_{AK} = \frac{R}{3}\left(\frac{EA}{R}\right)^3.$$

Длину отрезка EA найдем из прямоугольного треугольника AOE с прямым углом $\angle AEO$

$$EA = \sqrt{OE^2 - OA^2}.$$

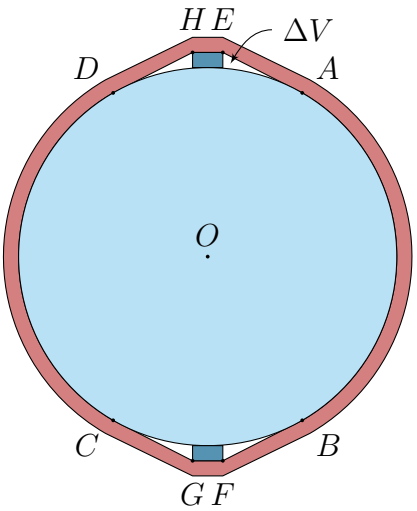
Далее преобразуем разницу длин Δ с помощью формулы Маклорена для степенной функции $(1+x)^n$ и учетом того, что $OE = R + h$

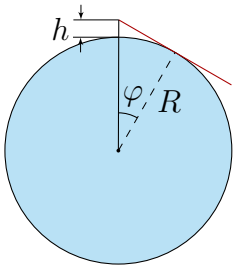
$$\Delta = \frac{R}{3}\left(\frac{EA}{R}\right)^3 = \frac{R}{3}\left(\frac{\sqrt{(R+h)^2 - R^2}}{R}\right)^3 \approx \frac{R}{3}\left(\frac{(2Rh)^{3/2}}{R^3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}h\sqrt{\frac{h}{R}}.$$

Поскольку у нас 4 одинаковых участка, итоговый ответ будет равен

$$4\Delta = \frac{8\sqrt{2}}{3}h\sqrt{\frac{h}{R}}.$$

2. Найдём объём ΔV внутри полости.





Из рисунка получаем

$$(h+R)\cos\varphi = R, \quad \Longrightarrow \cos\varphi = \frac{R}{R+h}.$$

Так как $R \gg h$, то $\varphi \ll 1$ и можно использовать разложение косинуса $\cos\varphi \approx 1 - \varphi^2/2$. Тогда получаем

$$1 - \frac{\varphi^2}{2} = 1 - \frac{h}{R+h}, \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \sqrt{\frac{2h}{R+h}} \approx \sqrt{\frac{2h}{R}}.$$

Площадь сегмента круга

$$S_1 = \frac{R^2\varphi}{2}.$$

Площадь треугольника

$$S_2 = \frac{R(R+h)\sin\varphi}{2} \approx \frac{R^2\varphi}{2} + \frac{Rh\varphi}{2}.$$

Разница площадей равна

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{Rh\varphi}{2} = \frac{Rh}{2}\sqrt{\frac{2h}{R}} = \sqrt{\frac{h^3R}{2}}.$$

Поскольку $d \ll R$, получаем

$$\Delta V = d\Delta S = d\sqrt{\frac{h^3 R}{2}}.$$

Объём 1 резинки

$$V = 2\pi R d h.$$

Тогда

$$4\frac{\Delta V}{V} = \sqrt{\frac{2h}{\pi^2 R}}.$$

Число пересечений резинки с другим

$$n = \frac{2R}{d}.$$

Чтобы объём полостей был мал, необходимо

$$4\frac{\Delta V}{V} n \ll 1, \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{\frac{8hR}{\pi^2 d^2}} \ll 1, \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{8hR} \ll \pi d.$$

Опыт 2. Теплопроводящие резинки фиксированной площади поперечного сечения

a. Найдем конечный объем и радиус графитового шарика в момент, когда он будет готов совершить фазовый переход. По условию задачи нам дана изотермическая сжимаемость

$$\alpha_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T, \quad \Longrightarrow \quad \alpha_T dp_T = \frac{dV_T}{V}.$$

где $\alpha = 3 \cdot 10^{-11}$ Па$^{-1}$ — коэффициент сжимаемости в опытах, V и P — объём шара и оказываемое на него давление. Давление фазового перехода (в дальнейшем будем называть его критическим) из графита в алмаз при комнатной температуре 27 °C считаем равным 10 ГПа. Заметим, что атмосферное давление на 5 порядков меньше критического, а значит им можно смело пренебречь.

Теперь учитывая, что объём пропорционален кубу радиуса шара, мы можем найти радиус шара при деформации

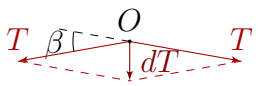
$$-\alpha p_T = \ln\frac{V_T}{V_0} = 3\ln\frac{R_T}{R_1}, \quad \Longrightarrow \quad R_T = R_1 e^{-\frac{\alpha_T p_T}{3}}, \quad \Longrightarrow \quad R_T = 100 \cdot e^{-0{,}1} = 90 \text{ см}$$

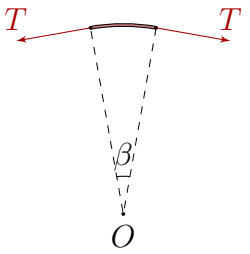
Посколько $R_T > R_0$ следовательно, все растянуты.

b. Найдем давление, которое оказывает растянутая резинка на шар.

Выберем элемент резинки с малым центральным углом β (см. рис.) и рассмотрим силы, действующие на него. С двух концов этот элемент растягивают две силы упругости, а сила реакции со стороны шара их компенсирует. Построим векторный треугольник сил упругости (см. рис.) и найдем, что суммарный вектор этих сил равен

$$dT = T\sin\beta = \beta T.$$





Заметим, что из второго закона Ньютона следует, что сила реакции со стороны шара равна суммарной силе упругости. Из третьего же закона следует, что сила со стороны участка резинки на шар равна силе реакции со стороны шара.

Тогда давление со стороны резинки на этом участке $dP_0 = dT/dS$, где $dS = \delta R\beta$ — это площадь, занимаемая участком. В последней формуле R — это радиус шара на котором находится резинка, а δ — ее ширина, которая для каждой резинки может быть своя.

Таким образом давление одной резинки будет равно

$$dP_0 = dT/dS = \frac{T\beta}{\delta R\beta} = \frac{T}{\delta R}.$$

Заметим, что поскольку Паша Шишкин размещает резинки максимально равномерно, то для всех участков шара, находящихся под слоем толщины h, давление будет одинаковым. Выразим силу упругости через коэффициент жесткости, который в рамках задачи считается постоянным

$$T = k2\pi(R - R_0),$$

где R_0 - это начальный радиус каждой резинки. Тогда

$$dP_0 = \frac{2\pi k(R - R_0)}{\delta R}.$$

c. Найдем суммарное давление, которые оказывают все резинки на графитовый шар. Пусть есть слой резинок, расположенных от радиуса R до $R + dR$, причем dR мало. Количество резинок, лежащих друг на друге (сложенных стопкой) будет равно dR/h. Заметим, что мы не говорим про то что h это константа: мы можем взять сколь угодно малое dR, например, просто равное текущему значению h. Суммарное давление одного такого слоя будет равно

$$dP = \frac{2\pi k(R - R_0)}{\delta R}\frac{dR}{h} = \frac{2\pi k(R - R_0)dR}{\delta hR} = \frac{2\pi k(R - R_0)dR}{SR}.$$

В последнем равенстве мы учли что площадь поперечного сечения резинки равна $S = \delta h$ и остается неизменной в рамках этого опыта.

Суммарное давление со стороны всех резинок можно найти путем интегрирования давления dP

$$P = \int dP.$$

Выполняя интегрирование, мы получаем

$$p = \frac{2\pi k}{S}\int\limits_{R_{\text{in}}}^{R_{\text{out}}}\left(1 - \frac{R_0}{R}\right)dR = \frac{2\pi k}{S}\left(R_{\text{out}} - R_{\text{in}} - R_0 \ln\frac{R_{\text{out}}}{R_{\text{in}}}\right).$$

Здесь R_{out}, R_{in} пределы интегрирования **для резинок**, а не для шара, а с учётом сказанного ранее, мы получаем трансцендентное уравнение на внешний радиус

$$\frac{h\delta p}{2\pi k} = R_{\text{out}} - R_1 e^{-\frac{\alpha_T p}{3}} - R_0 \ln \frac{R_{\text{out}}}{R_1 e^{-\frac{\alpha_T p}{3}}}.$$

Решая его, находим

$$\frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-2} \cdot 10^{10}}{2 \cdot 3 \cdot 400 \cdot 10} = R_{\text{out}} - 0{,}9 - 0{,}8 \ln \frac{R_{\text{out}}}{0{,}9}, \quad \Longrightarrow \quad R_{\text{out}} = 370 \text{ см}.$$

d. Теперь посчитаем количество резинок, необходимых для создания такого давления. Поскольку объем резинок изменяется, будем аккуратно считать количество этих резинок в каждом слое толщины dR и потом интегрировать. Объем слоя

$$dV = 4\pi R^2 dR = n 2\pi R \delta h.$$

Тогда количество резинок в слое

$$n = 2R\frac{dr}{\delta h} = \frac{2RdR}{S}.$$

Нам опять повезло: от толщины и ширины резинок по отдельности ничего не зависит. Итоговое значение количества резинок N

$$N = \sum_{\text{слой}} n_{\text{слой}} = \int\limits_{R_{\text{in}}}^{R_{\text{out}}} 2R\frac{dR}{\delta h} = \frac{R_{\text{out}}^2 - R_{\text{in}}^2}{\delta h} = \frac{(370-90)(370+90)}{10^4 \cdot 40 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-2}} = 10^4 = 322 \cdot 10^5 \sim 30 \text{ млн.}$$

Опыт 3. Теплопроводящие резинки фиксированного объёма

Основная часть решения данного пункта полностью повторяет третий пункт, за исключением некоторых моментов. Критическое давление осталось тем же, а значит и внутренний (критический) радиус графитового шарика остается тем же. Заметим, что этот радиус (0,89 м) меньше чем начальный радиус резинки (0,95 м), а значит — часть резинок окажется не натянутыми и не будут влиять на давление (при провисании резинка не начинает давить в другую сторону, в отличие от пружины).

Немного перепишем выражения для давления

$$dP = \frac{2\pi k(R-R_0)dR}{\delta h R} = \frac{2\pi \cdot 2\pi k(R-R_0)dR}{2\pi R\delta h} = \frac{4\pi^2 k(R-R_0)dR}{V}.$$

В последнем равенстве учтено, что объем резинки постоянен и равен $V_0 = 2\pi R\delta h$.

Теперь переходим к интегрированию давления по слоям так же, как делали это в предыдущем пункте

$$P = \int\limits_{R_0}^{R_{ex}} \frac{4\pi^2 k(R-R_0)dR}{V} = \frac{4\pi^2 k}{V}\left(\frac{R^2}{2} - RR_0\right)\Bigg|_{R_0}^{R_{ex}} = \frac{2\pi^2 k}{V_0}\left(R_{ex} - R_0\right)^2.$$

Подставляя в это уравнение значение критического давления — находим новый внешний радиус

$$R_{ex} = 2{,}69 \text{ м}.$$

Теперь, чтобы найти количество резинок N_2 необходимых для создания критического давления — достаточно лишь поделить объем сферической оболочки, занятой резинками на объем одной резинки, поскольку он сохраняется

$$N_2 = \Delta V / V_0 = \frac{\frac{4}{3}\pi {R_{ex}}^3 - \frac{4}{3}\pi R_{\text{вн}}^3}{2\pi R_0 \delta h} \approx 33 \cdot 10^6.$$

Опыт 4. Теплопроводящие резинки фиксированного объёма

В общем виде первое начало термодинамики записывается так:

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

Это соотношение применимо к **любому веществу**, поскольку это общий постулат. Тем не менее термодинамика бессильна в вопросах зависимостей, пока не заданы термические и калорические уравнения под конкретное вещество. Как известно, для фиксированного числа моль идеального газа, например, внутренняя энергия является только функцией температуры, что в общем случае неверно. Внутренняя энергия является функцией двух параметров — температуры и объёма. Для того, чтобы упростить участникам задачу, мы сразу представили часть, отвечающую зависимости dU от dV вместе с работой, поэтому полное выражение для 1-го начала термодинамики в адиабатном процессе имеет вид

$$C_V dT + \beta_V p T dV = 0.$$

Мы получаем связь температуры и объёма

$$\frac{dT}{T} = -\beta_V \frac{p}{C_V} dV.$$

Затем, используя равенство адиабатного и изотермического коэффициента расширения (что является очень грубым приближение, но тем не менее позволяющим построить хоть какую-то модель), мы получаем связь давления и температуры

$$\frac{dT}{T} = -\beta_V \frac{p}{C_V} dV = +\beta_V \frac{pV}{C_V} \alpha_T dP, \quad \Longrightarrow \quad p_0^2 + \frac{2C_V}{\beta_V \alpha_T V} \ln \frac{T}{T_0} = p^2.$$

Для решения *респекта Щебня* требуется численная подстановка в полученное уравнение. Тем не менее, поиск табличных данных затруднён. Настолько, что респект покорится только истинным Героям.

Альтернативная задача

Задача 1. *(0 баллов)* Чему равна разность $\operatorname{tg} x - \sin x$, если $x \ll 1$.

Задача 2. *(2 балла)* Ищущий находится на башне высотой 40 м. Найдите расстояние от Ищущего до горизонта, где находится Скрытый. Чему равна разность между этим расстоянием и расстоянием, которое ему надо будет пройти по Земле до Скрытого. Радиус Земли 6400 км.

Задача 3. *(0 баллов)* Упругий жгут жесткостью k растягивают из недеформированного состояния на Δx. Используя определение работы силы, найдите работу силы упругости.

Задача 4. *(0 баллов)* Стержень массой m и длиной l находится на шероховатой горизонтальной поверхности. Коэффициент трения между поверхностью и стержнем μ. Стержень начинают вращать вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов. Найдите момент силы трения относительно закрепленного конца стержня.

Задача 5. *(0 баллов)* Найдите работу, совершаемую одним молем идеального газа при изотермическом увеличении объема в два раза.

Задача 6. *(0 балл)* Резиновый жгут в виде кольца начального радиуса r_0 и жесткостью k надет на вертикальный цилиндр радиуса $R > r_0$. Коэффициент трения между жгутом и цилиндром μ, плоскость в которой находится резиновый жгут горизонтальна, ускорение свободного падения g.

1. Чему равна максимальная масса кольца $m_{\max}$, при которой оно не падает вдоль цилиндра?
2. Чему равно давление, которое кольцо оказывает на цилиндр? Толщина кольца равна δ.
3. Если масса кольца $m = m_{\max}/2$, то до какой угловой скорости надо раскрутить цилиндр, чтобы оно соскользнуло с него?

Задача 7. *(2 балла)* Точечная лама массой $m = 800$ г подвешена на двух резиновых шнурах, которые были отрезаны от одного и того же резинового шнура. Длина меньшего куска резины в нерастянутом состоянии $l = 20$ см. Жесткости шнуров равны $k_1 = 30$ Н/м и $k_2 = 50$ Н/м. На каком расстоянии от потолка висит лама? Ответ дайте в сантиметрах. При необходимости округлите до десятых. Как изменится ответ, если масса ламы 400 г.

Задача 8. *(0 баллов)* Груз массой $m = 5$ кг подвешен к потолку на упругом резиновом шнуре жесткостью $k = 500$ Н/м. Грузу дважды сообщают начальную скорость, направленную вертикально вверх. В первом случае эта скорость равна $v_1 = 0{,}5$ м/с, а во втором — $v_2 = 2$ м/с.Во сколько раз максимальная высота подъема груза, отсчитанная от начальной точки, во втором случае больше, чем в первом?

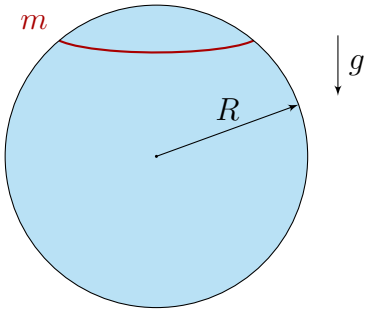
Задача 9. *(0 баллов)* Решите численно уравнения:

$$\sin x = \frac{1}{3}x, \quad 2x = \ln x + 5.$$

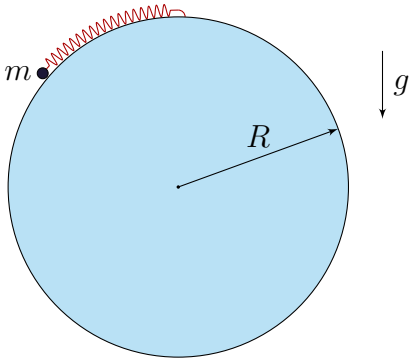
Задача 10. Резиновый жгут в виде кольца радиуса r_0, жесткостью k и неизвестной массы m кладут на гладкий шар радиуса $R = 2\sqrt{2}r_0$.

1. *(2 балла)* Найдите при каких значения массы резинового жгута будет одно положение равновесия.
2. *(2 балла)* Сколько положений равновесия возможно в такой системе?

Ускорение свободного падения g. Плоскость кольца всегда горизонтальна.



Задача 11. *(2 балла)* Невесомая пружина жесткостью k в недеформированном состоянии имеет длину R_0. Ее закрепили в верхней точке гладкой сферы радиуса $R = 12R_0/\pi$, а к нижнему концу прикрепили точечную массу m такую, что $mg = kR_0/2$. Найдите положение равновесия системы.



Решение альтернативной задачи

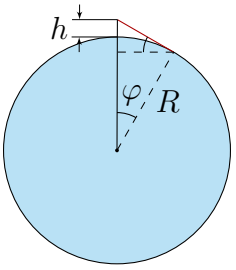
Решение 1. Воспользуемся разложением в ряд Тейлора в окрестности нуля функций $\operatorname{tg} x$ и $\sin x$ до первого различного порядка

$$\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3} \text{ и } \sin x \approx x - \frac{x^3}{6}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} x - \sin x \approx \frac{x^3}{2}.$$

Решение 2. Длина искомой дуги $l = \varphi R$.



Пусть x — расстояние от вершины башни до горизонта. Выразим угол φ из болього треугольника и применим формулу Маклорена для арктангенса

$$\varphi = \arctan\left(\frac{x}{R}\right) \approx \frac{x}{R} - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^3.$$

Тогда

$$l = x - \frac{R}{3}\left(\frac{x}{R}\right)^3.$$

Распишем разницу рассматриваемых длин

$$\Delta = x - l = \frac{R}{3}\left(\frac{x}{R}\right)^3.$$

Длину отрезка x найдем из большого прямоугольного треугольника

$$x = \sqrt{(R+h)^2 - R^2}.$$

Далее преобразуем разницу длин Δ с помощью формулы Маклорена для степенной функции $(1+\xi)^n$ и учетом того, что $OE = R + h$

$$\Delta = R/3\,(x/R)^3 = R/3\left(\frac{\sqrt{(R+h)^2 - R^2}}{R}\right)^3 \approx R/3\left(\frac{(2Rh)^{3/2}}{R^3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}h\sqrt{\frac{h}{R}} \approx 9{,}4 \text{ см}.$$

Решение 3. Направим ось x вдоль направления растяжения жгута. По закону Гука сила $\vec{F} = -k\vec{x}$ Воспользуемся определением работы силы

$$\int_0^{\Delta x} (\vec{F}, d\vec{x}) = \int_0^{\Delta x} -k(\vec{x}, d\vec{x}) = -k\int_0^{\Delta x} x dx = -\frac{k\Delta x^2}{2}.$$

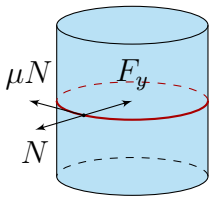
Решение 4. На каждый малый участок стержня массой $dm = m\frac{dl}{L}$ и длиной dl действует сила трения, равная $\mu g dm$. Её момент считаем по определению

$$M_{\text{тр}} = \int_0^L \mu m \frac{dl}{L} g l = \frac{\mu m g L}{2}.$$

Решение 5. По закону Менделеева-Клапейрона $PV = \nu RT = \text{const}$. По определению работы, с учётом того, что $\nu = 1$, получим

$$A = \int_V^{2V} p dV = \int_V^{2V} RT \frac{dV}{V} = RT(\ln 2V - \ln V) = RT \ln 2.$$

Решение 6. Рассмотрим малый участок жгута длиной $Rd\varphi$.



Запишем второй закон Ньютона на ось, лежащую в плоскости поперечного сечения цилиндра

$$N = 2k(2\pi R - 2\pi r_0)\frac{d\varphi}{2}.$$

Теперь на ось вдоль цилиндра

$$\frac{m d\varphi}{2\pi} g = \mu N.$$

Получим ответ на первый пункт: $m = \frac{4\pi^2 k(R - r_0)\mu}{g}$. Давление на цилиндр есть

$$p = \frac{N}{R d\varphi \delta} = \frac{2\pi k(R - r_0)}{R\delta}.$$

При вращении цилиндра на жгут будет действовать центробежная сила Изменится 2-й закон Ньютона на ось, лежащую в плоскости поперечного сечения цилиндра

$$N = 2k(2\pi R - 2\pi r_0)\frac{d\varphi}{2} - \frac{\frac{m}{2} d\varphi}{2\pi}\omega^2 R.$$

С вдвое меньшей массой 2-й закон Ньютона выглядит так:

$$\frac{\frac{m}{2} d\varphi}{2\pi R} g = \mu N.$$

Тогда решим систему уравнений и получим выражение для угловой скорости

$$\omega^2 = \frac{g}{\mu R}.$$

Решение 7. По закону Гука $kl = \text{const}$ значит $k_1 l_1 = k_2 l_2$. Так как $k_2 > k_1$, то $l_2 < l_1$. Значит по условию $l_2 = 20$ см. Тогда $l_1 \approx 33{,}3$ см.

Предположим, что второй шнур не растягивается. По второму закону Ньютона получим $mg = k_2\Delta l$, откуда $\Delta l = 16$ см. То есть Лама висела бы на расстоянии 36 см от потолка, но длина первого шнура 33,3 см. Он тоже должен растянуться. Противоречие.

Запишем второй закон Ньютона, учтя удлинение первого шнура

$$mg = k_2(l_1 - l_2 + x) + k_1 x, \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{mg - k_2(l_1 - l_2)}{k_2 + k_1} \approx 1{,}7 \text{ см}.$$

Тогда искомое расстояние L от потолка будет равно

$$L = l_1 + x \approx 35 \text{ см}.$$

В случае, когда масса Ламы будет 400 г аналогично посчитаем растяжение второго шнура и получим, что оно равно 8 см. Тогда искомое расстояние

$$L_2 = l_2 + 8 \text{ см} = 28 \text{ см}$$

Решение 8. Найдём максимальную скорость, которую может развить груз при натянутом шнуре

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} + \frac{(mg)^2}{2k} = mg\frac{mg}{k}, \quad \Longrightarrow \quad v_{\max} = 1 \text{ м/с}.$$

Это значит, что в случае, когда груз запускают со скоростью 0,5 м/с шнур будет натянут всегда. А во втором случае, с какого-то момента шнур больше не будет натянут.

Случай 1.

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{(mg)^2}{2k} = mgx_1 + \frac{k(\frac{mg}{k} - x_1)^2}{2}, \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \sqrt{\frac{mv_1^2}{k}} = 5 \text{ см}.$$

Случай 2.

$$\frac{mv_2^2}{2} + \frac{(mg)^2}{2k} = mg\frac{mg}{k} + mgh, \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{(mg)}{2k}.$$

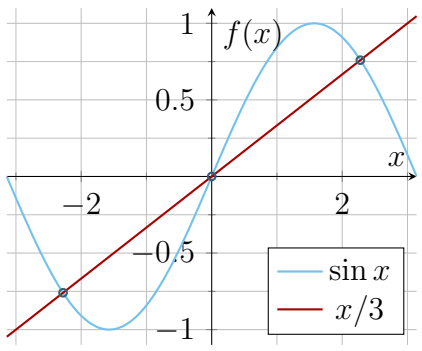
Итого произойдёт подъём на

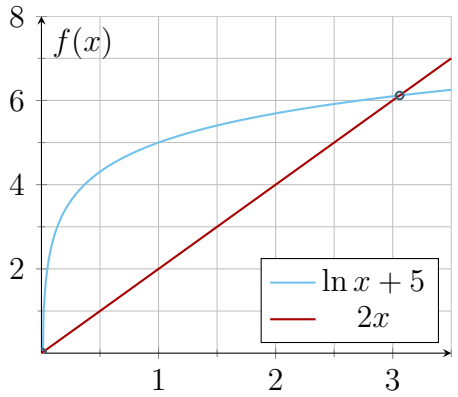
$$x_2 = h + \frac{(mg)}{k} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{(mg)}{2k} = 25 \text{ см}.$$

Во втором случае максимальная высота подъёма груза больше в

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{25}{5} = 5 \text{ раз}.$$

Решение 9. Построим графики выражений, стоящих в левой и правой частях каждого выражения. Точки пересечения этих графиков являются решениями.





Решение 10. Запишем 2-й з-н Ньютона на оси, аналогичные осям, введённым в Задаче 6.

$$\begin{cases} 2k(2\pi R\sin\varphi - 2\pi r_0)\dfrac{d\varphi}{2} = N\sin\varphi, \\ \dfrac{md\varphi}{2\pi}g = N\cos\varphi. \end{cases}$$

Исключим из этих уравнений N и учтём, что $R = 2\sqrt{2}r_0$

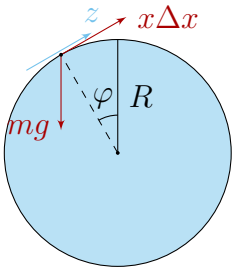
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{4\pi^2 k r_0}{mg}(2\sqrt{2}\sin\varphi - 1).$$

1. С помощью Wolfram численно найдём ϕ такой, чтобы было одно решение у уравнения. Тогда масса m

$$m = \frac{g}{4\pi^2 k r_0}$$

2. Либо одно, либо 2 положения равновесия.

Решение 11.



Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось z

$$mg\sin\varphi = k(R\varphi - R_0), \quad \Longrightarrow \quad \frac{kR_0}{2}\sin\varphi = k\left(\frac{12R_0\varphi}{\pi} - R_0\right), \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\sin\varphi = \frac{12\varphi}{\pi} - 1$$

Решим это уравнение численно в Вольфраме и получим, что $\varphi = 0{,}3$ рад.