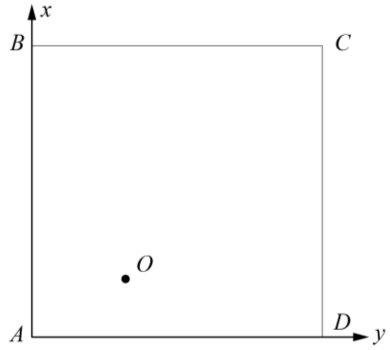
1. Непрямой путь



Печатающая головка 3D-принтера может перемещаться внутри квадратной рабочей области $ABCD$ со стороной $L = 10$ см. Кажущееся непрерывным движение является последовательностью маленьких шагов длиной $l = 0{,}1$ мм, что является размером пикселя принтера. За раз головка может смещаться **либо** на один шаг вдоль стороны AB (ось x), **либо** на один шаг вдоль стороны AD (ось y). Малость шагов создаёт иллюзию, что головка перемещается с постоянной скоростью $\upsilon = 10$ мм/с.

Определите:

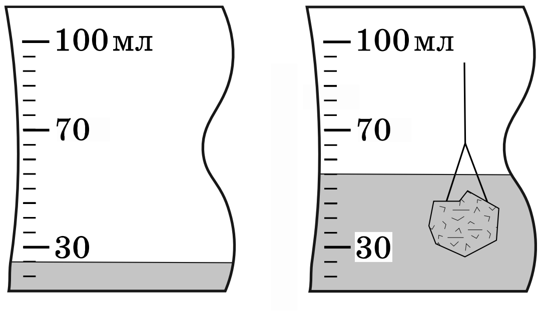
1) за какое минимальное время t_{AB} головка может переместиться из точки A в точку B рабочей области;
2) за какое минимальное время t_{AC} головка может переместиться из точки A в точку C рабочей области;
3) за какое минимальное время t_0 головка принтера сможет пройти через все пиксели рабочей области.

Печатающая головка принтера находится в точке O. Известно, что из точки O в точку A она может переместиться за минимальное время $t_{\text{AO}} = 5$ с, из точки O в точку D за минимальное время $t_{\text{DO}} = 7$ с.

4) Определите координаты точки O. Ответ запишите в см.

2. Кривой стакан

На левом рисунке изображён мерный стакан с жидкостью до погружения в него груза. На правом рисунке – стакан после погружения в него грузика. Чему равен объём грузика?



3. Неуравновешенные весы

На чаши весов поставили два одинаковых сосуда. В левый насыпали до краёв гальку, а в правый – до краёв песок. Затем в левый сосуд долили до краёв воду, а в правый — керосин. После добавления жидкостей весы перешли в состояние равновесия.

В следующем опыте с теми же сосудами жидкости поменяли: в левый сосуд (с галькой) вместо воды налили керосин, а в правый (с песком) вместо керосина налили воду. После этой замены для достижения равновесия на левую чашу весов пришлось добавить груз массой 4 кг.

Если теперь из обоих сосудов полностью удалить все жидкости, оставив только гальку в левом и песок в правом, то груз какой массы и на какую чашу весов нужно будет положить, чтобы весы снова пришли в равновесие?

Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м³, плотность керосина $\rho_к = 800$ кг/м³, а плотность материала гальки равна плотности материала песка и равна $\rho = 2700$ кг/м³.

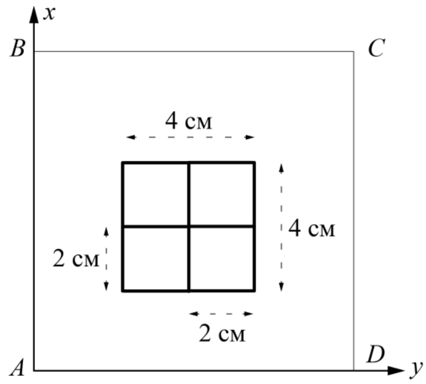
4. Амфора

Амфора – это древний керамический сосуд, который использовался для хранения и транспортировки различных жидкостей и сыпучих продуктов. Объём амфор мог быть разным — от 5 до 50 литров.

Определите в литрах объем жидкости, заполняющий одну амфору, если в десяти одинаковых амфорах содержится 5 метрет. Один метрет содержит 5 хус и 84 котилы. В одном хусе 12 котил. В одной котиле содержится 0,27 л.

За какое время жидкость выльется из амфоры, если скорость ее вытекания равна $\mu = 8\frac{\text{котил}}{\text{с}}$.

1. Непрямой путь (Кутелев К.)



Печатающая головка 3D-принтера может перемещаться внутри квадратной рабочей области $ABCD$ со стороной $L = 10$ см. Кажущееся непрерывным равномерное движение является последовательностью маленьких шагов длиной $l = 0{,}1$ мм, что является размером пикселя принтера. За раз головка может смещаться **либо** на один шаг вдоль стороны AB (ось x), **либо** на один шаг вдоль стороны AD (ось y). Малость шагов создаёт иллюзию, что головка перемещается с постоянной скоростью $\upsilon = 10$ мм/с. Если во время перемещения происходит ещё и печать, то скорость движения уменьшается в 5 раз. Определите:

1) за какое минимальное время t_{AC} головка может переместиться из точки A в точку C рабочей области;
2) за какое минимальное время t_0 головка принтера сможет пройти через все пиксели рабочей области.
3) За какой минимальный интервал времени принтер сможет выполнить работу по изготовлению «окошка», показанного на рисунке. Укажите траекторию движения головки принтера вдоль «окошка». Толщина линии «окошка» 1 пиксель, внутри окошка ничего нет.

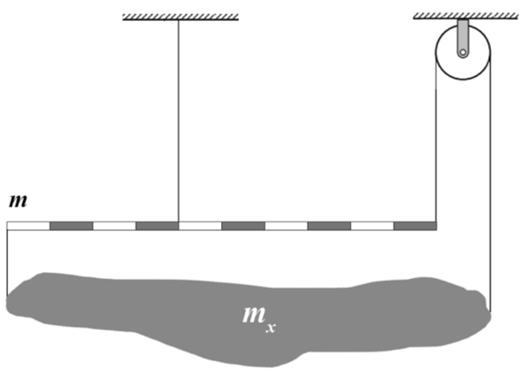
2. Огород (Рубцов Д.)

Для полива грядки длиной $L = 5$ м и шириной $h = 50$ см наклоненную лейку перемещают над грядкой со скоростью $v = 15\,\frac{\text{м}}{\text{мин}}$. Рассеиватель лейки распространяет воду на всю ширину грядки почти равномерно, при этом вода из носика лейки площадью $S = 10$ см^2 попадает в рассеиватель со скоростью $u = 0{,}5\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Плотность воды $\rho = 1\,\frac{\text{кг}}{\text{л}}$.

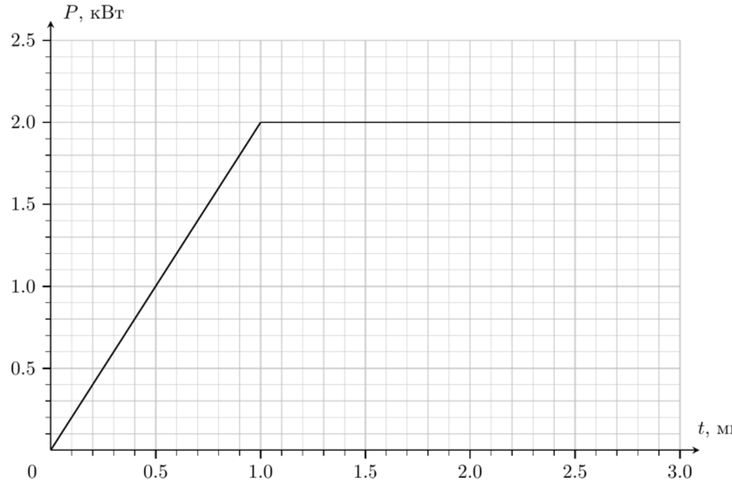
1. Чему равен массовый расход воды из лейки μ? (в кг/с)
2. Какая масса воды попадает на квадратный метр грядки?
3. Каков объем лейки V_0 (в литрах), если воды хватает ровно на одну грядку.

3. Неоднородное тело (Евсеев А.)

Система, состоящая из однородной балки массой m, невесомых нитей и блока, а также неоднородного тела находится в состоянии равновесия (см. рисунок). Балка при этом горизонтальна. Определите, при какой массе m_x неоднородного тела возможно равновесие.



4. Нагревательный элемент (Борисов М.)



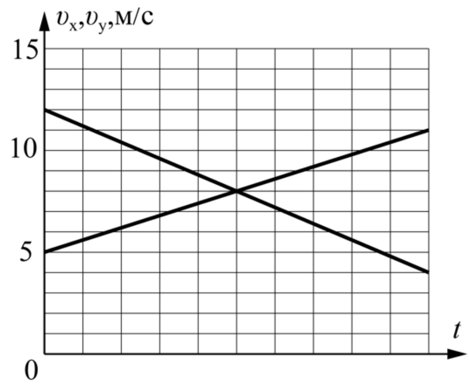
В калориметр налили 2 л воды температурой $t_0 = 20\ ^\circ\text{C}$ и поместили нагревательный элемент. Нагреватель не сразу после включения выходит на режим постоянной мощности. В течение некоторого промежутка после включения в сеть его мощность линейно возрастает, достигает максимального значения и далее остаётся постоянной. График зависимости тепловой мощности нагревателя от времени приведён на рисунке.

Тепловыми потерями в окружающую среду можно пренебречь.

1. Какое количество теплоты получит вода от нагревательного элемента за первую минуту его работы?
2. Спустя какое время с момента включения вода нагреется на $5\ ^\circ\text{C}$?
3. Спустя какое время с момента включения нагревателя вода в калориметре закипит?
4. Какая масса пара будет образовываться в единицу времени после того, как вода закипит? Удельная теплота парообразования $L = 2{,}3 \cdot 10^6\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$.

1. Неудачные оси

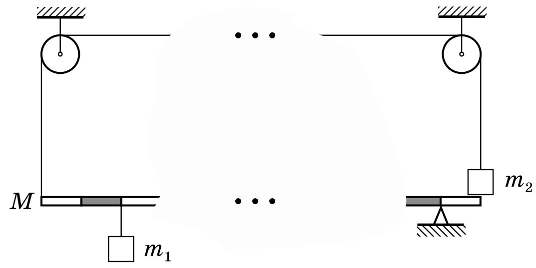
Частица двигалась в плоскости XY. На рисунке приведены графики зависимостей проекций скорости частицы от времени на перпендикулярные оси координат. К сожалению оцифровка оси времени утрачена, однако известно, что минимальное значение модуля скорости было у частицы в момент t_0 = 13,2 с .



Определите:
1) модуль скорости частицы при t = 0 с;
2) ускорение частицы;
3) угол между начальной скоростью и ускорением.

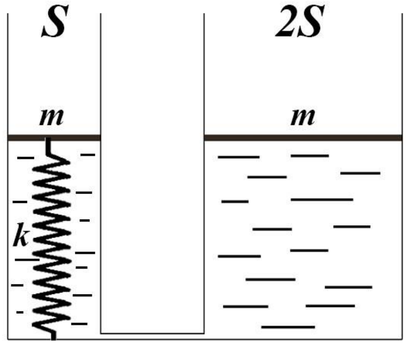
2. Архив Гука

В архиве Гука нашли чертёж механической конструкции, находящейся в однородном поле тяжести g. На чертеже были изображены однородная горизонтальная балка массой M, свободно вращающийся шарнир, грузы массами m_1 и m_2 , а также лёгкая нерастяжимая нить, перекинутая через два неподвижных блока, вращающихся без трения. К сожалению, при транспортировке чертёж порвался на три части, и средняя часть потерялась (см. рисунок). Из заметок к чертежу известно, что m_1 = 1,7 кг, длина l одной части балки равна 20 см, M = 1,6 кг, а минимальная масса второго груза, при которой система находится в равновесии, равна m_{2min} = 2,2 кг. Учитывая что $L > 3l$, найдите длину L всей балки и максимальную массу m_{2max} второго груза, при которой система находится в равновесии.



3. **Поршень на пружине**

Два открытых цилиндрических сосуда с площадями сечений S и $2S$ соединены в нижней части тонкой трубкой. Сосуды частично заполнены несжимаемой жидкостью с плотностью ρ. Жидкости накрыты тонкими массивными поршнями массой m. Поршень в узком сосуде соединен со дном пружиной жесткостью k. При этом поршни находятся на одном уровне.



1. Сжата или растянута пружина?
2. Какова деформация пружины?
3. На поршень широкого сосуда кладут груз массой $2m$. На сколько он опустится относительно первоначального положения?

4. Завернули

Медную ленту длиной L, шириной $10^{-2} \cdot L$ и толщиной $10^{-4} \cdot L$ подключают за концы к источнику постоянного тока I_1. Сопротивление между концами ленты – R. В результате лента нагрелась от комнатной температуры T_0 до температуры T за время t.

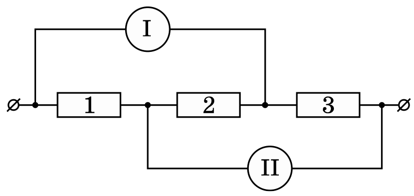
1) Определите КПД такого нагревателя, если удельная теплоемкость меди – c, а плотность - ρ.

Спустя достаточно большое время лента нагрелась до установившейся температуры T_1. Затем ленту отключили от источника и свернули в плотный цилиндрический рулон.

2) Какой ток I_2 необходимо пропускать через ленту в свернутом состоянии, чтобы её установившаяся температура стала T_1?

Лента по всей площади покрыта очень тонким слоем изолятора, что позволяет безопасно подключить источник тока к концам ленты даже в свернутом состоянии. Изоляция не влияет на теплоемкость и плотность материала.
Мощность тепловых потерь пропорциональна площади поверхности тела и разности температур. Комнатная температура не менялась в процессе манипуляций с лентой.

5. Полиморфизм



На схему, показанную на рисунке, подано напряжение $U_0 = 24$ В. Сопротивления одинаковых резисторов 1, 2 и 3 $R = 120$ Ом у каждого. Приборы I и II идеальные. Определите показания приборов, если:

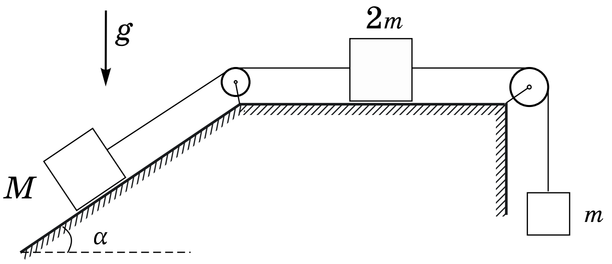
1) оба прибора вольтметры;
2) оба прибора амперметры;
3) один из приборов вольтметр, а другой – амперметр.

1. На речке

От пристани A, находящейся на одном берегу прямой реки шириной h = 600 м, отправляется моторная лодка. Лодка относительно воды идёт с постоянной скоростью u = 5 м/с и выдерживает курс, строго перпендикулярный берегу. На противоположном берегу прямо напротив пристани A расположена пристань B. Скорость течения реки постоянна, направлена вдоль берега и равна v =2,5 м/с. Одновременно из пункта B вдоль берега, против течения, отправляется катер. Катер движется с постоянной скоростью w =5 м/с относительно берега.

1. Найдите, под каким углом α к линии AB в действительности движется моторная лодка.
2. Чему равно минимальное расстояние $L_{\min}$ между катером и лодкой?
3. Определите, через какое время t после начала движения катер и лодка окажутся на минимальном расстоянии друг от друга.

2. Три бруска



Система, представленная на рисунке, состоит из трёх брусков массами $m = 1$ кг, $2m$ и M, связанных лёгкими нерастяжимыми нитями, перекинутыми через неподвижные лёгкие блоки. Известно, что нити натянуты и брусок массой $2m$ движется влево с ускорением $a_1 = 2{,}5$ м/с^2. Поверхность, вдоль которой движутся бруски, гладкая и состоит из трёх участков – вертикального, горизонтального и участка, наклонённого к горизонту под углом α. Трением в оси блоков, можно пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Определите:

1) силу натяжения T_1 правой нити;

2) силу натяжения T_2 левой нити.

Если бруски массами M и m поменять местами, то брусок массой $2m$ будет двигаться вправо с ускорением $a_2 = 6{,}5$ м/с^2.

Найдите:

3) массу бруска M;

4) угол α.

3. Горе от ума

Два длинных стержня жестко соединены концами под прямым углом. На каждый стержень надето по одному кольцу, которые могут свободно перемещаться вдоль стержней. К кольцам прикреплена пружина жёсткостью k = 10 Н/м, соединяющая кольца между собой. В момент t = 0 кольца находятся в точке соединения стержней; затем их начинают двигать вдоль стержней в противоположные стороны с постоянными скоростями v_1 и v_2. Известно, что модули скоростей относятся как $v_1 : v_2 = 3 : 4$.

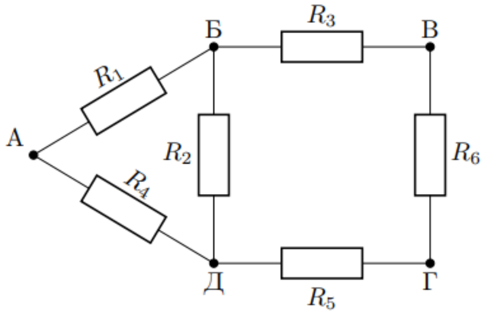
Через t_1 = 6 с после начала движения модуль силы упругости пружины равен F_1 = 30 Н, а через t_2 = 14 с модуль силы упругости равен F_2 = 10 Н.

Найдите:

1. длину l_0 пружины в недеформированном состоянии;
2. скорость v_1;
3. скорость v_2.

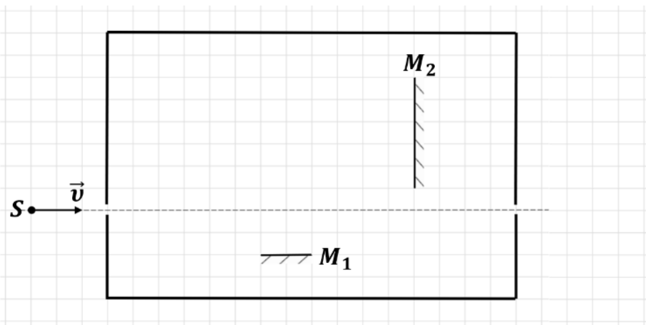
4. Треугольники

В электрической схеме, изображенной на рисунке, известны два сопротивления резисторов ($R_1 = 6$ Ом и $R_3 = 12$ МОм) и некоторые значения эквивалентных сопротивлений между двумя контактами ($R_{АД} = 8$ Ом, $R_{БД} = 9$ Ом, $R_{ГД} = 5$ МОм, $R_{ВГ} = 9$ МОм). Определите значения сопротивлений $R_2, R_4, R_5, R_6, R_{АБ}, R_{БВ}$. Достаточно получить численные ответы.



5. Чёрная коробка

Точечный источник света S движется равномерно и прямолинейно со скоростью 5 см/с вдоль оси, показанной на рисунке пунктиром. Ось проходит через два небольших отверстия в коробке с чёрными стенками. Размер коробки вдоль оси 80 см (рисунок выполнен в масштабе: 1 клетка – 5 см). В коробке закреплены два плоских зеркала M_1 и M_2.

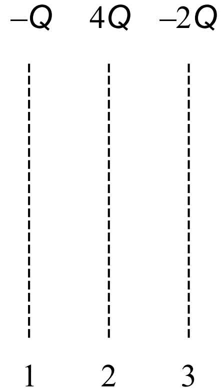


1) В течение какого времени в зеркалах можно наблюдать только одно изображение источника света?
2) В течение какого времени в зеркалах можно наблюдать два изображения источника света?
3) В течение какого времени в зеркалах можно наблюдать три изображения источника света?
4) В течение какого времени в зеркалах можно наблюдать четыре изображения источника света?
5) Покажите построением на рисунке область, из которой будут видны все изображения источника света через 4 с от момента прохождения источником света первого (левого) отверстия.

1. Диффузия

Тонкая пробирка длиной L частично заполнена водой и расположена вертикально (открытым концом вверх) в камере большого объема. Воздух в камере поддерживается при нулевой относительной влажности и постоянном давлении p_0. Вследствие диффузии в пробирке устанавливается линейное изменение концентрации водяного пара с высотой: вблизи поверхности воды пар оказывается насыщенным, при этом $p_н = 0{,}8p_0$, а у верхнего открытого конца пробирки его концентрация в 2 раза меньше. Пробирку сверху закрывают поршнем массой $m = p_0S/g$, который может свободно перемещаться внутри пробирки. Определите, на какой высоте H (от нижнего конца пробирки) будет находиться поршень после установления равновесия. Изменением уровня жидкости в пробирке и ее начальным объемом пренебречь. Температура в камере и пробирке постоянна.

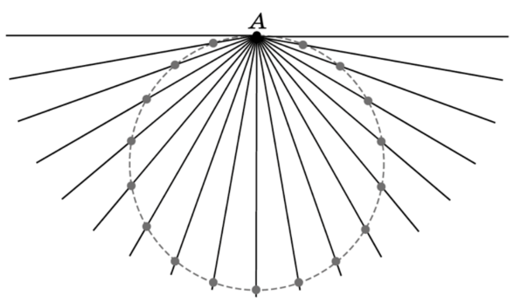
2. Эффект Казимира



Три протяженные тонкие металлические сетки 1, 2 и 3, имеющие заряды $q_1 = -Q$, $q_2 = 4Q$ и $q_3 = -2Q$ ($Q > 0$) соответственно, расположены параллельно на равных расстояниях $d_{12} = d_{23} = d$ друг от друга (см. рис.). Площадь каждой из сеток равна S (расстояние $d << \sqrt{S}$).

1) Найдите модуль электрической силы, действующей на среднюю сетку со стороны двух других.
2) Найдите разность потенциалов между первой и второй сетками.
3) Если от первой сетки отделится без начальной скорости электрон, то на какое минимальное расстояние он приблизится к третьей сетке?
4) Найдите модуль электрической силы, действующей на среднюю сетку со стороны двух других при тех же условиях, но $d >> \sqrt{S}$.
5) Получите формулу для модуля силы взаимного притяжения, действующей на единицу площади двух параллельных **незаряженных** сеток 1 и 2 (без третьей сетки) при расстоянии $d{\sim}0{,}1$ мкм по эффекту Казимира (квантовые флуктуации вакуума), если модуль силы Казимира, действующей на единицу площади одной сетки со стороны другой, имеет вид $F/S = \alpha \cdot h^x \cdot c^y \cdot d^z$, где $h = 6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка, $c = 3\cdot10^8$ м/с – скорость света в вакууме, α – некоторая безразмерная постоянная, x, y и z – целые числа, которые вам нужно найти.

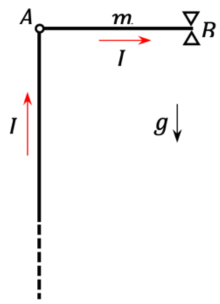
3. Бусинки



Множество спиц, выходящих из одной точки A, расположены в вертикальной плоскости. Из этой точки одновременно отпускают маленькие бусинки. Каждой спице принадлежит одна бусинка. Определите, как должна зависеть начальная скорость бусинок от угла наклона φ спицы к **вертикали**, чтобы через время τ все бусинки оказались на окружности (см. рисунок) диаметра $g\tau^2/2$. Решите задачу для двух случаев:

1. трения нет;
2. коэффициент трения μ.

4. Жёсткий стержень



Однородный жесткий проводящий стержень состоит из двух частей: первая, вертикальная, полубесконечная и неподвижная, вторая – горизонтальная массой m, один из концов которой свободно вставлен в зазор между опорами (точка B на рисунке). Обе части соединены шарнирно в точке A. По стержню с помощью невесомых гибких проводников пропускается постоянный ток I. Трением в системе пренебречь.

1. Постройте качественный график зависимости проекции силы F_B давления опоры на стержень в точке B от силы тока I. Укажите на графике характерные точки.
2. С каким ускорением a_B начнет двигаться точка B стержня если мгновенно убрать опору, не нарушая условия протекания тока?

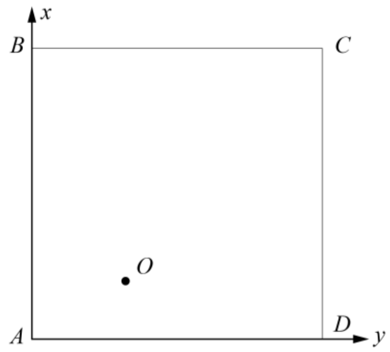
5. Фокус с исчезновением

Точечный источник света находится на главной оптической оси тонкой линзы. При смещении источника вдоль оси на расстояние $L = 40$ см в сторону линзы изображение исчезает.

Если из исходного положения сместить источник в перпендикулярном направлении на такое же расстояние L, то поперечное увеличение линзы становится равным 1/3.

1. Какая это линза — собирающая или рассеивающая?
2. На каком расстоянии от линзы находился источник первоначально?
3. Найдите фокусное расстояние линзы.

1. Непрямой путь (Кутелев К.)



Печатающая головка 3D-принтера может перемещаться внутри квадратной рабочей области *ABCD* со стороной $L = 10$ см. Кажущееся непрерывным движение является последовательностью маленьких шагов длиной $l = 0{,}1$ мм, что является размером пикселя принтера. За раз головка может смещаться **либо** на один шаг вдоль стороны *AB* (ось *x*), **либо** на один шаг вдоль стороны *AD* (ось *y*). Малость шагов создаёт иллюзию, что головка перемещается с постоянной скоростью $\upsilon = 10$ мм/с.

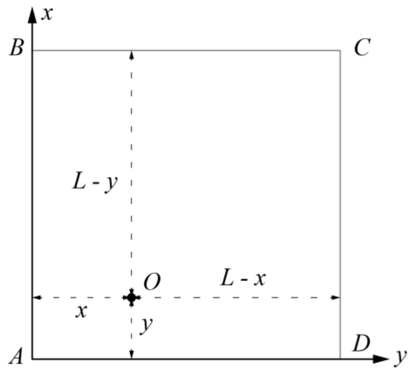
Определите:

1) за какое минимальное время t_{AB} головка может переместиться из точки *A* в точку *B* рабочей области;
2) за какое минимальное время t_{AC} головка может переместиться из точки *A* в точку *C* рабочей области;
3) за какое минимальное время t_0 головка принтера сможет пройти через все пиксели рабочей области.

Печатающая головка принтера находится в точке *O*. Известно, что из точки *O* в точку *A* она может переместиться за минимальное время $t_{AO} = 5$ с, из точки *O* в точку *D* за минимальное время $t_{DO} = 7$ с.

4) Определите координаты точки *O*. Ответ запишите в см.

Возможное решение



1) $t_{AB} = \frac{L}{\upsilon} = 10$ с.

2) Перемещение по осям может происходить только поочерёдно, значит минимальный путь между точками *A* и *C* равен 2*L*: $t_{AC} = \frac{2L}{\upsilon} = 20$ с.

3) Вдоль одной стороны рабочей области помещается $N = L/l = 1000$ пикселей, значит всего их на рабочей поверхности $N^2 = 10^6$. На проход одного пикселя тратится $t_1 = \frac{l}{\upsilon} = 0{,}01$ с. Все пиксели можно обойти последовательно, значит минимальной время $t_0 = \frac{l}{\upsilon}N^2 = 10^4$ с.

4) Перемещение по осям может происходить только поочерёдно, значит $t_{AO} = \frac{S_{AO}}{\upsilon} = \frac{x+y}{\upsilon} = 5$ с, и $t_{DO} = \frac{S_{DO}}{\upsilon} = \frac{(L-x)+y}{\upsilon} = 7$ с.

Откуда $x + y = 5$ см, $L - x + y = 7$ см $\Rightarrow x = 4$ см, $y = 1$ см.

Критерии оценивания

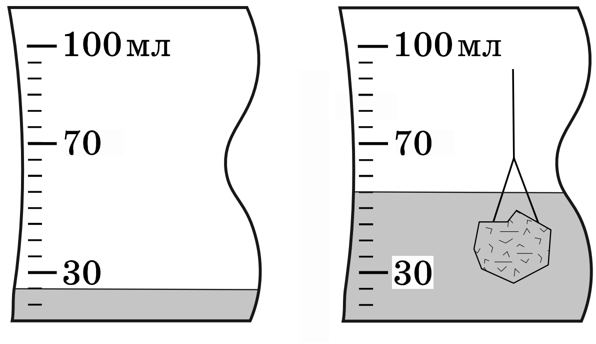
№	Критерий	Балл
1.1	Использован закон для равномерного движения	1
1.2	$t_{AB} = 10$ с	1
2.1	Путь между точками *A* и *C* равен 2*L*	1
2.2	$t_{AC} = 20$ с.	1
3.1	Верно определено число пикселей $N^2 = 10^6$	1
3.2	Верно найдено время $t_0 = 10^4$ с	1

4.1	Использовано уравнение связывающее t_{AO} и координаты точки O	1
4.2	Использовано уравнение связывающее t_{DO} и координаты точки O	1
4.3	Найдено $x = 4$ см	1
4.4	Найдено $y = 1$ см	1

Примечание для жюри
Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

2. Кривой стакан (Вергунов А.)

На левом рисунке изображён мерный стакан с жидкостью до погружения в него груза. На правом рисунке – стакан после погружения в него грузика. Чему равен объём грузика?



Возможное решение

Найдём цену одного деления в интервале 0–30 мл. Интервал 30 мл разделён на 3деления, значит

$$\Delta_1 = 30/3 = 10 \text{ мл}$$

Начальный уровень воды

$$V_{\text{нач}} = 2\cdot\Delta_1 = 20 \text{ мл.}$$

Найдём цену одного деления в интервале 30–70 мл. Интервал 70 – 30 = 40 мл разделён на 8 делений, значит:

$$\Delta_2 = 40/8 = 5 \text{ мл}$$

Конечный уровень воды:

$$V_{\text{кон}} = 70 - 3\cdot\Delta_2 = 70 - 3\cdot 5 = 55 \text{ мл.}$$

Объём погружённого груза равен объёму вытеснённой воды (разности уровней):

$$V_{\text{груза}} = V_{\text{кон}} - V_{\text{нач}} = 55 - 20 = 35 \text{ мл.}$$

Критерии оценивания

№	**Критерий**	**Балл**
1	Правильно найдена цена деления в интервале 0–30 мл	2
2	Правильно определён начальный уровень (20 мл).	2
3	Правильно найдена цена деления в интервале 30–70 мл.	2
4	Правильно определён конечный уровень.	2
5	Правильно определён объём груза.	2

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

3. Неуравновешенные весы (Зотов М.)

На чаши весов поставили два одинаковых сосуда. В левый насыпали до краёв гальку, а в правый – до краёв песок. Затем в левый сосуд долили до краёв воду, а в правый — керосин. После добавления жидкостей весы перешли в состояние равновесия.

В следующем опыте с теми же сосудами жидкости поменяли: в левый сосуд (с галькой) вместо воды налили керосин, а в правый (с песком) вместо керосина налили воду. После этой замены для достижения равновесия на левую чашу весов пришлось добавить груз массой 4 кг.

Если теперь из обоих сосудов полностью удалить все жидкости, оставив только гальку в левом и песок в правом, то груз какой массы и на какую чашу весов нужно будет положить, чтобы весы снова пришли в равновесие?

Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м³, плотность керосина $\rho_к = 800$ кг/м³, а плотность материала гальки равна плотности материала песка и равна $\rho = 2700$ кг/м³.

Возможное решение

Введём обозначения:

- внутренний объём сосуда V (одинаков для обоих).
- объём твёрдой фазы в левом сосуде (галька) V_g.
- объём твёрдой фазы в правом сосуде (песок) V_p.

Запишем равенство масс грузов на чашах весов для первого опыта.

$$\rho V_g + \rho_w\left(V - V_g\right) = \rho V_p + \rho_k\left(V - V_p\right) \quad (1)$$

Запишем равенство масс грузов на чашах весов для второго опыта.

$$\rho V_g + \rho_k\left(V - V_g\right) + m = \rho V_p + \rho_w\left(V - V_p\right) \quad (2)$$

Запишем равенство масс грузов без жидкостей.

$$\rho V_g + \Delta M = \rho V_p$$

Сложим (1) и (2):

$$2\rho V_g + (\rho_w + \rho_k)\left(V - V_g\right) + m = 2\rho V_p + (\rho_w + \rho_k)(V - V_p) \quad (3)$$

Преобразуем полученное выражение:

$$2\rho(V_g - V_p) + (\rho_w + \rho_k)(V - V_g - V + V_p) + m = 0$$

$$m = 2\rho\left(V_p - V_g\right) - (\rho_w + \rho_k)(V_p - V_g) = (V_p - V_g)(2\rho - (\rho_w + \rho_k))$$

$$m = \left(V_p - V_g\right)\rho\left(2 - \frac{\rho_w + \rho_k}{\rho}\right) = \Delta M\left(2 - \frac{\rho_w + \rho_k}{\rho}\right)$$

Видно, что песка больше, чем гальки, поэтому песок перевесит и добавочный груз надо ставить на левую чашу.

Ответ: $$\Delta M=\frac{m}{2-\frac{\rho_w+\rho_k}{\rho}}=3\text{ кг}$$

Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1	Записано, что из условия равновесия следует, что масса 2 всего, что стоит на правой чаше равна массе всего, что стоит на левой чаше (учитывая сосуды). ИНАЧЕ Без указания равенства масс сосудов сразу записано равенство масс их содержимых и дополнительных грузов.	1 0.5
2	Формула $M = \rho V$	0.5
3	Получена формула 1	1.5
4	Получена формула 2	1.5
5	Записана формула 3, описывающая равновесие чаш без жидкостей.	1.5
6	Выражена разность объемов из формул 1 и 2	1.5
7	Выражена разность объемов из формулы 3	0.5
8	Обосновано, что груз надо ставить на левую чашу.	1
9	Верно найдена масса груза (с единицами измерения) ИНАЧЕ Верное числовое значение без единиц измерения	1 0

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

4. Амфора (Бит-Давид Е.)

Амфора – это древний керамический сосуд, который использовался для хранения и транспортировки различных жидкостей и сыпучих продуктов. Объём амфор мог быть разным — от 5 до 50 литров.

Определите в литрах объем жидкости, заполняющий одну амфору, если в десяти одинаковых амфорах содержится 5 метрет. Один метрет содержит 5 хус и 84 котилы. В одном хусе 12 котил. В одной котиле содержится 0,27 л.

За какое время жидкость выльется из амфоры, если скорость ее вытекания равна $\mu = 8\,\frac{\text{котил}}{\text{с}}$.

Возможное решение

1. Определим сколько котил содержится в 5 хусах.

   1 хус = 12 котилам
   5 хус = 5×12 котил= 60 котил

2. Определим сколько котил содержится в 5 метретах.

   1 метрет = 5 хус + 84 котилы = 60 котил+ 84 котилы =144 котилы
   5 метрет = 144 котилы×5= 720 котил

3. Переведем полученный объем в литры
   V = 720 котил = 720 × 0,27 л = 194, 4 л.

4. Тогда в одной амфоре $V_1 = \frac{V}{10}$; V_1= 19,44 л.
5. Найдем объемный расход в л/с. Переведем котилы в литры.

   8 котил = 8 × 0,27 л = 2, 16 л.
   Следовательно, μ = 2,16 л/с

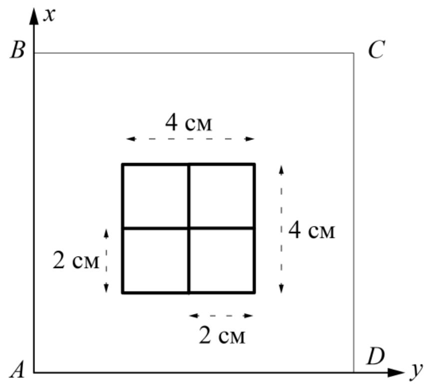
6. Время вытекания жидкости: $t = \frac{V_1}{\mu}$, t = 9 с.

Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1	Определено количество котил в хусах 5 хус = 60 котил	1
2	Определено количество котил в метретах 5 метрет = 144 котилы×5= 720 котил	2
3	Полученный объем выражен в литрах V= 720 котил × 0,27 л = 194, 4 л	1
4	Верно определен объем жидкости, содержащийся в одной амфоре. V_1= 19,44 л	1
5	Объемный расход выражен в л/с. μ=2,16 л/с	2
6	Записана формула для определения времени вытекания жидкости: $t = \frac{V_1}{\mu}$	2
7	Верно определено время вытекания жидкости t= 9 с	1

Примечание для жюри
Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

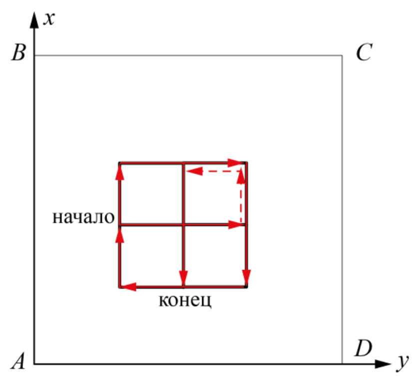
1. Непрямой путь (Кутелев К.)



Печатающая головка 3D-принтера может перемещаться внутри квадратной рабочей области $ABCD$ со стороной $L = 10$ см. Кажущееся непрерывным равномерное движение является последовательностью маленьких шагов длиной $l = 0{,}1$ мм, что является размером пикселя принтера. За раз головка может смещаться **либо** на один шаг вдоль стороны AB (ось x), **либо** на один шаг вдоль стороны AD (ось y). Малость шагов создаёт иллюзию, что головка перемещается с постоянной скоростью $\upsilon = 10$ мм/с. Если во время перемещения происходит ещё и печать, то скорость движения уменьшается в 5 раз. Определите:

1) за какое минимальное время t_{AC} головка может переместиться из точки A в точку C рабочей области;
2) за какое минимальное время t_0 головка принтера сможет пройти через все пиксели рабочей области.
3) За какой минимальный интервал времени принтер сможет выполнить работу по изготовлению «окошка», показанного на рисунке. Укажите траекторию движения головки принтера вдоль «окошка». Толщина линии «окошка» 1 пиксель, внутри окошка ничего нет.

Возможное решение



1) Перемещение по осям может происходить только поочерёдно, значит минимальный путь между точками A и C равен $2L$: $t_{AC} = \frac{2L}{\upsilon} = 20$ с.

2) Вдоль одной стороны рабочей области помещается $N = L/l = 1000$ пикселей, значит всего их на рабочей поверхности $N^2 = 10^6$. На проход одного пикселя тратится $t_1 = \frac{l}{\upsilon} = 0{,}01$ с. Все пиксели можно обойти последовательно, значит минимальной время $t_0 = \frac{l}{\upsilon} N^2 = 10^4$ с.

3) Общая длина контура, который нужно пропечатать $L_0 = 24$ см. Но пройти этот контур «не отрывая пера» не получится, придётся дополнительно перемещаться минимум на $L_1 = 4$ см (см. Рис.).

$$t_x = \frac{L_0}{\upsilon/5} + \frac{L_1}{\upsilon} = 120 + 4 = 124 \text{ с.}$$

Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1.1	Использован закон для равномерного движения	1
1.2	Путь между точками A и C равен $2L$	1
1.3	$t_{AC} = 20$ с	1
2.1	Верно найдено время прохождения одного пикселя или одной стороны (возможно в неявном виде)	1
2.2	Верно найдено время $t_0 = 10^4$ с	1
3.1	Найдена длина контура $L_0 = 24$ см	1

3.2	Указано, что необходимо дополнительное перемещение между узлами	1
3.3	Найдено минимальное необходимое перемещение L_1 = 4 см	1
3.4	Найдено время $t_х$ = 124 с	2

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

2. Огород (Рубцов Д.)

Для полива грядки длиной $L = 5$ м и шириной $h = 50$ см наклоненную лейку перемещают над грядкой со скоростью $v = 15\,\frac{\text{м}}{\text{мин}}$. Рассеиватель лейки распространяет воду на всю ширину грядки почти равномерно, при этом вода из носика лейки площадью $S = 10\text{ см}^2$ попадает в рассеиватель со скоростью $u = 0{,}5\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Плотность воды $\rho = 1\,\frac{\text{кг}}{\text{л}}$.

1. Чему равен массовый расход воды из лейки μ? (в кг/с)
2. Какая масса воды попадает на квадратный метр грядки?
3. Каков объем лейки V_0 (в литрах), если воды хватает ровно на одну грядку.

Возможное решение

1) За время τ через шланг лейки проходит столб воды высотой $u\tau$. Масса этого столба $m = u\tau S\rho$. Тогда массовый расход лейки $\mu = \frac{m}{\tau} = \rho u S = 0{,}5\,\frac{\text{кг}}{\text{с}}$.
2) За время τ лейка поливает часть грядки длиной $v\tau$. Площадь этого куска грядки $hv\tau$, а масса воды, политая на этот участок грядки $\mu\tau$. Тогда масса воды попадающая на единицу площади: $\sigma = \frac{\Delta m}{\Delta S} = \frac{\mu\tau}{hv\tau} = \frac{\rho u S}{hv} = 4\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^2}$
   На один квадратный метр попадает 4 кг воды.
3) Полная масса воды, затраченная на полив грядки σhl. Тогда объем лейки $V_0 = \frac{\sigma hl}{\rho} = \frac{uSl}{v} = 10$ л

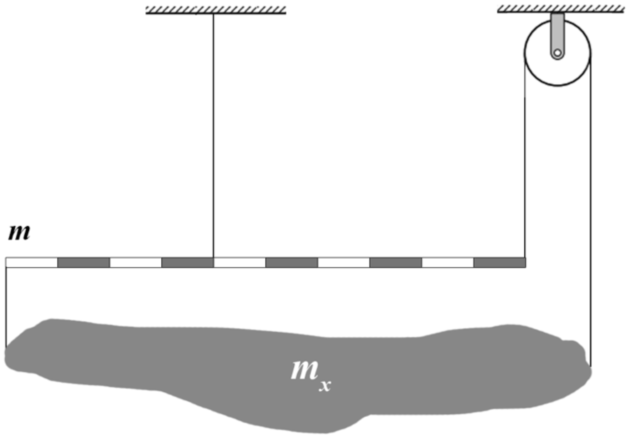
Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1	Правильное выражение для массы воды в шланге лейки $m = u\tau S\rho$	1
2	Найден массовый расход лейки $\mu = \rho u S = 0{,}5\,\frac{\text{кг}}{\text{с}}$	2
3	Записана формула для площади поливаемой грядки $hv\tau$	1
4	Найдена масса, затраченная на полив части площади	1
5	Найдена масса которая попадает на один квадратный метр грядки	2
6	Полная масса воды, затраченная на полив грядки	1
7	Объём лейки	2

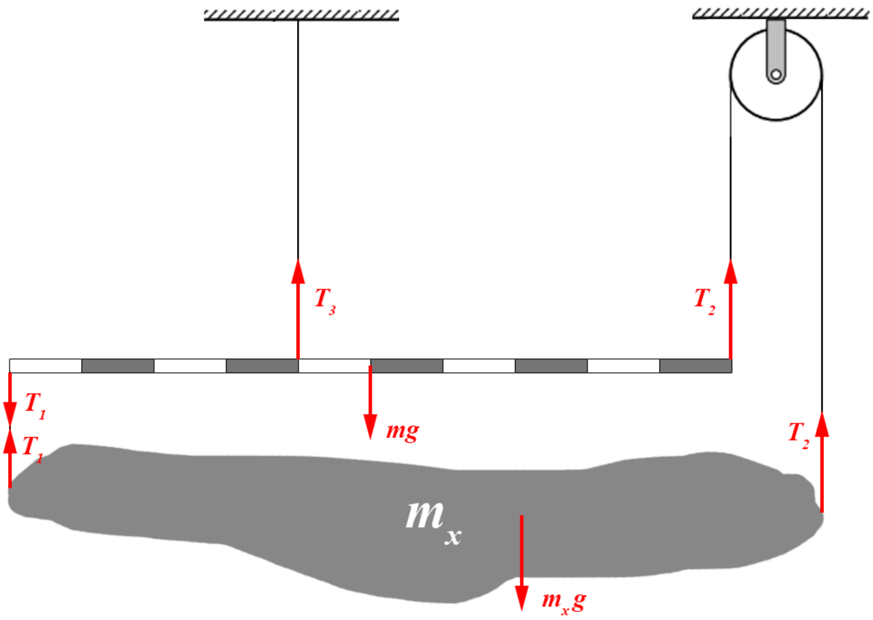
Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

3. Неоднородное тело (Евсеев А.)
Система, состоящая из однородной балки массой m, невесомых нитей и блока, а также неоднородного тела находится в состоянии равновесия (см. рисунок). Балка при этом горизонтальна. Определите, при какой массе m_x неоднородного тела возможно равновесие.



Возможное решение
Расставим силы на балку и неизвестное тело. Важно! Поскольку нам неизвестно положение центра масс неоднородного тела, точка приложения силы $m_x g$ может находиться и в другом месте.



Единственное условие равновесия для неоднородного тела, которое мы можем записать с уверенностью:

$$T_1 + T_2 = m_x g$$

Выразим отсюда T_1:

$$T_1 = m_x g - T_2$$

Теперь запишем связь между T_1 и T_2 через правило моментов для балки:

$$4T_1 \cdot l + 6T_2 \cdot l = mg \cdot l$$

$$4T_1 + 6T_2 = mg$$

Здесь l – это длина единичного отрезка балки, которая, согласно рисунку, состоит из 10 таких одинаковых отрезков.
Тогда:

$$4(m_x g - T_2) + 6T_2 = mg$$
$$T_2 = \frac{1}{2}mg - 2m_x g$$
$$T_1 = 3m_x g - \frac{1}{2}mg$$

Условия, при которых равновесие является теоретически возможным, определяются неотрицательными значениями натяжения нитей. При этом натяжение третьей нити, которая соединяет балку с потолком, обнуляться в принципе не может. Это не сложно заметить, если попробовать записать правило моментов на балку относительно оси, проходящей через ее правый конец. Откуда:

$$\frac{1}{2}mg - 2m_x g \geq 0$$
$$3m_x g - \frac{1}{2}mg \geq 0$$

Откуда:

$$\frac{1}{4}m \geq m_x \geq \frac{1}{6}m$$

То есть, в зависимости от расположения центра тяжести неоднородного тела, равновесие системы будет достигаться при разных его массах.

Критерии оценивания

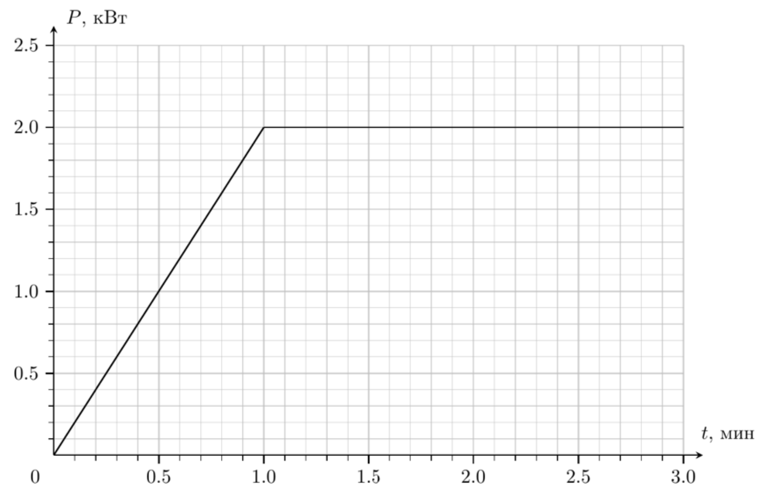
№	**Критерий**	**Балл**
1	Правильно расставлены силы на балку и неоднородное тело	2
2	Записано условие равновесия: $T_1 + T_2 = m_x g$	1
3	Записано правило моментов для балки: $4T_1 \cdot l + 6T_2 \cdot l = mg \cdot l$ или аналогичное выражение	2
4	$T_1 = 3m_x g - \frac{1}{2}mg$	1
5	$T_2 = \frac{1}{2}mg - 2m_x g$	1
6	Условия не отрицательности натяжений нитей	1
7	$\frac{1}{4}m \geq m_x$	1
8	$m_x \geq \frac{1}{6}m$	1

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

4. Нагревательный элемент (Борисов М.)

В калориметр налили 2 л воды температурой $t_0 = 20$ °C и поместили нагревательный элемент. Нагреватель не сразу после включения выходит на режим постоянной мощности. В течение некоторого промежутка после включения в сеть его мощность линейно возрастает, достигает максимального значения и далее остаётся постоянной. График зависимости тепловой мощности нагревателя от времени приведён на рисунке.



Тепловыми потерями в окружающую среду можно пренебречь.

1. Какое количество теплоты получит вода от нагревательного элемента за первую минуту его работы?
2. Спустя какое время с момента включения вода нагреется на 5 °C?
3. Спустя какое время с момента включения нагревателя вода в калориметре закипит?
4. Какая масса пара будет образовываться в единицу времени после того, как вода закипит? Удельная теплота парообразования $L = 2{,}3 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$.

Возможное решение

1. В течение малого промежутка времени тепловую мощность нагревательного элемента можно считать постоянной, тогда за время $\Delta\tau_i$ выделяется количество теплоты
$$\Delta Q_i = P_i \cdot \Delta\tau_i$$
Полное количество теплоты, выделяемое за конечный промежуток времени, будет определяться суммой всех малый порций
$$Q = \sum_i \Delta Q_i = \sum_i P_i \cdot \Delta\tau_i$$
-пропорционально площади под графиком.
$$Q_{\text{выд}}(\tau = 1 \text{ мин}) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 60 = 60 \text{ кДж}$$
2. Для нагревания на 5 °C вода должна получить кол-во теплоты
$$Q_1 = cm\Delta t = 4200 \cdot 2 \cdot 5 = 42 \text{ кДж}$$
Поскольку это меньше, чем $Q_{\text{выд}}(\tau = 1 \text{ мин})$, то вода нагреется на 5 °C пока ещё тепловая мощность нагревательного элемента растёт. Тогда согласно уравнению теплового баланса следует, что
$$Q_{\text{пол}} = Q_{\text{отд}}$$
$$cm\Delta t = \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot \alpha\tau,$$
Где $\alpha = 2 \frac{\text{кВт}}{\text{мин}}$ – скорость роста тепловой мощности.
Тогда для времени нагрева получаем

$\tau = \sqrt{\frac{2cm\,\Delta t}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2\cdot4200\cdot2\cdot\,5\cdot60}{2\cdot10^3}} \approx 50{,}2$ с

3. Для того, чтобы вода закипела, она должная поглотить кол-во теплоты

$$Q_2 = cm(t_{\text{кип}} - t_0) = 4200\cdot2\cdot(100-20) = 672\ \text{кДж}$$

Это больше, чем кол-во теплоты, выделяющееся на нагревательном элементе за 1 мин, значит уравнение теплового баланса для такого случая примет вид

$$cm(t_{\text{кип}} - t_0) = \frac{1}{2}\cdot P_{max}\cdot\tau_1 + P_{max}\tau_2$$

Где $\tau_1 = 1$ мин, $\tau_2 -$ время которое ещё понадобится по прошествии 1 мин, $P_{\max} = 2$ кВт

Для времени τ_2 получаем

$$\tau_2 = \frac{cm(t_{\text{кип}} - t_0) - 0{,}5P\tau_1}{P_{max}} = \frac{4200\cdot2(100-20) - 0{,}5\cdot2\cdot10^3\cdot60}{2\cdot10^3} = 306\ c = 5{,}1\ \text{мин}$$

Тогда полное время с момента включения составляет

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = 6{,}1\ \text{мин}$$

4. После того, как вода закипит, всё подводимое тепло от нагревательного элемента идёт на выпаривание воды. К моменту начала кипения нагревательный элемент уже вышел на постоянную мощность, тогда за промежуток времени $\Delta\tau$ испарится масса воды Δm в соответствии с уравнением теплового баланса

$$L\Delta m = P_{max}\cdot\Delta\tau$$

Откуда

$$\frac{\Delta m}{\Delta\tau} = \frac{P_{max}}{L} = \frac{2\cdot10^3}{2{,}3\cdot10^6} \approx 8{,}7\cdot10^{-4}\,\frac{\text{кг}}{\text{с}} = 0{,}87\ \text{г/с}$$

Критерии оценивания

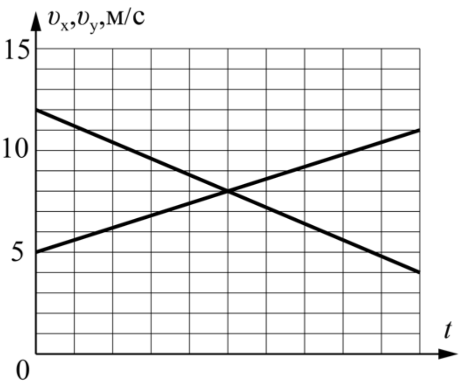
№	Критерий	Балл
1	Подсчитано количество теплоты, выделяемое на нагревательном элементе как площадь под графиком за 1 мин	2
2	Подсчитано кол-во теплоты, необходимое для нагрева воды на 5 °С.Сделан вывод о том, что тепловая мощность нагревательного элемента не вышла на максимальное значение	1
3	Правильно рассчитано время, необходимое для нагрева воды на 5 °С	2
4	Написано уравнение теплового баланса для случая когда вода достигает температуры кипения и правильно рассчитано полное время	2
5	Написано уравнение теплового баланса для процесса кипения	2
6	Найдена скорость испарения воды	1

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

1. Неудачные оси (Кутелев К.)

Частица двигалась в плоскости *XY*. На рисунке приведены графики зависимостей проекций скорости частицы от времени на перпендикулярные оси координат. К сожалению оцифровка оси времени утрачена, однако известно, что минимальное значение модуля скорости было у частицы в момент $t_0 = 13{,}2$ с .



Определите:

1) модуль скорости частицы при $t = 0$ с;
2) ускорение частицы;
3) угол между начальной скоростью и ускорением.

Возможное решение

Судя по графику проекции скорости, движение равноускоренное. Запишем уравнения проекции скорости:

$$\begin{cases} \upsilon_1 = \upsilon_{10} + a_1 t \\ \upsilon_2 = \upsilon_{20} + a_2 t \end{cases}$$, где $\upsilon_{10} = 5$ м/с, $\upsilon_{20} = 12$ м/с.

Начальная $\upsilon_0 = \sqrt{\upsilon_{10}^2 + \upsilon_{20}^2} = 13$ м/с скорость

Через некоторое время Δt после начала движения проекции скоростей оказались равны $\upsilon_8 = 8$ м/с:

$$\begin{cases} \upsilon_8 = \upsilon_{10} + a_1 \Delta t \\ \upsilon_8 = \upsilon_{20} + a_2 \Delta t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{\upsilon_8 - \upsilon_{10}}{\Delta t} \\ a_2 = \dfrac{\upsilon_8 - \upsilon_{20}}{\Delta t} \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{\upsilon_8 - \upsilon_{10}}{\upsilon_8 - \upsilon_{20}} = -\frac{3}{4} = n$$

Модуль скорости υ выразим через проекции:

$$\upsilon^2 = \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 = \upsilon_{10}^2 + \upsilon_{20}^2 + (a_1^2 + a_2^2)t^2 + 2t(\upsilon_1 a_1 + \upsilon_2 a_2)$$

Данное выражение достигает минимума при t_0. Выразим t_0 через формулу для вершины параболы:

$$t_0 = -\frac{2(\upsilon_1 a_1 + \upsilon_2 a_2)}{2(a_1^2 + a_2^2)} = -\frac{2(\upsilon_1 + \upsilon_2 n)a_1}{2(1+n^2)a_1^2} \Rightarrow a_1 = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2 n}{(1+n^2)t_0} = -0.4 \text{ м/с}^2$$

$$a_2 = n a_1 = 0.3 \text{ м/с}^2$$

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 0.5 \text{ м/с}^2$$

Угол между векторами начальной скорости и ускорения (его косинус) найдём через скалярное произведение:

$$\begin{cases} \vec{a}\cdot\vec{\upsilon}_0 = a_1\upsilon_{10} + a_2\upsilon_{20} \\ \vec{a}\cdot\vec{\upsilon}_0 = |\vec{a}|\cdot|\vec{\upsilon}_0|\cos(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{a_1\upsilon_{10} + a_2\upsilon_{20}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{\upsilon}_0|} = \frac{a_1\upsilon_{10} + a_2\upsilon_{20}}{a\upsilon_0} \approx 0.51$$

Это соответствует углу примерно 120 градусов.

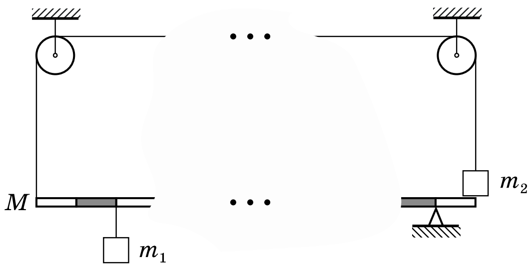
Критерии оценивания

№	**Критерий**	**Балл**
1.1	Найдена начальная скорость 13 м/с	1
2.1	Использовано уравнение скорости при равноускоренном движении	0,5
2.2	Модуль скорости выражен через проекции	1
2.3	В рассуждениях использована точка пересечения графиков	0,5
2.4	Найдено отношение проекций ускорения n*	1
2.5	Получено выражение связывающее t_0 с проекциями скоростей и ускорений	2
2.6	Найдена $a_1 = -0.4$ м/с^2	0,5
2.7	Найдена $a_2 = 0.3$ м/с^2	0,5
2.8	Найдено ускорение $a = 0.5$ м/с^2	0,5
3.1	Любая корректная идея нахождения угла между векторами	1
3.2	Реализация метода (формула)	1
3.3	Реализация метода (число) 120º **	0,5

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

2. Архив Гука (Агеев Я.)



В архиве Гука нашли чертёж механической конструкции, находящейся в однородном поле тяжести g. На чертеже были изображены однородная горизонтальная балка массой M, свободно вращающийся шарнир, грузы массами m_1 и m_2, а также лёгкая нерастяжимая нить, перекинутая через два неподвижных блока, вращающихся без трения. К сожалению, при транспортировке чертёж порвался на три части, и средняя часть потерялась (см. рисунок). Из заметок к чертежу известно, что m_1 = 1,7 кг, длина l одной части балки равна 20 см, M = 1,6 кг, а минимальная масса второго груза, при которой система находится в равновесии, равна m_{2min} = 2,2 кг. Учитывая что $L > 3l$, найдите длину L всей балки и максимальную массу m_{2max} второго груза, при которой система находится в равновесии.

Возможное решение

Минимальная масса m_2 достигается при равенстве нулю действующей на него силы реакции опоры со стороны балки. Тогда сила натяжения нити:
$T = m_{2\min}g$.
Запишем правило моментов относительно оси проходящей через точку крепления вращающегося шарнира:

$$T(L-l) = Mg\left(\frac{L}{2} - l\right) + m_1 g(L-3l);$$

$$m_{2\min}\, g\,(L-l) = Mg\left(\frac{L}{2} - l\right) + m_1 g(L-3l).$$

$$L = \frac{2M + 6m_1 - 2m_{2\min}}{M + 2m_1 - 2m_{2\min}}\, l = 300 \text{ см}.$$

Максимальная возможная масса $m_{2\max}$ достигается при равенстве нулю силы натяжения. Тогда со стороны второго груза на балку будет действовать сила реакции опоры равная:
$N = m_{2\max}g$.
Запишем правило моментов относительно оси проходящей через точку крепления вращающегося шарнира:

$$Nl = Mg\left(\frac{L}{2} - l\right) + m_1 g(L-3l);$$

$$m_{2\max}\, g\, l = Mg\left(\frac{L}{2} - l\right) + m_1 g(L-3l)$$

$$m_{2\max} = \frac{Mg\left(\frac{L}{2} - l\right) + m_1 g(L-3l)}{gl} = 30{,}8 \text{ кг}.$$

Критерии оценивания

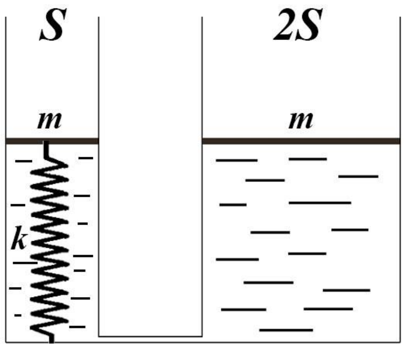
№	Критерий	Балл
1	Верно записано условие минимальности массы m_2	1
2	Верно записано правило моментов относительно оси шарнира или аналогичное верное	2
3	Правильно вычислена длина балки	2

4	Верно записано условие максимальности массы m_2	1
5	Верно записано правило моментов относительно оси шарнира для второго случая или аналогичное верное	2
6	Правильно вычислена максимальная масса второго груза	2

Примечание для жюри
Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

3. **Поршень на пружине (Евсеев А.)**

Два открытых цилиндрических сосуда с площадями сечений S и $2S$ соединены в нижней части тонкой трубкой. Сосуды частично заполнены несжимаемой жидкостью с плотностью ρ. Жидкости накрыты тонкими массивными поршнями массой m. Поршень в узком сосуде соединен со дном пружиной жесткостью k. При этом поршни находятся на одном уровне.



1. Сжата или растянута пружина?
2. Какова деформация пружины?
3. На поршень широкого сосуда кладут груз массой $2m$. На сколько он опустится относительно первоначального положения?

Возможное решение

Пусть в начале деформация пружины Δx. Условие равенства давлений на уровне поршней:

$$\frac{mg + k\Delta x}{S} = \frac{mg}{2S}$$

Откуда:

$$\Delta x = -\frac{mg}{2k}$$

Знак минус говорит о том, что пружина сжата.

Пусть после размещения груза на широком поршне, поршень опускается на Δh. Тогда, в связи с несжимаемостью жидкости, узкий поршень должен подняться на $2\Delta h$. Для давления под широким поршнем имеем:

$$\frac{3mg}{2S} = \frac{mg + k(\Delta x + 2\Delta h)}{S} + 3\rho g\Delta h$$

Тогда:

$$\Delta h = \frac{mg}{2k + 3\rho gS}$$

Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1	Верно записан закон о сообщающихся сосудах для начальной ситуации. Уровень, на котором он записан, значения не имеет	3
2	Указано, что пружина сжата	1
3	Найден модуль деформации пружины $\frac{mg}{2k}$	1
4	Верно определено отношение смещений поршней через свойство несжимаемости жидкости	1
5	Верно записан закон о сообщающихся сосудах для ситуации с грузом на широком поршне. Уровень, на котором он записан, значения не имеет	3
6	Получен верный ответ для Δh	1

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

4. Завернули (Зотова А.)

Медную ленту длиной L, шириной $10^{-2} \cdot L$ и толщиной $10^{-4} \cdot L$ подключают за концы к источнику постоянного тока I_1. Сопротивление между концами ленты – R. В результате лента нагрелась от комнатной температуры T_0 до температуры T за время t.

1) Определите КПД такого нагревателя, если удельная теплоемкость меди – c, а плотность - ρ.

Спустя достаточно большое время лента нагрелась до установившейся температуры T_1. Затем ленту отключили от источника и свернули в плотный цилиндрический рулон.

2) Какой ток I_2 необходимо пропускать через ленту в свернутом состоянии, чтобы её установившаяся температура стала T_1?

Лента по всей площади покрыта очень тонким слоем изолятора, что позволяет безопасно подключить источник тока к концам ленты даже в свернутом состоянии. Изоляция не влияет на теплоемкость и плотность материала.

Мощность тепловых потерь пропорциональна площади поверхности тела и разности температур. Комнатная температура не менялась в процессе манипуляций с лентой.

Возможное решение

Первый вопрос

1.1 Мощность электрического тока: $I_1^2 \cdot R = P_{\text{нагрев}}$

1.2 Работа, совершенная током: $P_{\text{нагрев}} \cdot t = Q_{\text{затраченное}}$

1.3 На нагрев стержня необходимо количество теплоты $Q = c \cdot m \cdot (T - T_0) = c \cdot \rho \cdot 10^{-6} L^3 \cdot (T - T_0)$

1.4 КПД $\eta = \frac{Q}{Q_{\text{затраченное}}} = \frac{10^{-6} c\rho L^3 (T - T_0)}{I_1^2 R t}$

Второй вопрос

2.1 Мощность тепловых потерь пропорциональна разности температур и площади, поэтому её можно записать следующим образом $P_{\text{потерь}} = \alpha \cdot (T_1 - T_0) \cdot S$.

2.2 Если температура установилась, то $P_{\text{нагрев}} = P_{\text{потерь}}$

2.3 Для первого случая: $I_1^2 R = \alpha (T_1 - T_0) S_1$

Для второго: $I_2^2 R = \alpha (T_1 - T_0) S_2$

2.4 Отсюда: $I_2 = I_1 \sqrt{S_2 / S_1}$

2.5 Площадь поверхности в первом случае:

$$S_1 = 2 \cdot (10^{-2} L^2 + 10^{-4} L^2 + 10^{-6} L^2) \approx 2 \cdot 10^{-2} L^2$$

2.6 При сворачивании ленты в цилиндр сохраняется объем материала, отсюда можно найти радиус цилиндра $\pi r^2 \cdot 10^{-2} L = 10^{-4} L \cdot L \cdot 10^{-2} L$, поэтому $r = 10^{-2} L / \sqrt{\pi}$

2.7 Площадь поверхности цилиндра $S_2 = 2\pi r \cdot 10^{-2} L + 2\pi r^2 = 2 \cdot 10^{-4} L^2 (1 + \sqrt{\pi})$

2.8 Ответ: $I_2 = 0{,}1 I_1 \sqrt{1 + \sqrt{\pi}}$

Критерии оценивания

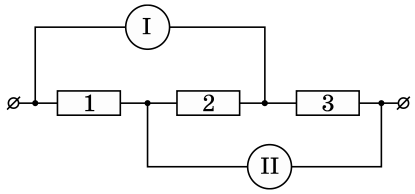
№	**Критерий**	**Балл**
1	В решении используется формула для мощности (или количества теплоты) электрического тока	1
2	Количество теплоты, необходимое на нагрев ленты	1
3	Вычислен КПД	1
4	Записано условия установившейся температуры	1

5	Связь электрической мощности и мощности тепловых потерь для первого случая	1
6	Получена связь силы тока I_2 с площадью поверхности	1
7	Площадь поверхности в первом случае	1
8	Вычислен радиус цилиндра	1
9	Площадь поверхности цилиндра	1
10	Найдена сила тока I_2	1

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

5. Полиморфизм (Сеитов А.)



На схему, показанную на рисунке, подано напряжение $U_0 = 24$ В. Сопротивления одинаковых резисторов 1, 2 и 3 $R = 120$ Ом у каждого. Приборы I и II идеальные. Определите показания приборов, если:

1) оба прибора вольтметры;
2) оба прибора амперметры;
3) один из приборов вольтметр, а другой – амперметр.

Возможное решение

1) Через идеальные вольтметры ток не течёт, в схеме три резистора, которые соединены последовательно. Тогда ток в цепи:

$$I = \frac{U_0}{3R}.$$

Каждый из вольтметров подключен к участку с двумя резисторами, соединёнными последовательно. Тогда показания вольтметров одинаковые и равны:

$$U_{\text{I}} = U_{\text{II}} = I \cdot 2R = \frac{2}{3}U_0 = 16 \text{ В}.$$

2) Сопротивления идеальных амперметров равно нулю. Заменим амперметры перемычками и преобразуем схему. Получим параллельное соединение трёх резисторов. Тогда ток в каждом резисторе:

$$I = \frac{U_0}{R}.$$

Вернёмся к исходной схеме и расставим в ней токи, текущие через резисторы. Токи через амперметры одинаковые и равны удвоенному току в одном резисторе:

$$I_{\text{I}} = I_{\text{II}} = 2I = \frac{2U_0}{R} = 0{,}4 \text{ А}.$$

3) Рассмотрим первый случай: первый прибор – амперметр, второй – вольтметр. Т.к. амперметр идеальный, ток через первый и второй резистор не течёт и сопротивление цепи равно сопротивлению третьего резистора. Тогда ток в нём, он же и ток в амперметре, равен:

$$I_{\text{A}} = \frac{U_0}{R} = 0{,}2 \text{ А}.$$

Показание вольтметра :

$$U_{\text{V}} = I_{\text{A}} \cdot R_3 = U_0 = 24 \text{ В}.$$

Второй случай (первый прибор – вольтметр, второй – амперметр) аналогично приводит к тем же ответам.

Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1	Найдена сила тока в первом случае	1
2	Найдены показания вольтметров в первом случае	2
3	Найдена сила тока во втором случае	2
4	Найдены показания амперметров во второмслучае	2
5	Найдены показания амперметра в третьем случае	1
6	Найдены показания вольтметра в третьем случае	1
7	Указано, что при изменении мест подключения приборов, их показания не изменятся	1

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

1. На речке (Еськин М.)
От пристани A, находящейся на одном берегу прямой реки шириной $h = 600$ м, отправляется моторная лодка. Лодка относительно воды идёт с постоянной скоростью $u = 5$ м/с и выдерживает курс, строго перпендикулярный берегу. На противоположном берегу прямо напротив пристани A расположена пристань B. Скорость течения реки постоянна, направлена вдоль берега и равна v =2,5 м/с. Одновременно из пункта B вдоль берега, против течения, отправляется катер. Катер движется с постоянной скоростью w =5 м/с относительно берега.

1. Найдите, под каким углом α к линии AB в действительности движется моторная лодка.
2. Чему равно минимальное расстояние $L_{\min}$ между катером и лодкой?
3. Определите, через какое время t после начала движения катер и лодка окажутся на минимальном расстоянии друг от друга.

Возможное решение
1.
Лодка движется вдоль вектора результирующей скорости самой лодки и скорости воды в реке. Поэтому угол α можем определить из треугольника скоростей как:

$$\operatorname{tg} \alpha = v/u. \qquad (1)$$

Откуда угол α = arctg 0.5 = 26, 6°
2.
Метод 1
Для определения минимального расстояния перейдем в систему отсчета катера. Тогда катер в данной системе отсчета покоится, а лодка движется равномерно и прямолинейно. Минимальное расстояния между ними будет достигаться в момент, когда прямая соединяющая катер и лодку будет перпендикулярна прямой, вдоль которой движется лодка. Получается прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна h, катет равен $L_{\min}$, а угол противолежащий этому катеnе назовем β. Угол β определяется аналогично первому пункту, только в этот раз появится дополнительное слагаемое скорость катера:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v+w}{u}, \quad (2)$$

а минимальную длину найдем из прямоугольного треугольника:

$$\sin \beta = L_{min}/h$$

откуда получается ответ:

$$L_{min} = h \sin(\operatorname{arctg}(\frac{v + w}{u})) = 499 \text{ м}$$

Метод 2
Альтернативный способ решения этого пункта через координаты:
расстояние по оси x и y между катером и лодкой:

$$x = (v + w)t$$
$$y = h - ut$$

Тогда расстояние L между лодкой и катером по теореме Пифагора:

$$L^2 = x^2 + y^2 = (v + w)^2 t^2 + (h - ut)^2$$

Это квадратное уравнение относительно времени. Минимум L достигается когда дискриминант равен нулю.

$$((v+w)^2 + u^2)t^2 - 2hut + h^2 - L^2 = 0$$
$$D = 4(hu)^2 - 4((v+w)^2 + u^2)(h^2 - L^2) = 0$$

$$L = h\sqrt{1 - \frac{u^2}{(v+w)^2 + u^2}} = 499\ \text{м}.$$

3.

Метод 1

Для определения времени при решении методом 1 предыдущего пункта достаточно найти перемещение s лодки в системе отсчета катера и разделить его на относительную скорость:

$$s = h\cos\beta$$

$$t = \frac{hu}{(v+w)^2 + u^2} = 36{,}9\ \text{с}$$

Метод 2

Для поиска времени достаточно найти решение квадратного уравнения при дискриминанте равном нулю:

$$t = \frac{hu}{(v+w)^2 + u^2} = 36{,}9\ \text{с}$$

Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1.	Идея векторного сложения скоростей	1
2	Формула тангенса угла	1
3	Определен угол α	1
4.1	М1: Идея пересадки в СО катера	1
5.1	М1: Записано tg β	1
6.1	М1: Записано $L_{\min} = h\sin\beta$	1
7.1	М1: Получен ответ $L_{\min} = 499$ м	1
4.2	М2: Записаны координаты $x(t)$, $y(t)$	1
5.2	М2: Получено квадратное уравнение относительно t	1
6.2	М2: Сделано утверждение о минимуме L при $D = 0$	1
7.2	М2: Получен ответ $L_{\min} = 499$ м	1
8.1	М1: Пройденный путь до точки максимального сближения $s = h\cos\beta$	1
9.1	М1: Скорость в СО катера $v_{\text{отн}}$	1
10.1	М1: Ответ $t = 36{,}9$ с	1
8.2	М2: Получено выражение для t	2
9.2	М2: Численный ответ $t = 36{,}9$ с	1

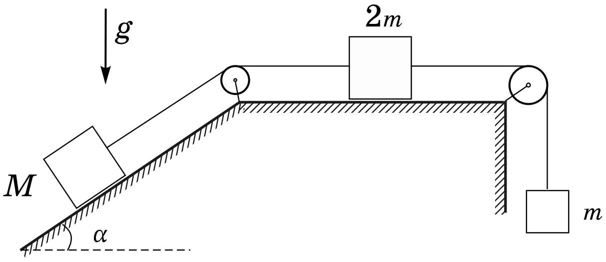
Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

В рамках ответа на один вопрос можно оценивать только по одному методу (либо М1 (метод 1), либо М2 (метод 2)).

2. Три бруска (Киреев А.)

Система, представленная на рисунке, состоит из трёх брусков массами $m = 1$ кг, $2m$ и M, связанных лёгкими нерастяжимыми нитями, перекинутыми через неподвижные лёгкие блоки. Известно, что нити натянуты и брусок массой $2m$ движется влево с ускорением $a_1 = 2{,}5$ м/с^2. Поверхность, вдоль которой движутся бруски, гладкая и состоит из трёх участков – вертикального, горизонтального и участка, наклонённого к горизонту под углом α. Трением в оси блоков можно пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Определите:

1) силу натяжения T_1 правой нити;

2) силу натяжения T_2 левой нити.

Если бруски массами M и m поменять местами, то брусок массой $2m$ будет двигаться вправо с ускорением $a_2 = 6{,}5$ м/с^2.

Найдите:

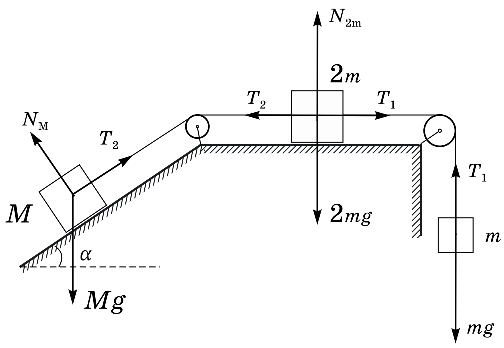
3) массу бруска M;

4) угол α.

Возможное решение

С учётом того, что нити и блоки лёгкие, сила натяжений вдоль них будет постоянна. А так как нити нерастяжимы, то при движении модули ускорений брусков будут одинаковы.

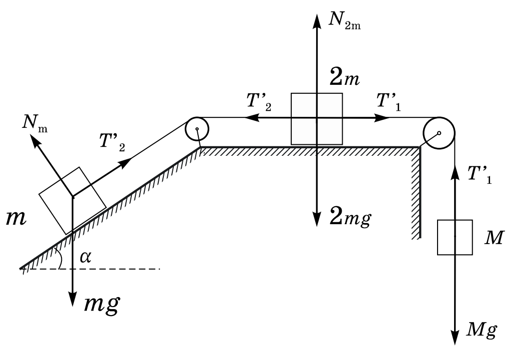
Расставим силы, действующие на бруски (см. рисунок). Согласно второму закону Ньютона для каждого из них:



$$\begin{cases} Mg\sin\alpha - T_2 = Ma_1; & (1) \\ T_2 - T_1 = 2ma_1; & (2) \\ T_1 - mg = ma_1. & (3) \end{cases}$$

Откуда находим $T_1 = m(g + a_1) = 12{,}5$ Н и $T_2 = m(g + 3a_1) = 17{,}5$ Н.

Рассмотрим случай, когда бруски массами M и m поменяли местами. Расставим силы на бруски (см. рисунок). Согласно второму закону Ньютона для каждого из них:



$$\begin{cases} T_2' - mg\sin\alpha = ma_2; & (4) \\ T_1' - T_2' = 2ma_2; & (5) \\ Mg - T_1' = Ma_2. & (6) \end{cases}$$

Сложим уравнения (1), (2) и (3):

$$Mg\sin\alpha - mg = (M + 3m)a_1 \qquad (7)$$

Сложим уравнения (4), (5) и (6):

$Mg - mg\sin\alpha = (M + 3m)a_2$ (8)

Из уравнений (7) и (8) приходим к квадратному уравнению относительно $\sin\alpha$:
$g\sin^2\alpha + (3a_2 - a_1)\sin\alpha + (a_2 - 3a_1 - g) = 0$ или $10\sin^2\alpha + 17\sin\alpha - 11 = 0.$
Данное уравнение имеет корни 0,5 и 2,2. Подходит только корень $\sin\alpha = 0{,}5$ или $\alpha = 30°$.

Аналогично из уравнений (7) и (8) можно получить квадратное уравнение относительно M: $(g - a_2)M^2 - (3a_2 + a_1)mM - (3a_1 + g)m^2 = 0$ или $7M^2 - 44mM - 35m^2 = 0$. Данное уравнение имеет корни $7m$ и $-5m/7$, из которых подходит только $M = 7m = 7$ кг.

Критерии оценивания

№	**Критерий**	**Балл**
1	Записано соотношение $Mg\sin\alpha - T_2 = Ma_1$ или эквивалентное	1
2	Записано соотношение $T_2 - T_1 = 2ma_1$ или эквивалентное	0,5
3	Записано соотношение $T_1 - mg = ma_1$ или эквивалентное	0,5
4	Записано соотношение $T_2' - mg\sin\alpha = ma_2$ или эквивалентное	1
5	Записано соотношение $T_1' - T_2' = 2ma_2$ или эквивалентное	0,5
6	Записано соотношение $Mg - T_1' = Ma_2$ или эквивалентное	0,5
7	Получен ответ $T_1 = 12{,}5$ Н	1
8	Получен ответ $T_2 = 17{,}5$ Н	1
9	Получено квадратное уравнение относительно $\sin\alpha$ или M	1
10	Выбран правильный корень полученного квадратного уравнения	1
11	Получен ответ $M = 7$ кг	1
12	Получен ответ $\alpha = 30°$	1

Примечание для жюри
Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

3. **Горе от ума (Сушков З.)**

Два длинных стержня жестко соединены концами под прямым углом. На каждый стержень надето по одному кольцу, которые могут свободно перемещаться вдоль стержней. К кольцам прикреплена пружина жёсткостью $k = 10$ Н/м, соединяющая кольца между собой. В момент $t = 0$ кольца находятся в точке соединения стержней; затем их начинают двигать вдоль стержней в противоположные стороны с постоянными скоростями v_1 и v_2. Известно, что модули скоростей относятся как $v_1 : v_2 = 3 : 4$.

Через $t_1 = 6$ с после начала движения модуль силы упругости пружины равен $F_1 = 30$ Н, а через $t_2 = 14$ с модуль силы упругости равен $F_2 = 10$ Н.

Найдите:

1. длину l_0 пружины в недеформированном состоянии;
2. скорость v_1;
3. скорость v_2.

Возможное решение

Пусть одно кольцо движется по одному стержню со скоростью $v_1 = 3v$, а второе — по другому стержню со скоростью $v_2 = 4v$. За время τ первое кольцо смещается на расстояние $y = v_1\tau = 3v\tau$, а второе — на расстояние $x = v_2\tau = 4v\tau$.

Так как стержни расположены перпендикулярно, расстояние между кольцами, то есть длина пружины, определяется по теореме Пифагора:

$$l = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3v\tau)^2 + (4v\tau)^2} = 5v\tau.$$

По закону Гука сила упругости равна

$$F = k\,\Delta l,$$

где $\Delta l = l - l_0$ — изменение длины пружины относительно её недеформированного состояния.

Так как из условия используются модули силы, запишем:

$$|\,F(\tau)\,| = k\,\,|\,l - l_0\,| = k\,\,|\,5v\tau - l_0\,|.$$

Эта функция является кусочно-линейной:

$$|F(\tau)| = \begin{cases} k(l_0 - 5v\tau), & l < l_0 \\ k(5v\tau - l), & l > l_0 \end{cases}$$

Рассмотрим точки, заданные по условию задачи:

$$(\tau_1 = 6\ с,\ F_1 = 30\ \text{Н}), (\tau_2 = 14\ с,\ F_2 = 10\ \text{Н}$$

Из вида функции видно, что возможно два случая:

- обе точки принадлежат левому линейному участку;
- точки лежат на разных линейных участках.

Рассмотрим эти варианты.

1) $|\,F\,| = k(l_0 - 5v\tau)$

Угловой коэффициент прямой на графике равен:

$$k_{\text{угл}} = \frac{10 - 30}{14 - 6} = -\frac{20}{8} = -2{,}5\ \text{Н/с}.$$

Сравнивая с наклоном теоретической зависимости:

$$k_{\text{угл}} = -5kv,$$

получаем $v = 0.05$ м/с.

Тогда скорости колец:

$$v_1 = 3v = 0.15\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$v_2 = 4v = 0.20\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$

Момент, когда пружина была недеформирована, определяется из условия

$$5v\tau = l_0$$

Подставим момент пересечения графика с осью ($|F|$=0), который для данной прямой равен $\tau = 18$ с:

$$l_0 = 5v\tau = 5 \cdot 0.05 \cdot 18 = 4.5\ \text{м}.$$

2) Аналогично рассматривая второй случай, получим:

$$v = \frac{0.10\ \text{м}}{\text{с}},\ v_1 = \frac{0.30\ \text{м}}{\text{с}},\ v_2 = \frac{0.40\ \text{м}}{\text{с}},\ l_0 = 6\ \text{м}.$$

График для первого случая:

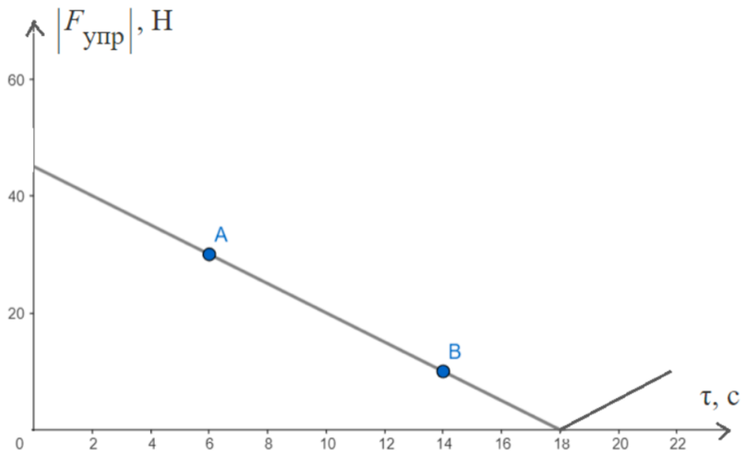
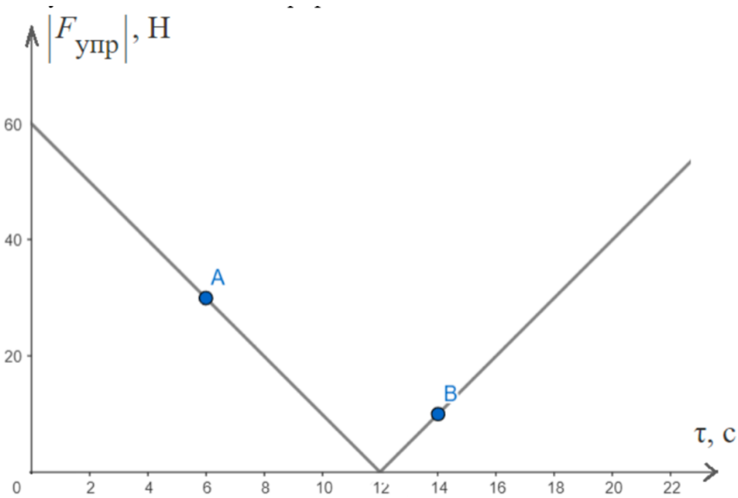


График для второго случая:



Критерии оценивания

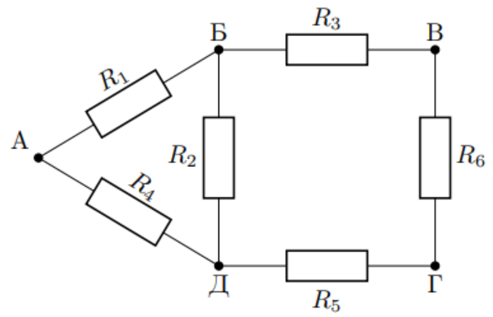
№	Критерий	Балл
1	Получена зависимость $l = 5v\tau$	1
2	Записан закон Гука	1
3	Получена формула $F = k\lvert 5v\tau - l_0\rvert$	1
4	Рассмотрено 2 случая момента отсутствия деформации у пружины	1
5	Верная формула для v_1 и v_2	1
6	Верная формула для l_0	1
7	Получено верное значение v_1 и v_2 для двух случаев	2
8	Получено верное значение l_0 для обоих случаев	2

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

4. Треугольники (Рубцов Д.)

В электрической схеме, изображенной на рисунке, известны два сопротивления резисторов ($R_1 = 6$ Ом и $R_3 = 12$ МОм) и некоторые значения эквивалентных сопротивлений между двумя контактами ($R_{АД} = 8$ Ом, $R_{БД} = 9$ Ом, $R_{ГД} = 5$ МОм, $R_{ВГ} = 9$ МОм). Определите значения сопротивлений $R_2, R_4, R_5, R_6, R_{АБ}, R_{БВ}$. Достаточно получить численные ответы.



Возможное решение

Из правила параллельного соединения резисторов, $R_6 > R_{ВГ}$ и $R_5 > R_{ГД}$, то есть резисторы R_6, R_5, R_3 имеют сопротивления порядка нескольких мегаом. Это значительно больше, чем сопротивление резистора $R_1 = 6$ Ом. То есть относительно R_1 резисторы R_6, R_5, R_3 имеют почти бесконечное сопротивление и их можно рассматривать как разрыв цепи.

Предположим, что $R_2 \gg R_1$. Тогда $R_{БД} = R_1 + R_4$ и $R_4 = R_{БД} - R_1 = 3$ Ом. Тогда $R_{АД} = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} = 2$ Ом $\neq 8$ Ом. Получили противоречие. Аналогично можно доказать, что предположение $R_4 \gg R_1$ неверно. То есть сопротивления R_1, R_2, R_4 сравнимы и составляют порядка нескольких ом.

Рассмотрим треугольник АБД (решаем в Омах):

$$\frac{1}{R_{АД}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_1 + R_2} \leftrightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{6 + R_2}$$

$$\frac{1}{R_{БД}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + R_4} \leftrightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{6 + R_4}$$

Подбором (или честным решением системы уравнений) найдем:

$$R_2 = 18 \text{ Ом}$$
$$R_4 = 12 \text{ Ом}$$

Тогда $R_{АБ} = \frac{(R_2 + R_4) R_1}{R_1 + R_2 + R_4} = 5$ Ом.

Сопротивления R_1, R_2, R_4 гораздо меньше, чем сопротивления R_6, R_5, R_3, так что будем считать их перемычками. Тогда R_6, R_5, R_3 также образуют треугольник В(Б-Д)Г. Нетрудно видеть, что треугольник В(Б-Д)Г отличается от треугольника АБД лишь кратностью сопротивлений в миллион раз. Тогда

$$R_5 = 6 \text{ МОМ}, R_6 = 18 \text{ МОМ}, R_{БВ} = 8 \text{ МОМ}$$

Критерии оценивания

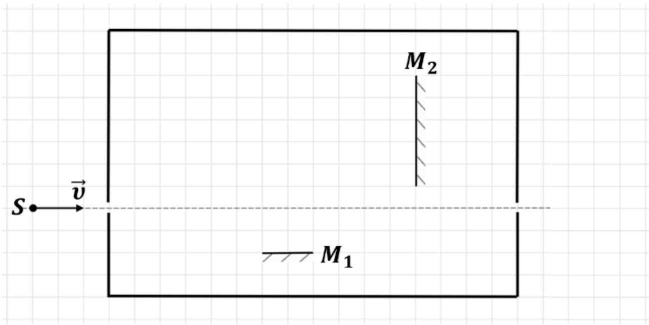
№	**Критерий**	**Балл**
1	Доказано, что резисторы R_6, R_5, R_3 имеют сопротивления порядка нескольких **мегаом**	1
2	Доказано, что сопротивления R_1, R_2, R_4 имеют сопротивления порядка нескольких **Ом**	2

3	Записана система уравнений для нахождения сопротивлений в каждом из треугольников (либо в одном треугольнике, но замечена аналогия двух треугольников)	3
4	Найдены R_2, R_4, R_5, R_6	4 (по 0.5 балла)
5	Найдены $R_{АБ}, R_{БВ}$	2 (по 1 баллу)

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

5. Чёрная коробка(Сеитов А.)



Точечный источник света S движется равномерно и прямолинейно со скоростью 5 см/с вдоль оси, показанной на рисунке пунктиром. Ось проходит через два небольших отверстия в коробке с чёрными стенками. Размер коробки вдоль оси 80 см (рисунок выполнен в масштабе: 1 клетка – 5 см). В коробке закреплены два плоских зеркала M_1 и M_2.

1) В течение какого времени в зеркалах можно наблюдать только одно изображение источника света?

2) В течение какого времени в зеркалах можно наблюдать два изображения источника света?

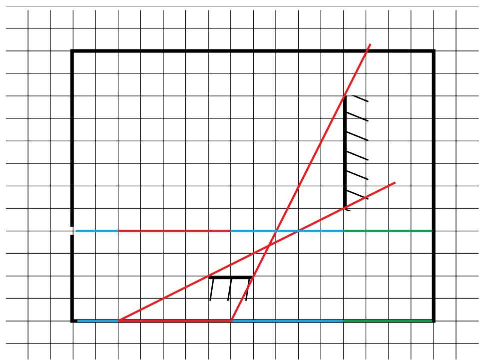
3) В течение какого времени в зеркалах можно наблюдать три изображения источника света?

4) В течение какого времени в зеркалах можно наблюдать четыре изображения источника света?

5) Покажите построением на рисунке область, из которой будут видны все изображения источника света через 4 с от момента прохождения источником света первого (левого) отверстия.

Возможное решение

До момента попадания точечного источника света внутрь коробки изображений в зеркалах нет.



Одно изображение (в зеркале M_1) можно наблюдать только после ухода источника света за зеркало M_2. На рисунке соответствующий участок траектории промаркирован зелёным цветом.

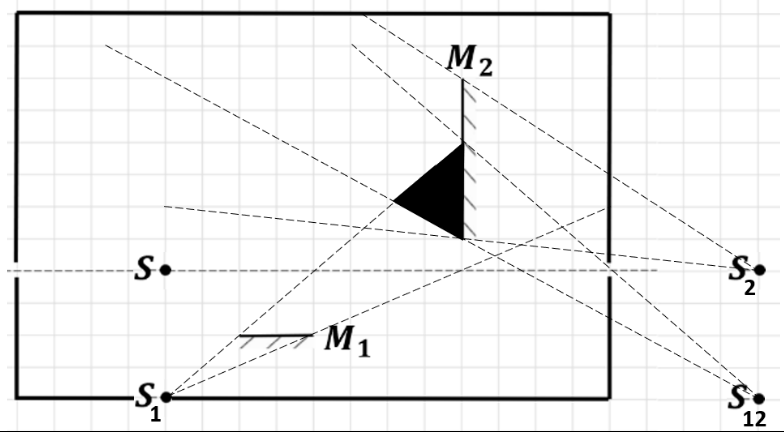
Два изображения источника (одно в М1 и одно в М2) будут наблюдаться при движении по участкам траектории промаркированным синим цветом. В этом случае лучи от изображения, получаемого в М1 не могут попасть на М2, и соответственно дать третье изображение.

Область траектории, при движении по которой будет получаться три изображения промаркирована красным цветом. Изображение источника получаемое в М1 будет создавать вторичное изображение в М2.

Используя указанный в условии масштаб получим времена:

1. t_1 = 4 с;
2. t_2 = 7 с;
3. t_3 = 5 с;
4. t_4 = 0 с.

Критерии оценивания

№	**Критерий**	**Балл**
1	Указано, что одно изображение в зеркале M_1 после ухода источника света за зеркало M_2	1 балл
	4 с	1 балл
2	7 с	2 балла
3	5 с	2 балла
4	0 с	2 балла
5		2 балла

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

1. Диффузия (Вергунов А.)

Тонкая пробирка длиной L частично заполнена водой и расположена вертикально (открытым концом вверх) в камере большого объема. Воздух в камере поддерживается при нулевой относительной влажности и постоянном давлении p_0. Вследствие диффузии в пробирке устанавливается линейное изменение концентрации водяного пара с высотой: вблизи поверхности воды пар оказывается насыщенным, при этом $p_н = 0{,}8p_0$, а у верхнего открытого конца пробирки его концентрация в 2 раза меньше. Пробирку сверху закрывают поршнем массой $m = p_0S/g$, который может свободно перемещаться внутри пробирки. Определите, на какой высоте H (от нижнего конца пробирки) будет находиться поршень после установления равновесия. Изменением уровня жидкости в пробирке и ее начальным объемом пренебречь. Температура в камере и пробирке постоянна.

Возможное решение

По условию давление пара $p_п$ зависит от высоты, введём парциальное давление сухого воздуха $p_в$, и так как на любой высоте $h < L$ суммарное давление воздуха с паром должно равняться p_0:

$p_0 = p_п(h) + p_в(h)$.

Так как давление пара с высотой изменяется линейно, можем найти его среднее значение:

$p_{пср} = (p_н + 0{,}5p_н)/2 = 0{,}75p_н = 0{,}6p_0$.

Тогда среднее давление сухого воздуха в пробирке:

$p_{вср} = p_0 – 0{,}6p_0 = 0{,}4p_0$.

После того, как пробирку закроют поршнем, парциальное давление пара становится одинаковым по всей высоте под поршнем и равным $p_н$.

Поршень уравновешивается, когда:

$$p_{внутри} = p_0 + mg/S$$

А по условию:

$$m = \frac{p_0S}{g} \Rightarrow \frac{mg}{S} = p_0$$

Т.е.:

$$p_{внутри}=2p_0$$

$$2p_0 = p_н + p_{в2},$$

где $p_{в2}$ – парциальное давление сухого воздуха в пробирке после установления равновесия.

$$p_{в2} = 2p_0 – p_н = 1{,}2p_0$$

Так как после закрытия поршнем количество сухого воздуха не изменяется,

$$p_{в2}H = p_{вср}L.$$

Тогда:

$$H = L/3.$$

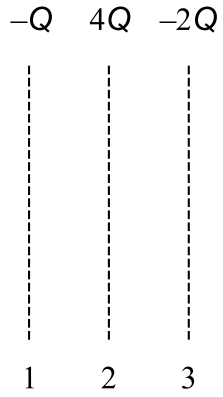
Критерии оценивания

№	**Критерий**	**Балл**
1.	Запись исходного соотношения для давления в открытой пробирке: $p_0 = p_п(h) + p_в(h)$	1
2	Правильное определение значения парциального давления пара у верхнего конца пробирки в начальный момент	1
3	Корректное усреднение и нахождение $p_{вср}$	2
4	Указано, что после установления равновесия в закрытой пробирке пар будет насыщенным	1
5	Найдено новое давление смеси газов $p_{внутри}$ в пробирке	2

6	Найдено новое парциальное давление $p_{в2}$ сухого воздуха в пробирке	2
7	Верно найдена высота, на которой остановится поршень: $H = L/3$	1

Примечание для жюри
Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

2. Эффект Казимира (Зайцев Р.)



Три протяженные тонкие металлические сетки 1, 2 и 3, имеющие заряды $q_1 = -Q$, $q_2 = 4Q$ и $q_3 = -2Q$ ($Q > 0$) соответственно, расположены параллельно на равных расстояниях $d_{12} = d_{23} = d$ друг от друга (см. рис.). Площадь каждой из сеток равна S (расстояние $d \ll \sqrt{S}$).

1) Найдите модуль электрической силы, действующей на среднюю сетку со стороны двух других.
2) Найдите разность потенциалов между первой и второй сетками.
3) Если от первой сетки отделится без начальной скорости электрон, то на какое минимальное расстояние он приблизится к третьей сетке?
4) Найдите модуль электрической силы, действующей на среднюю сетку со стороны двух других при тех же условиях, но $d \gg \sqrt{S}$.
5) Получите формулу для модуля силы взаимного притяжения, действующей на единицу площади двух параллельных **незаряженных** сеток 1 и 2 (без третьей сетки) при расстоянии $d \sim 0{,}1$ мкм по эффекту Казимира (квантовые флуктуации вакуума), если модуль силы Казимира, действующей на единицу площади одной сетки со стороны другой, имеет вид $F/S = \alpha \cdot h^x \cdot c^y \cdot d^z$, где $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме, α – некоторая безразмерная постоянная, x, y и z – целые числа, которые вам нужно найти.

Возможное решение.

1) Согласно принципу суперпозиции, модуль напряжённости поля, созданного сетками 1 и 3 в области между ними, равен:

$$E_{13} = E_3 - E_1 = \frac{2Q - Q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}.$$

Тогда, из определения напряжённости:

$$F = 4QE_{13} = \frac{2Q^2}{\varepsilon_0 S}.$$

2) Согласно принципу суперпозиции, модуль напряжённости поля (от всех трех зарядов) между сетками 1 и 2 равен:

$$E_{12} = E_2 + E_1 - E_3 = \frac{3Q}{2\varepsilon_0 S}.$$

Тогда разность потенциалов между первой и второй сетками:

$$U_{12} = -E_{12} d = -\frac{3Qd}{2\varepsilon_0 S}.$$

Знак минус показывает, что потенциал сетки 1 меньше потенциала сетки 2.

3) Работа поля 12 по разгону электрона компенсируется работой поля 23 по остановке электрона на некотором расстоянии от третьей сетки:

$$qU_{12} = -qU_{2X}.$$

Т.к. поле однородно:

$\frac{U_{2X}}{U_{23}} = \frac{l}{d} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{-U_{12}}{U_{23}} d$, где l – расстояние от второй сетки до места остановки электрона.

U_{23} определяется аналогично U_{12}: $U_{23} = E_{23} d = \frac{5Qd}{2\varepsilon_0 S}$.

Тогда искомое расстояние:

$$x = d - l = d\left(1 + \frac{U_{12}}{U_{23}}\right) = 0{,}4d\ .$$

4) При d >> $\sqrt{S}$ сетки можно считать точечными зарядами. Из закона Кулона и принципа суперпозиции: $F = \frac{4Q^2}{d^2\, 4\pi\varepsilon_0}$.

5) Методом анализа размерностей составим равенство:

$\left(\text{кг} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} \cdot \text{с}\right)^x \cdot \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^y \cdot \text{м}^z = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{м}^2\text{с}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{с}^2}$.

Решая систему линейных уравнений, полученных из равенства показателей соответствующих степеней для каждой из единиц измерения (кг, м, с), получим модуль силы притяжения Казимира, действующей на единицу площади незаряженных сеток:
$F/S = \alpha \cdot h^1 \cdot c^1 \cdot d^{-4}$ ($x = 1$, $y = 1$, $z = -4$).

Критерии оценивания

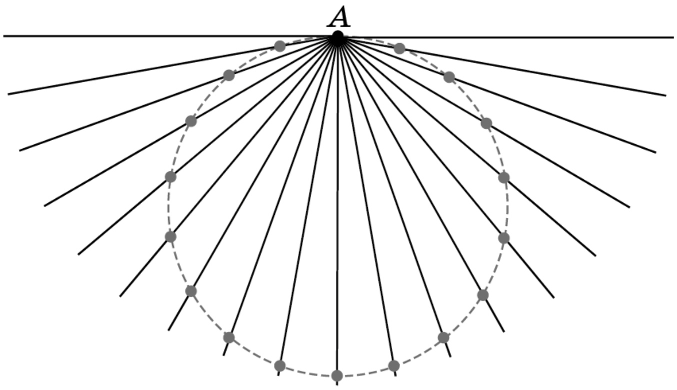
№	Критерий	Баллы
1	Согласно принципу суперпозиции, модуль напряжённости поля, созданного сетками 1 и 3 в области между ними, равен: $E_{13} = E_3 - E_1 = \frac{2Q - Q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$.	1
2	Модуль электрической силы, действующей на среднюю сетку: $F = 4QE_{13} = \frac{2Q^2}{\varepsilon_0 S}$.	1
3	Согласно принципу суперпозиции, модуль напряжённости поля (от всех трех зарядов) между сетками 1 и 2 равен: $E_{12} = E_2 + E_1 - E_3 = \frac{3Q}{2\varepsilon_0 S}$.	1
4	Разность потенциалов между первой и второй сетками: $U_{12} = -E_{12} d = -\frac{3Qd}{2\varepsilon_0 S}$. Знак минус показывает, что потенциал сетки 1 меньше потенциала сетки 2.	1
5	Работа поля 12 по разгону электрона компенсируется работой поля 23 по остановке электрона на некотором расстоянии от третьей сетки: $qU_{12} = -qU_{2X}$.	1
6	Минимальное расстояние электрона от третьей сетки: $x = d\left(1 + \frac{U_{12}}{U_{23}}\right) = 0{,}4d$	1

7	При d >> $\sqrt{S}$: $F = \frac{4Q^2}{d^2\ 4\pi\varepsilon_0}$	**2**
8	Верно составлено равенство $(\text{кг} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} \cdot \text{с})^x \cdot \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^y \cdot \text{м}^z = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{м}^2\text{с}^2}$	**1**
9	Модуль силы Казимира, действующей на единицу площади незаряженных сеток: F/S= $\alpha \cdot h^1 \cdot c^1 \cdot d^{-4}$ (x = 1, y = 1, z = -4)	**1**

Примечание для жюри
Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

3. Бусинки (Рубцов Д.)

Множество спиц, выходящих из одной точки A, расположены в вертикальной плоскости. Из этой точки одновременно отпускают маленькие бусинки. Каждой спице принадлежит одна бусинка. Определите, как должна зависеть начальная скорость бусинок от угла наклона φ спицы к **вертикали**, чтобы через время τ все бусинки оказались на окружности (см. рисунок) диаметра $g\tau^2/2$. Решите задачу для двух случаев:



1. трения нет;
2. коэффициент трения μ.

Возможное решение

В отсутствие трения зависимость ускорения a бусинок от угла φ: $a(\varphi) = g\cos\varphi$, значит, пройденный бусинкой за время τ путь: $l(\varphi) = v_0(\varphi)\tau + \frac{g\cos\varphi\tau^2}{2}$. Так как через время τ все бусинки оказываются на окружности диаметра $g\tau^2/2$, то из геометрии $l(\varphi) = \frac{g\tau^2}{2}\cos\varphi$. Видно, что $v_0(\varphi) = 0$.

Если есть трение, то ускорение $a(\varphi) = g(\cos\varphi - \mu\sin\varphi)$, пройденный путь $l(\varphi) = v_0(\varphi)\tau + \frac{a(\varphi)\tau^2}{2}$ или $l(\varphi) = \frac{g\tau^2}{2}\cos\varphi$. Откуда: (1) $v_0(\varphi) = \frac{g\tau\mu}{2}\sin\varphi$. Заметим, что во время движения бусинка может как ускоряться, так и замедляться – это зависит от соотношения между углом φ и коэффициентом трения μ. Значит, (2) некоторые бусинки могли остановиться, доехав до $l(\varphi) = \frac{g\tau^2}{2}\cos\varphi$. Случай (2) – когда бусинка останавливается как раз в нужном месте. Выражение для конечной скорости $v(\varphi) = g\tau(\cos\varphi - \frac{\mu}{2}\sin\varphi)$, откуда следует ограничение для случая (1): $ctg\,\varphi > \frac{\mu}{2}$. Для $ctg\,\varphi < \frac{\mu}{2}$ бусинка должна остановиться до момента времени τ в нужном месте. Используя формулу тормозного пути $\frac{g\tau^2}{2}\cos\varphi = \frac{v_0^2}{2g(\mu\sin\varphi - \cos\varphi)}$, получим ответ для случая (2): $v_0(\varphi) = g\tau\sqrt{\cos\varphi\,(\mu\sin\varphi - \cos\varphi)}$.

Ответ:

Если спицы гладкие, $v_0(\varphi) = 0$

Если нет, то $v_0(\varphi) = \begin{cases} \frac{g\tau\mu}{2}\sin\varphi\,, \text{при } ctg\,\varphi \geq \frac{\mu}{2} \\ g\tau\sqrt{\cos\varphi\,(\mu\sin\varphi - \cos\varphi)}, \text{при } ctg\,\varphi < \frac{\mu}{2} \end{cases}$

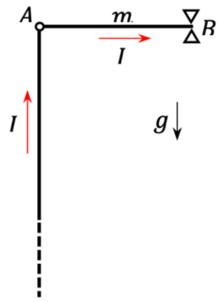
Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1	Записано геометрическое условие: $l(\varphi) = \frac{g\tau^2}{2} cos\ \varphi$ (из диаметра окружности $\frac{g\tau^2}{2}$)	1
2	Для случая без трения записано уравнение движения вдоль спицы: $l(\varphi) = v_0(\varphi)\tau + gcos\ \varphi \cdot \frac{\tau^2}{2}$	1
3	Для случая без трения получено $v_0(\varphi) = 0$	1
4	Для случая с трением записано ускорение вдоль спицы: $a(\varphi) = g(cos\varphi - \mu sin\varphi)$	1
5	Для случая с трением записано уравнение движения: $l(\varphi) = v_0(\varphi)\tau + \frac{a(\varphi)\tau^2}{2}$	1
6	Для режима без остановки ($a(\varphi) > 0$) получено $v_0(\varphi) = \frac{g\tau\mu}{2} \sin\ \varphi$	1
7	Определено граничное условие между режимами: $\text{ctg}\varphi = \frac{\mu}{2}$	1
8	Для режима с остановкой ($a(\varphi) < 0$) записано выражение для тормозного пути: $\frac{g\tau^2}{2}\cos\varphi = \frac{v_0^2}{2g(\mu\sin\varphi - \cos\varphi)}$	1
9	Для режима с остановкой получено $v_0(\varphi) = g\tau\sqrt{\cos\varphi\,(\mu\sin\varphi - \cos\varphi)}$	1
10	Итоговый ответ записан в виде кусочно-заданной функции с указанием промежутков	1

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

4. Жёсткий стержень (Клепиков М.)



Однородный жесткий проводящий стержень состоит из двух частей: первая, вертикальная, полубесконечная и неподвижная, вторая – горизонтальная массой m, один из концов которой свободно вставлен в зазор между опорами (точка B на рисунке). Обе части соединены шарнирно в точке A. По стержню с помощью невесомых гибких проводников пропускается постоянный ток I. Трением в системе пренебречь.

1. Постройте качественный график зависимости проекции силы F_B давления опоры на стержень в точке B от силы тока I. Укажите на графике характерные точки.
2. С каким ускорением a_B начнет двигаться точка B стержня если мгновенно убрать опору, не нарушая условия протекания тока?

Возможное решение

1. Индукция магнитного поля, созданного вертикальной частью проводника, в точках горизонтального проводника направлена от нас и равна по модулю:

$$B = \frac{1}{2}B_\infty = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{x},$$

где x – расстояние от точки A, B_∞ – поле бесконечного прямого проводника с током.
Элементарная сила Ампера, действующая на бесконечно малый участок dx провода AB, направлена вверх и равна по модулю:

$$dF_A = I\cdot B(x)\cdot dx = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I^2}{x}\cdot dx$$

Умножив последнее выражение на x, получим элементарный момент силы Ампера относительно оси вращения, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости рисунка:

$$dM_A = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\cdot dx.$$

Проинтегрировав по всей длине AB, получим

$$M_A = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\cdot l,$$

где l – неизвестная длина части стержня AB.
Уравнение моментов сил относительно выбранной оси:

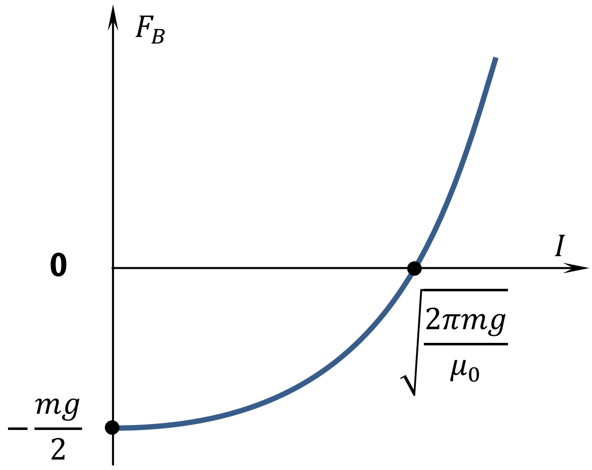
$$M_A - mg\cdot\frac{l}{2} - F_B\cdot l = 0,$$

$$\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\cdot l - mg\cdot\frac{l}{2} - F_B\cdot l = 0,$$

Откуда получим

$$F_B(I) = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} - \frac{mg}{2}.$$

График данной зависимости представляет собой параболу, ветви которой направлены вверх. Вершина параболы находится в точке $(0, -\frac{mg}{2})$, что соответствует случаю отсутствия тока в системе. Точка пересечения графика с осью абсцисс $\left(\sqrt{\frac{2\pi mg}{\mu_0}}, 0\right)$ соответствует силе тока, при которой стержень не взаимодействует с опорой в точке B (сумма моментов силы тяжести и силы Ампера равна нулю).



2. Для нахождения ускорения точки B запишем основное уравнение динамики вращательного движения:

$$\sum \vec{M}_i = \vec{\varepsilon} \cdot J,$$

Где $J = \frac{ml^2}{3}$ – момент инерции стержня относительно его конца.

$$\frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \cdot l - mg \cdot \frac{l}{2} = \frac{ml^2}{3} \cdot \varepsilon.$$

Линейное ускорение точки B в начальный момент времени после удаления опоры:

$$a_B = \varepsilon \cdot l,$$

С учетом этого, получим

$$a_B = \frac{3\mu_0 I^2}{4\pi m} - g \cdot \frac{3}{2}.$$

При положительном значении a_B ускорение точки B направлено вверх, при отрицательном – вниз.

Критерии оценивания

№	**Критерий**	**Балл**
1	Получена зависимость $B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{x}$. Вывод из закона Био-Савара-Лапласа оценивается так же, как и рассуждение через половину поля бесконечного провода.	1
2	Выражение для момента силы Ампера $M_A = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \cdot l$	1
3	Правило моментов $M_A - mg \cdot \frac{l}{2} - F_B \cdot l = 0$	1
4	Получено выражение $F_B(I) = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} - \frac{mg}{2}$	1
5	Построен качественный график • Указано, что график является частью параболы, оси которой направлены вверх • Указаны значения величин в точках пересечения с осями (по 0,5 за каждую)	2

6	Уравнение динамики вращательного движения $\sum \vec{M}_i = \vec{\varepsilon} \cdot J$	1
7	Получен или записан момент инерции стержня относительно оси, проходящей через точку A	1
8	Связь линейного ускорения края стержня с угловым ускорением	1
9	Получено выражение $a_B = \frac{3\mu_0 I^2}{4\pi m} - g \cdot \frac{3}{2}$	1

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

5. Фокус с исчезновением (Жигар А.)

Точечный источник света находится на главной оптической оси тонкой линзы. При смещении источника вдоль оси на расстояние $L = 40$ см в сторону линзы изображение исчезает.

Если из исходного положения сместить источник в перпендикулярном направлении на такое же расстояние L, то поперечное увеличение линзы становится равным 1/3.

1. Какая это линза — собирающая или рассеивающая?
2. На каком расстоянии от линзы находился источник первоначально?
3. Найдите фокусное расстояние линзы.

Возможное решение

1. Изображение исчезает только в случае собирающей линзы, когда источник попадает в фокальную плоскость. У рассеивающей линзы изображение мнимое при любом положении источника. Линза собирающая.

2. При смещении вдоль оси на $L = 40$ см источник оказывается в фокусе. Из того, что изображение исчезает только при $d > F$, следует:

$$d - L = F$$

3. При поперечном смещении на L расстояние до линзы остаётся d. Поперечное увеличение:

$$\Gamma = \frac{f}{d} = \frac{1}{3} \Rightarrow f = \frac{d}{3}$$

Для собирающей линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$$

Подставляем:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{3}{d} = \frac{4}{d} \Rightarrow d = 4F$$

Решая систему уравнений:

$$4F - 40 = F \Rightarrow 3F = 40 \Rightarrow F = \frac{40}{3} \text{ см}$$

$$d = 4F = \frac{160}{3} \text{ см}$$

Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1	Правильное определение типа линзы с обоснованием	1 балл
2	Запись условия для первого перемещения: $d - L = F$	1 балл
3	Обоснование выбора знака ($d > F$)	1 балл
4	Запись условия для поперечного увеличения: $\Gamma=1/3$	1 балл
5	Связь f и d из увеличения: $f = d/3$	1 балл
6	Правильное применение формулы тонкой линзы	1 балл
7	Получение связи $d = 4F$ из формулы линзы	1 балл
8	Составление системы уравнений	1 балл
9	$F = \frac{40}{3}$ см	1 балл
10	$d = \frac{160}{3}$ см	1 балл

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.