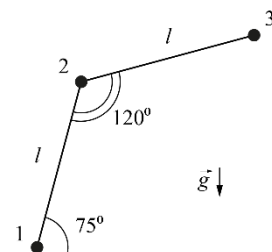


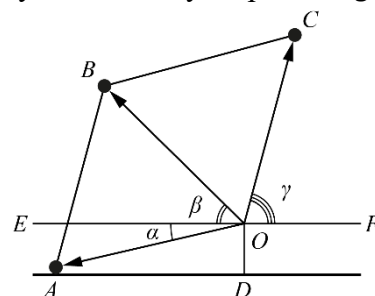
9.1 Три ракеты. Из точки, находящейся на высоте h над поверхностью земли под разными углами к горизонту с одинаковыми скоростями v_0 одновременно разлетаются три осколка фейерверка. Векторы их скоростей лежат в одной вертикальной плоскости. Через время $\tau = 1,0$ с после вылета осколки взрываются. Вспышка первого происходит у самой поверхности земли, вспышка второго – на расстоянии $l = 10$ м от первого, а вспышка третьего – на таком же расстоянии l от второго. Отрезок, соединяющий две первые вспышки, составляет угол 75° с горизонтом, а отрезок, соединяющий вторую и третью вспышку, составляет угол 120° с первым отрезком, как показано на рисунке. Определите:



- начальные скорости v_0 осколков;
- углы с горизонтом, под которыми направлены векторы начальных скоростей каждого из осколков;
- высоту h , на которой разорвался фейерверк.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

9.1. Возможное решение. Перейдём в систему отсчёта, движущуюся вниз с ускорением \vec{g} , скорость которой равна нулю в момент взрыва фейерверка. В этой системе осколки движутся по прямолинейным траекториям, направления которых совпадают с направлениями векторов начальных скоростей (углы α, β и γ на рис. 2). Точки вспышек в этой системе отсчёта (т. A, B и C) лежат на окружности радиусом $R = v_0\tau$, где v_0 – начальная скорость ракет, $\tau = 1$ с.



Точки 1, 2 и 3, в которых происходят вспышки в земной системе отсчёта лежат точно на такой же окружности, но её центр смещён вниз по отношению к вершине холма на $\Delta h = \frac{g\tau^2}{2} = 5$ м.

Треугольники AOB и OBC – равносторонние с радиусом $R = l = 10$ м.

Таким образом, начальная скорость осколков $v_0 = \frac{l}{\tau} = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Из геометрии $\alpha = 15^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 75^\circ$. Направления полёта, соответствующие значениям этих углов указаны на рис 2.

Точка O – центр окружности выше уровня земли на $OD = AO \sin 15^\circ = l \cdot \sin 15^\circ$. Чтобы определить высоту холма надо ещё прибавить $\Delta h = \frac{g\tau^2}{2}$. Окончательно, высота холма

$$h = l \cdot \sin 15^\circ + \frac{g\tau^2}{2} \approx 7,6 \text{ м.}$$

LVI Всероссийская олимпиада школьников по физике. Региональный этап.

Теоретический тур. 22 января 2022 г.

9 класс

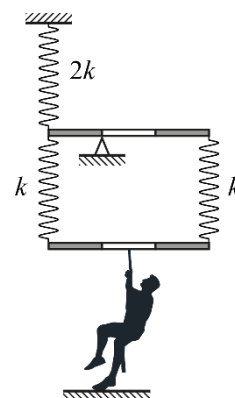
№	9.1. Критерии оценивания (из 12 баллов)	Баллы
1	Идея перехода в систему отсчёта, движущуюся вниз с ускорением \vec{g}	1
2	Указано, что точки вспышки ракет лежат на окружности радиуса $R = v_0\tau$, как в системе отсчёта, связанной с землёй, так и в выбранной системе отсчёта, движущейся с ускорением \vec{g}	2
3	Указано, что центры окружностей смещены на $\Delta h = \frac{g\tau^2}{2}$	2
4	Из геометрии верно определена начальная скорость ракет	2
5	Из геометрии верно определены углы с горизонтом, под которыми направлены векторы скоростей каждой из ракет (по 1 баллу за каждое верное значение угла)	3
6	Определена высота холма	2

9.2 Пружины. Система состоит из трёх лёгких пружин и двух лёгких стержней. Коэффициенты жёсткости пружин указаны на рисунке. Верхний стержень на трети своей длины прикреплен к шарнирной опоре.

• Как изменится (в какую сторону и на сколько) длина верхней пружины, если к середине нижнего стержня приложить внешнюю силу F , направленную вертикально вниз?

• Чему равен коэффициент k_0 – жёсткости системы, если на неё действовать внешней вертикальной силой, приложенной к середине нижнего стержня?

Углы поворота стержней малы. Пружины остаются вертикальными.



9.2. Возможное решение.

1. Так как нижний стержень легкий, а внешняя сила прикладывается к его середине, то силы упругости, действующие на стержень со стороны пружин должны быть равны. Обозначим их за T . Из условия равновесия нижнего стержня, $F = 2T$.

2. Записывая правило моментов для верхнего стержня относительно шарнира, в предположении, что верхняя пружина растянута силой T_1 получим:
 $T_1 l + 2Tl = Tl$, где l – длина одной трети стержня.

Откуда $T_1 = -T$. Это означает, что наше предположение неверно, и верхняя пружина сжимается силой T .

3. Воспользовавшись законом Гука, найдём деформацию верхней пружины: $\Delta x_1 = F/(4k)$.

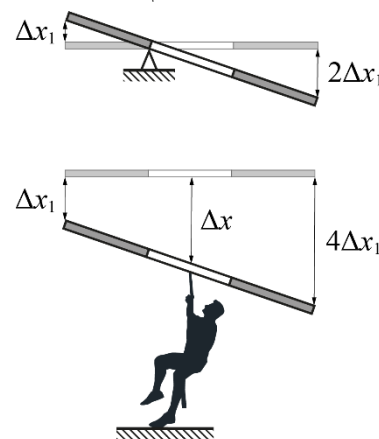
4. Абсолютные удлинения нижних пружин одинаковы и равны $\Delta x_2 = F/(2k) = 2\Delta x_1$.

5. Найдём кинематическую связь между деформациями пружин и смещением Δx точки приложения силы F .

Так как верхний стержень жёсткий, то его правый конец сместится вниз на $2\Delta x_1$. Но деформации нижних пружин тоже $2\Delta x_1$, следовательно, нижний конец правой пружины опустится на $4\Delta x_1$. Нижний стержень, останется параллельным верхнему, и нижний конец левой пружины сместится вниз на Δx_1 .

Из жёсткости нижнего стержня следует, что его середина опустится на $\Delta x = (5/2)\Delta x_1$.

6. Запишем закон Гука для всей системы: $F = k_0(5/2)\Delta x_1$, откуда $k_0 = (2/5)F/\Delta x_1 = (8/5)k$.



№	9.2. Критерии оценивания (из 12 баллов)	Баллы
1	Учтено и обосновано равенство сил упругости нижних пружин	2
2	Использована связь сил упругости нижних пружин и силы F	1
3	Записано правило моментов для верхнего стержня	1
4	Найдена величина и направление деформации верхней пружины	2
5	Учтена жёсткость верхнего стержня и найдена связь смещений его концов	1
6	Найдены смещения концов нижнего стержня	1
7	Найдено смещение точки приложения силы F	2
8	Учтён закон Гука для всей системы	1
9	Найдена эквивалентная жёсткость системы	1

9.3 Сосуды с водой. В трёх сосудах находится вода массой m , $2m$ и $4m$ при температуре $t = 20^\circ\text{C}$, $3t$ и $2t$ соответственно. Порцию воды из первого сосуда переливают во второй. Затем такую же по массе порцию из второго сосуда переливают в третий. И в завершение, такую же порцию из третьего сосуда переливают в первый. В результате в первом сосуде устанавливается равновесная температура $t_1 = 28^\circ\text{C}$, а во втором – $t_2 = 54^\circ\text{C}$. Определите новую температуру t_3 в третьем сосуде. Тепловыми потерями и теплоёмкостью сосудов можно пренебречь.

9.3. Возможное решение. Так как переливается одна и та же масса воды, в итоге во всех сосудах оказывается такое же её количество, как и до начала процесса. Поэтому целесообразно применить уравнение теплового баланса не к каждому отдельному процессу переливания, а сразу к конечному состоянию системы. По условию вода в первом сосуде получает количество теплоты:

$$Q_1 = cm(t_1 - t),$$

а во втором и третьем соответственно:

$$Q_2 = c2m(t_1 - 3t) \text{ и } Q_3 = c4m(t_1 - 2t).$$

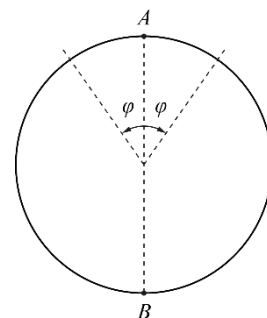
Поскольку потерь тепла не было, уравнение теплового баланса имеет вид:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \text{ или } cm(t_1 - t) + c2m(t_1 - 3t) + c4m(t_1 - 2t) = 0.$$

Решая уравнение, получим: $t_3 = (15t - t_1 - 2t_2) = 41^\circ\text{C}$.

№	9.3. Критерии оценивания (из 12 баллов)	Баллы
1	Указано на то, что масса воды в каждом из сосудов не изменится	1
2	Получено выражение для количества теплоты, которое получит вода в первом сосуде	2
3	Получено выражение для количества теплоты, которое получит вода во втором сосуде	2
4	Получено выражение для количества теплоты, которое получит вода в третьем сосуде	2
5	Указано на то, что $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$ (1 балл) и, что $cm(t_1 - t) + c2m(t_1 - 3t) + c4m(t_1 - 2t) = 0$ (ещё 2 балла)	3
6	Найдена температура t_3	2

9.4 Кольцо. Кольцо радиусом r сделано из проволоки, удельное сопротивление ρ которой увеличивается от точки A до точки B по линейному закону $\rho = \alpha\varphi$, где α – известная постоянная, φ – угол, отсчитываемый от точки A по (или против) часовой стрелки, как показано на рисунке.



- Определите сопротивление R_0 всей проволоки, из которой изготовлено кольцо.

- Найдите на кольце две точки M и N между которыми эквивалентное сопротивление R_{MN} кольца максимально при минимальном расстоянии между M и N . Определите значение этого сопротивления R_{\max} и расстояние L между M и N .

Площадь S сечения проволоки известна и постоянна вдоль всего кольца.

9.4. Возможное решение.

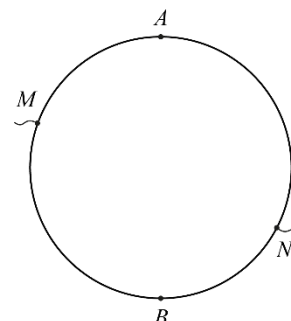
1. Сопротивление всей проволоки R_0 не зависит от того, в какой именно точке мы её разрежем (все элементарные участки проволоки соединены друг с другом последовательно). Для упрощения разрежем кольцо в точке A , чтобы сначала найти сопротивления $R_0/2$ его двух симметричных половинок, а затем их сложить.

Поскольку удельное сопротивление проволоки изменяется по линейному закону (от угла φ или от расстояния l от точки A), для вычисления её сопротивления воспользуемся средним значением удельного сопротивления $\rho_{\text{ср}} = \alpha\pi/2$. Откуда $R_0/2 = \rho_{\text{ср}}\pi r/S = \alpha\pi^2 r/(2S)$, или

$$R_0 = \alpha\pi^2 r/S. \quad (1)$$

2. Подключим контакты к некоторым точкам M и N кольца. Получившаяся цепь теперь состоит из двух участков – MAN и MBN , соединённых параллельно, и её сопротивление R_{MN} определяется соотношением:

$$R_{MN} = \frac{R_{MAN}R_{MBN}}{R_{MAN}+R_{MBN}} \quad (2),$$



где R_{MAN} и R_{MBN} – сопротивления соответствующих участков, причём знаменатель этой формулы не зависит от того, в каких точках мы подключаемся к кольцу, и равен сопротивлению R_0 всей проволоки. Формулу (2) можно представить в виде:

$$R_{MN} = \frac{R_{MAN}(R_0 - R_{MAN})}{R_0}.$$

Сопротивление кольца между этими точками R_{MN} как функция величины R_{MAN} представляет собой параболу с ветвями, направленными вниз, и достигает максимума при $R_{MAN} = R_0/2$. Следовательно, сопротивление кольца максимально при $R_{MAN} = R_{MBN} = R_0/2$ и $R_{\max} = R_0/4 = \alpha\pi^2 r/(4S)$.

3. Разделить всю проволоку кольца на два участка с равными сопротивлениями можно бесконечным количеством способов. Например, присоединив контакты к точкам A и B мы получим тот же самый результат для R_{\max} . Но, по условию, расстояние между точками M и N должно быть минимальным. Для этого на малую дугу между точками M и N должна приходиться проволока с максимально возможным удельным сопротивлением. Это означает, что точки M и N должны располагаться симметрично относительно точки B .

И сопротивление малых дуг MB и BN должно быть равно $R_0/4$. Пусть положение точек M и N определяется углом φ_0 (см. рисунок). Тогда среднее удельное сопротивление участка BN по малой дуге равно $\rho_0 = \alpha(\pi + \varphi_0)/2$, а его сопротивление

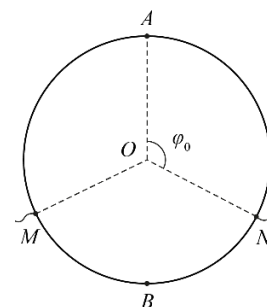
$$R_0/4 = \rho_0(\pi - \varphi_0)r/S = \alpha(\pi^2 - \varphi_0^2)r/(2S).$$

С учётом уравнения (1) получим:

$$\alpha\pi^2 r/(4S) = \alpha(\pi^2 - \varphi_0^2)r/(2S) \text{ или } \pi^2 = 2(\pi^2 - \varphi_0^2), \text{ откуда } \varphi_0 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = 127^\circ.$$

Расстояние L между точками M и N найдём как основание равнобедренного треугольника MON .

$$L = 2r \sin(\pi - \varphi_0) = 2r \sin\left(\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \approx 1,6r.$$



№	9.4. Критерии оценивания (из 12 баллов)	Баллы
1	Найдено сопротивление R_0 всей проволоки, например, через $\rho_{\text{ср}}$ (2 балла за то, что найдено $\rho_{\text{ср}}$)	3
2	Показано, что точки M и N должны располагаться симметрично относительно точки B	2
3	Получено выражение для сопротивления R_{MN} кольца между точками M и N	2
4	Найдена величина сопротивления R_{MN}	2
5	Найдено расстояние L между M и N	3

9.5 Параллелограмм. На рисунке обозначены образующие параллелограмма два точечных действительных источника света и два их изображения, полученные с помощью тонкой линзы. Построением определите тип линзы, её положение, положение главной оптической оси (ГОО) и фокусов F .

* *
* *

9.5. Возможное решение. Обозначим точки буквами A, B, C, D , а также нанесем контуры параллелограмма и его диагоналей. Прямые проходящие через пары источник – изображение должны пересечься в оптическом центре линзы. Поэтому, пары определяются однозначно – это $A-C$ и $B-D$ (другие прямые параллельны и не пересекаются). Отсюда следует, что оптический центр линзы находится в точке O пересечения диагоналей параллелограмма, а источники с изображениями расположены по разные стороны от него, следовательно, изображения действительные. Это позволяет сделать вывод о типе линзы – она собирающая.

Более того, можно утверждать, что источники и их изображения находятся в плоскостях, удаленных на двойное фокусное расстояние от плоскости линзы, поскольку диагонали параллелограмма делятся в точке пересечения пополам.

Однако по данным условия невозможно однозначно определить положение линзы. Возможны 2 варианта, так как плоскости двойного фокуса могут проходить через AB и CD , а могут – через BC и AD .

Построения при этом аналогичные. Через оптический центр проводим прямую, параллельную плоскостям двойного фокуса – это будет плоскость линзы. Далее, строим перпендикуляр к плоскости линзы через оптический центр. Получаем главную оптическую ось (ГОО). Пересечение ГОО со сторонами параллелограмма дает точки двойного фокуса ($2F$). Делим расстояния между оптическим центром и двумя фокусами пополам и находим фокусы.

Возможные построения приведены на рис. 1 и рис. 2.

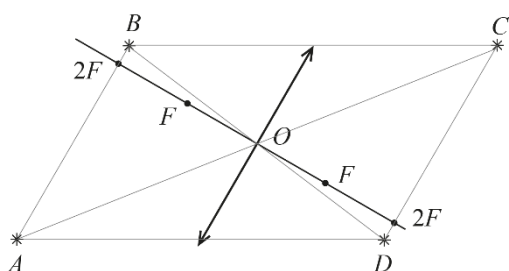


Рис. 1

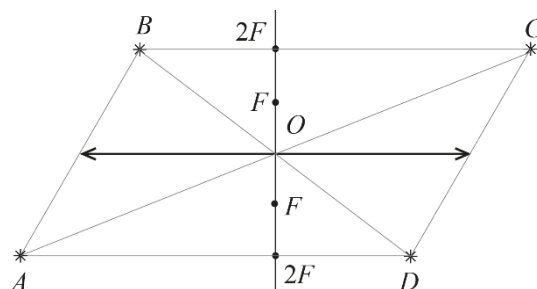


Рис. 2

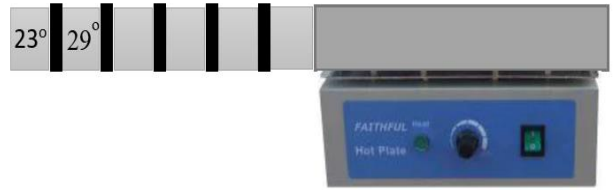
LVI Всероссийская олимпиада школьников по физике. Региональный этап.

Теоретический тур. 22 января 2022 г.

9 класс

№	9.5. Критерии оценивания (из 12 баллов)	Баллы
1	Определён тип линзы	1
2	Указано, что источники и изображения находятся на расстоянии $2F$ от линзы	2
3	Указано, что возможны 2 варианта расположения линзы	1
	Выполнено построение для первого случая	
4	Найдено положение линзы	2
5	Найдено положение ГОО	1
6	Найдено положение фокусов	1
	Выполнено построение для второго случая	
7	Найдено положение линзы	2
8	Найдено положение ГОО	1
9	Найдено положение фокусов	1

10.1. Магнетики. Как-то раз в руках у экспериментатора Глюка оказались стопка из шести мощных одинаковых магнитов, разделённых одинаковыми картонными прокладками, и высокоточный термометр. Дело оставалось за малым – провести какой-нибудь эксперимент. Не придумав ничего лучше, Глюк включил лабораторную электроплитку и прикрепил стопку магнитов к её боковой поверхности, затем стал измерять температуру крайнего (дальнего от плитки) магнита. Спустя некоторое время его температура перестала изменяться и оказалась равной $t_1 = 23^\circ\text{C}$, а температура соседнего магнита оказалась равной $t_2 = 29^\circ\text{C}$. Также Глюк измерил радиус магнита $r = 2,0$ см и его высоту (толщину) $h = 1,0$ см.



Определите температуру остальных магнитов и температуру плитки.

Считайте, что:

- магниты обладают очень хорошей теплопроводностью, поэтому температура магнита одинакова во всех его точках;
- температура воздуха одинакова во всех точках вблизи магнитов и равна $t_{oc} = 20^\circ\text{C}$;
- между магнитом и плиткой картонная прокладка отсутствует;
- теплоотдача в окружающую среду пропорциональна разности температур цилиндра и воздуха и пропорциональна площади контакта магнита с воздухом;
- поток тепла через картонный диск пропорционален разности температур его поверхностей и пропорционален площади диска.

10.1. Возможное решение. Перенумеруем цилиндры, присвоив номер 1 самому дальнему от поверхности плитки цилиндру. Пусть t_n – превышение температуры цилиндра с номером n над температурой воздуха. Тогда q – поток тепла от первого цилиндра в окружающую среду определяется выражением

$$q = kt_1S.$$

Здесь S – площадь поверхности первого цилиндра, находящейся в контакте с воздухом, k – коэффициент пропорциональности. Площадь поверхности, контактирующей с воздухом, для остальных цилиндров вдвое меньше (радиус цилиндра вдвое больше его высоты) и для этих цилиндров

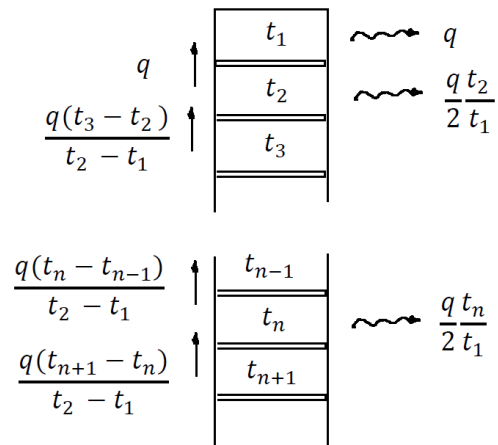
$$q_n = kt_n \frac{S}{2} = q \frac{t_n}{2t_1}.$$

Для потока тепла через картонную прокладку от второго цилиндра к первому q_{21} справедливо выражение

$$q_{2,1} = \alpha(t_2 - t_1)$$

При этом $q_{2,1} = q$, так как температуры цилиндров не меняются. Аналогично для потока тепла через картон от цилиндра с номером $(n + 1)$ к цилиндру с номером n

$$q_{n+1,n} = \alpha(t_{n+1} - t_n) = q_{2,1} \frac{t_{n+1} - t_n}{t_2 - t_1} = q \frac{t_{n+1} - t_n}{t_2 - t_1}$$



Для цилиндра с номером n условие равенства потоков приходящего и уходящего тепла (уравнение теплового баланса) выглядит так

$$\frac{q(t_{n+1} - t_n)}{t_2 - t_1} = \frac{q(t_n - t_{n-1})}{t_2 - t_1} + \frac{q t_2}{2 t_1}.$$

После преобразований получаем

$$\frac{t_{n+1} - 2t_n + t_{n-1}}{t_2 - t_1} = \frac{t_n}{2t_1},$$

$$t_{n+1} = \frac{t_n}{2} \left(3 + \frac{t_2}{t_1} \right) - t_{n-1}.$$

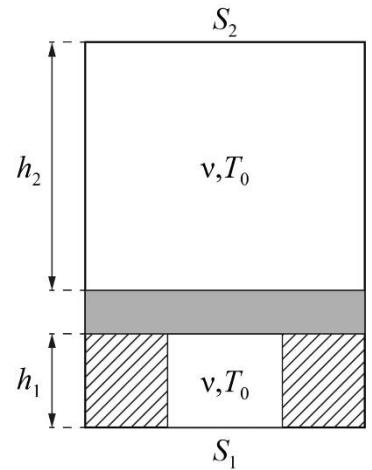
Используя эту рекуррентную формулу, зная значения $t_1 = 3^\circ\text{C}$ и $t_2 = 9^\circ\text{C}$, получаем:

$$t_3 = 24^\circ\text{C}, t_4 = 63^\circ\text{C}, t_5 = 165^\circ\text{C}, t_6 = 432^\circ\text{C}.$$

С учётом того, что t_n – разница температур цилиндра и воздуха окончательный ответ для значений температуры такой: третий цилиндр - 44°C , четвертый - 83°C , пятый - 185°C , шестой и плита - 452°C .

№	10.1. Критерии оценивания задачи (из 12 баллов)	Баллы
1	В решении учтено, что боковая поверхность первого цилиндра вдвое больше боковой поверхности остальных цилиндров. Если не учтено, то не ставятся баллы за этот пункт и за численные ответы.	1
2	Записано уравнение теплообмена одного из цилиндров с окружающей средой	1
3	Записано уравнение теплопередачи для одной из картонных прокладок	1
4	Записано уравнение теплового баланса для первого цилиндра	1
	Записано уравнение теплового баланса для одного из цилиндров, расположенного не с краю	2
4	Получено верное соотношение, позволяющее рассчитывать температуру цилиндра с номером n по известным температурам цилиндров с меньшими номерами. Если в выражении допущена арифметическая ошибка, то 1 балл.	2
5	Получены верные значения температур для цилиндров с номерами 3-6 (по баллу за ответ). Оцениваются только верные значения вне зависимости от причины ошибки.	4

10.2. Тяжёлый поршень. В вертикальном закрытом сосуде переменного сечения имеются два отделения цилиндрической формы: нижнее с площадью сечения $S_1 = S$ и высотой $h_1 = h$, верхнее с площадью сечения $S_2 = 3S$ и высотой $h_2 = 3h$. Нижнее отделение плотно и герметично закрыто подвижным теплопроводящим поршнем (поршень не приклеен, но газ не проникает в пространство между поршнем и опорами), который может с минимальным трением перемещаться внутри верхнего отделения. В обоих отделениях находится одно и то же количество ν газа при температуре T_0 . Газ во всём сосуде медленно нагревают. Когда температура газа достигает величины $2T_0$ поршень отрывается от опор.



1. Чему равна масса поршня?
2. На какой высоте h' от нижнего основания сосуда окажется поршень в равновесии? Температура всего газа поддерживается равной $2T_0$.
3. Газ в сосуде начинают медленно охлаждать. При какой температуре T поршень снова опустится на опоры?

Примечание: температура газа над и под поршнем всегда поддерживается одинаковой.

10.2. Возможное решение.

1. Поршень отрывается, когда сила давления газа под поршнем становится равной сумме сил давления газа над поршнем и силы тяжести поршня: $p_1 S_1 = p_2 S_2 + mg$. Давление газа можно выразить из уравнения Менделеева-Клапейрона: $pV = \nu RT \Rightarrow p = \nu RT / V$. Из этих уравнений получим:

$$mg = p_1 S_1 - p_2 S_2 = \frac{\nu R 2T_0}{h_1} - \frac{\nu R 2T_0}{h_2} = 2\nu RT_0 \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right) = \frac{4}{3} \frac{\nu RT_0}{h}.$$

Отсюда масса поршня равна $m = \frac{4}{3} \frac{\nu RT_0}{gh}$.

2. Заметим, что как только поршень оторвётся от упоров, газ под поршнем начнёт давить сразу на всю его площадь, и сила давления скачком увеличится. Так как между поршнем и стенками есть малая сила трения, то через некоторое время поршень остановится в положении равновесия. Запишем условие равновесия:

$$p_1' S_2 - p_2' S_2 = mg \Rightarrow \frac{\nu R \cdot 2T_0 \cdot 3S}{S_1 h_1 + 3S_1 (h' - h_1)} - \frac{\nu R \cdot 2T_0 \cdot 3S}{3S_1 (4h_1 - h')} = \frac{4}{3} \frac{\nu RT_0}{h}.$$

$$\frac{3}{(3h' - 2h_1)} - \frac{1}{(4h_1 - h')} = \frac{2}{3h}.$$

Отсюда
$$\frac{14h - 6h'}{-3(h')^2 + 14hh' - 8h^2} = \frac{2}{3h}.$$

Решая квадратное уравнение, получим: $h' = \frac{23 \pm \sqrt{181}}{6} h$.

Корень со знаком плюс не подходит, так как он больше $4h$. Окончательно:

$$h' = \frac{23 - \sqrt{181}}{6} h \approx 1,6h.$$

3. Пусть теперь газ охладился до температуры T . Запишем условие равновесия с учётом того, что $h = h_1$, и непосредственно перед соприкосновением с опорами газ давит на всю площадь поршня как сверху, так и снизу:

$$\frac{\nu RT \cdot 3S_1}{S_1 h_1} - \frac{\nu RT \cdot 3S_1}{3S_1 \cdot 3h_1} = \frac{4\nu RT_0}{3h_1} \Rightarrow \frac{8T}{3} = \frac{4T_0}{3} \Rightarrow T = \frac{T_0}{2}.$$

№	10.2. Критерии оценивания задачи (из 12 баллов)	Баллы
1.	Записано условие отрыва поршня $F_{\text{давл}_1} = mg + F_{\text{давл}_2}$	1
2.	Учтено, что снизу газ давит не на всю поверхность поршня. $F_{\text{давл}_1} = p_1 S_1$	1
3.	Из уравнения состояния идеального газа выражено его давление $p = \frac{\nu RT}{V}$	1
4.	Получен ответ: $m = \frac{4\nu RT_0}{3hg}$	1
5.	Для второго вопроса записано условие равновесия $F'_{\text{давл}_1} = mg + F'_{\text{давл}_2}$,	0,5
6.	Выражены объёмы газа над и под поршнем	1+1
7.	Получен ответ $h' = \frac{23 - \sqrt{181}}{6} h \approx 1,59h$ (Если второй ответ не отброшен, то 0,5)	1,5
8.	Для третьего вопроса записано условие равновесия $F''_{\text{давл}_1} = mg + F''_{\text{давл}_2}$	1
9.	Учтено, что под поршнем газ давит на всю его поверхность.	1
10.	Получен ответ: $T = \frac{T_0}{2}$	2

10.3. Мягкая посадка. Космический корабль должен приземлиться на лишённую атмосферы планету и коснуться её поверхности со скоростью, не превышающей $v_{\text{п}}$, которую могут погасить амортизаторы. На высоте h над поверхностью планеты командир корабля включил тормозной реактивный двигатель, создающий силу тяги, направленную вверх.

Какой по величине в этот момент была скорость u корабля, направленная вертикально вниз, если оказалось, что в процессе посадки он истратил минимальное количество топлива? (Если таких скоростей несколько, то укажите их все).

Массовый расход μ топлива и скорость u истечения газов относительно корпуса корабля считайте постоянными (командир может выбирать любое значение расхода μ). Изменение массы корабля не учитывайте, ускорение свободного падения равно g .

10.3. Возможное решение. Пусть M – масса космического корабля, μ – массовый расход топлива, u – скорость истечения газов относительно корабля, v – начальная скорость корабля, a – ускорение корабля (направлено вверх).

Поскольку μ и u постоянны, то и реактивная сила тяги $F = \mu u$ тоже постоянна, следовательно, корабль движется равноускоренно.

Пусть его конечная скорость равна $v_{\text{к}}$. Введем ось y , направленную вертикально вверх, тогда ускорение корабля $a_y = \frac{v^2 - v_{\text{к}}^2}{2h}$. Время от начала торможения до полной остановки равно $t = \frac{v - v_{\text{к}}}{a_y} = \frac{2h}{v + v_{\text{к}}}$. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось y :

$$Ma_y = \mu u - Mg \Rightarrow \mu = \frac{M(a_y + g)}{u}.$$

Общий расход топлива за время торможения равен

$$\begin{aligned} m_{\text{топл}} = \mu t &= \frac{M}{u} \cdot \left(\frac{v^2 - v_{\text{к}}^2}{2h} + g \right) \cdot \frac{2h}{v + v_{\text{к}}} = \frac{M}{u} \cdot \left(v - v_{\text{к}} + \frac{2gh}{v + v_{\text{к}}} \right) = \\ &= \frac{M}{u} \cdot \left((v + v_{\text{к}}) - 2v_{\text{к}} + \frac{2gh}{v + v_{\text{к}}} \right). \end{aligned}$$

Из неравенства Коши известно, что если произведение двух величин равно константе, то их сумма достигает минимума при равенстве величин. В нашем случае произведение $(v + v_{\text{к}}) \cdot \frac{2gh}{v + v_{\text{к}}}$ является константой, значит, минимальная масса потраченного топлива достигается при $v + v_{\text{к}} = \frac{2gh}{v + v_{\text{к}}}$, тогда $v + v_{\text{к}} = \sqrt{2gh}$.

Подставим найденное значение $v = \sqrt{2gh} - v_{\text{к}}$ в формулу для массы потраченного топлива: $m_{\text{топл}} = \frac{M}{u} \cdot \left(v - v_{\text{к}} + \frac{2gh}{v + v_{\text{к}}} \right) = \frac{M}{u} \cdot \left(\sqrt{2gh} - 2v_{\text{к}} + \frac{2gh}{\sqrt{2gh}} \right) = \frac{M}{u} \cdot 2(\sqrt{2gh} - v_{\text{к}})$. Значит:

1) $m_{\text{топл}}$ будет минимальной при максимальной конечной скорости $v_{\text{к}} = v_{\text{п}}$, следовательно, $v = \sqrt{2gh} - v_{\text{п}}$;

2) Полученный нами ответ справедлив при $v_{\text{п}} \leq \sqrt{2gh}$; в противном случае будет отрицательный расход топлива и отрицательная начальная скорость, что противоречит физическому смыслу.

Рассмотрим отдельно случай, когда $v_{\text{п}} \geq \sqrt{2gh}$. При этом корабль может совершать свободное падение с нулевым расходом топлива. Например, при нулевой начальной скорости он приблизится к поверхности со скоростью $v = \sqrt{2gh}$, которая меньше предельной посадочной.

Во втором случае из закона сохранения энергии $v = \sqrt{v_{\text{к}}^2 - 2gh}$ и, учитывая, что

$0 \leq v_k \leq v_n$, получим: $v \leq \sqrt{v_n^2 - 2gh}$.

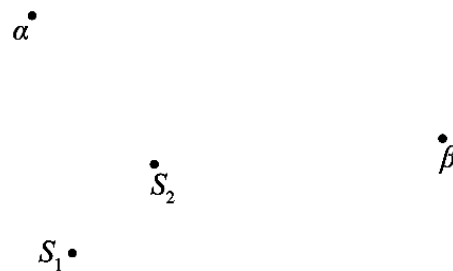
Окончательный ответ:

Если $v_n < \sqrt{2gh}$, то $v = \sqrt{2gh} - v_n$, при этом двигатели работают, и расход не нулевой.

Если $v_n \geq \sqrt{2gh}$, то $v \leq \sqrt{v_n^2 - 2gh}$, при этом двигатели не работают, и расход топлива равен нулю.

№	10.3. Критерии оценивания задачи (из 12 баллов)	Баллы
1	Выражение для реактивной силы	1
2	Второй закон Ньютона для корабля	1
3	Уравнение равноускоренного движения	1
4	Получена функция, связывающая количество потраченного топлива и начальную скорость	1
5	Анализ на минимум в общем случае $v + v_k = \sqrt{2gh}$	1
6	Анализ оптимальной конечной скорости $v_k = v_n$ (если используется без обоснования, то за этот пункт 0 баллов, а остальные пункты оцениваются согласно критериям)	1
7	Найден ответ для основного случая: $v = \sqrt{2gh} - v_n$.	2
8	Указана граница применимости основного случая: $v_n < \sqrt{2gh}$	1
9	Отдельно указан случай $v_n > \sqrt{2gh}$	1
10	Найдена скорость для случая $v_n > \sqrt{2gh}$: $v < \sqrt{v_n^2 - 2gh}$. Если вместо неравенства найдена лишь одна подходящая скорость, то ставить 0,5 балла	2

10.4. И снова Снеллиус. В архиве Снелла нашли чертеж. От времени чернила частично выцвели и остались видны только 4 точки, две из которых являются точечными действительными источниками S_1 и S_2 , а оставшиеся две (α и β) – их изображения. Из описания к чертежу следовало, что изображения созданы одной линзой. Найдите построением с помощью циркуля и линейки (без делений) все возможные положения линзы, её тип и фокусное расстояние.



Примечания: 1. На отдельном листе приведены в увеличенном масштабе два экземпляра чертежа. Все построения выполняйте на этом листе. 2. Описывать построение параллельных и перпендикулярных прямых, проходящих через заданную точку, деление отрезка пополам и подобные стандартные геометрические процедуры не обязательно.

10.4. Возможное решение. Рассмотрим первый случай. Пусть правое изображение (β) – это изображение источника S_1 , а левое (α) – источника S_2 . Проведем луч $S_1\alpha$ и $S_2\beta$. (см. рис. 1) Эти лучи идут без преломления, проходя через оптический центр линзы, и значит, точка их пересечения является оптическим центром линзы. Рассмотрим луч S_1S_2 : после преломления в линзе он (или его продолжение) должен пройти и через изображения α и β . Значит, плоскость линзы проходит через точку пересечения прямых S_1S_2 и $\alpha\beta$. Построим линзу и перпендикулярно ей главную оптическую ось.

Из чертежа видно, что оба источника оказались с одной стороны от линзы, а изображения – с разных сторон. Такое возможно только в случае собирающей линзы, причём одно изображение будет действительным, а второе – мнимым.

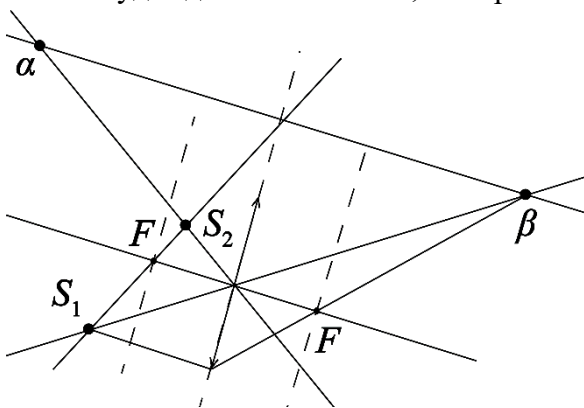


Рис. 1.

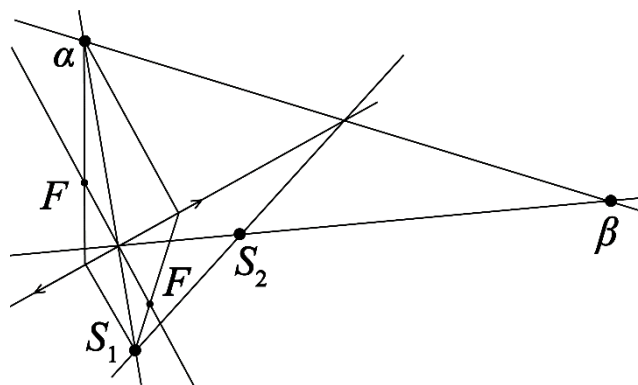


Рис. 2.

Для определения положения фокусов линзы проведём из S_1 луч, параллельный главной оптической оси. После преломления в линзе он пойдёт в β , пройдя через фокус. Аналогичным образом найдём второй фокус.

Аналогично рассмотрим второй случай. Положение линзы, главной оптической оси и фокусов линзы приведено на рис. 2.

№	10.4. Критерии оценивания (из 12 баллов)	Баллы
1	Для одного из случаев построены лучи, соединяющие каждый из источников с его изображением	1
2	Для одного из случаев определён оптический центр линзы	1
3	Для одного из случаев построены: прямой луч, проходящий через оба источника, и прямой луч, проходящий через оба изображения.	1
4	Для одного из случаев определена плоскость линзы	1
5	Для одного из случаев сделан обоснованный вывод, что линза может быть только собирающей.	2
6	Для одного из случаев построены лучи, необходимые для определения фокуса линзы	1
7	Для одного из случаев определены фокусы линзы	1
8	Для второго случая построены лучи, соединяющие каждый из источников с его изображением	0,5
9	Для второго случая определён оптический центр линзы	0,5
10	Для второго случая построены: прямой луч, проходящий через оба источника, и прямой луч, проходящий через оба изображения.	0,5
11	Для второго случая определена плоскость линзы	0,5
12	Для второго случая сделан обоснованный вывод, что линза может быть только собирающей.	1
13	Для второго случая построены лучи, необходимые для определения фокуса линзы	0,5
14	Для второго случая определены фокусы линзы	0,5

10.5. Суммарная мощность. В цепи, изображённой на рисунке 1, суммарная мощность, выделяющаяся на резисторах, равна 7 Вт. Определите суммарную мощность, выделяющуюся на резисторах в цепи, изображённой на рисунке 2.

Характеристики всех элементов цепей **не заданы**, но элементы, обозначенные на схемах одинаково, имеют одинаковые характеристики. Источники можно считать идеальными.

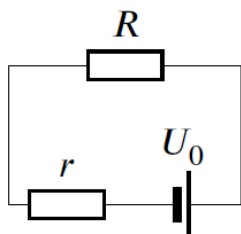


Рис. 1

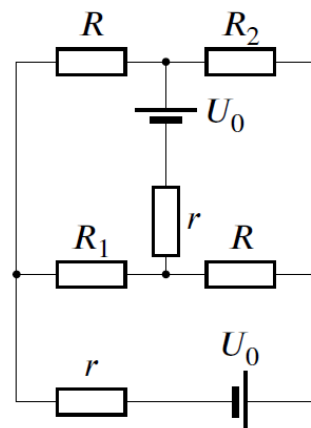


Рис. 2

10.5. Возможное решение. Вариант №1. Общая мощность, выделяющаяся на резисторах равна мощности всех источников в цепи. В первой цепи $P_0 = U_0 \cdot I = U_0^2 / (r + R)$.

Рассмотрим вторую цепь. Пусть I_0 – сила тока через нижний источник, I_1 – через правый резистор R , I_2 – через верхний источник. Тогда силы тока через резисторы R_1 , R_2 и левый резистор R равны, соответственно $I_1 - I_2$, $I_0 - I_1$ и $I_0 + I_2 - I_1$.

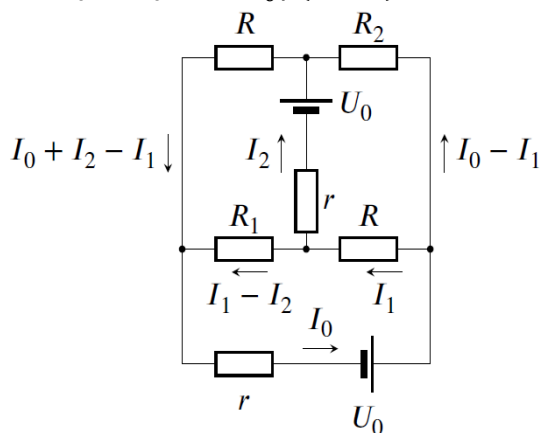
Мощность, выделяющаяся во второй цепи, равна суммарной мощности, вырабатываемой источниками $P = U_0 \cdot I_0 + U_0 \cdot I_2$.

С другой стороны, обойдя схему по двум источникам можем записать:

$$2U_0 = I_0 \cdot r + I_1 \cdot R + I_2 \cdot r + (I_0 + I_2 - I_1) \cdot R = (I_0 + I_2) \cdot (R + r).$$

Отсюда, следует, что

$$I_0 + I_2 = \frac{2U_0}{R + r} \Rightarrow P = U_0 \cdot (I_0 + I_2) = \frac{2U_0^2}{R + r} = 2P_0 = 14 \text{ Вт.}$$



10.5. Возможное решение. Вариант №2. Общая мощность, выделяющаяся на резисторах, равна мощности всех источников в цепи. В первой цепи

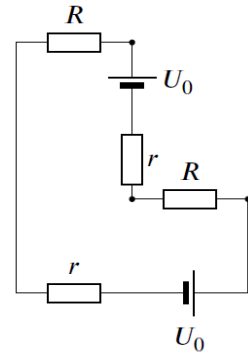
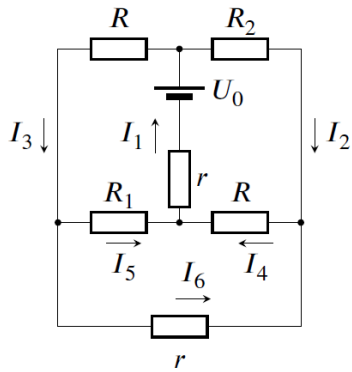
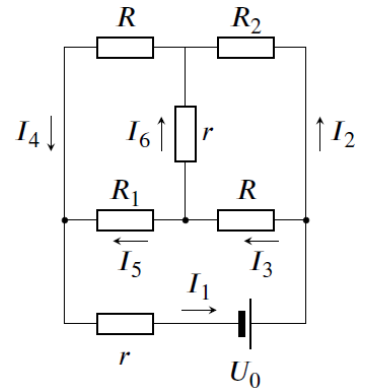
$$P_0 = U_0 \cdot I = U_0^2 / (r + R).$$

Воспользуемся принципом суперпозиции (метод контурных токов) и рассмотрим вторую цепь следующим образом:

уберём верхний источник и расставим токи.

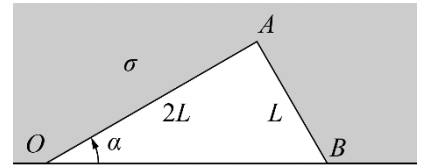
Теперь вернём верхний источник и уберём нижний. Из-за симметрии расположения резисторов получим следующее распределение сил тока: накладывая эти картины распределения друг на друга, получаем, что силы тока через резисторы R_1 и R_2 во второй цепи равны нулю, и эти резисторы можно не учитывать.

Сила тока, текущего в цепи, равна $I' = \frac{2U_0}{2(r+R)} = \frac{U_0}{r+R} = I$. Отсюда находим мощность, выделяющуюся в цепи: $P = 2U_0 \cdot I = 2P_0 = 14$ Вт.



№	10.5. Критерии оценивания (из 12 баллов)	Баллы
1	Для первой схемы мощность выражена через параметры элементов $P_0 = U_0^2 / (r + R)$	2
2	Для расчёта второй схемы предложен корректный способ (Кирхгоф, узловые потенциалы, суперпозиция токов, симметрия и т.д.)	2
3	<p>Записан полный набор уравнений/рассуждений, необходимых для решения задачи выбранным методом.</p> <p>Метод Кирхгофа: сумма сил тока для 3 узлов: 1+1+1 балла; два уравнения для обходов контуров: 1,5+1,5 балла.</p> <p>Метод суперпозиции: эквивалентное сопротивление: 1+1 балл; найдены силы тока через элементы: 2+2 балла.</p> <p>Метод суперпозиции + симметрия: расстановка токов для первого источника: 1 балл; симметричная расстановка токов для второго источника: 2 балла; верное сложение сил тока: 2 балла; общая сила тока в результирующей цепи: 1 балл.</p> <p>Метод потенциалов, расстановка потенциалов: 1 балл; сумма сил тока для трех узлов: 1+1+1 балла; закон Ома для четырех элементов: 0,5 x 4 балла.</p> <p>Иной метод: максимальный балл (6 баллов) за пункт умножается на отношение числа записанных независимых уравнений (рассуждений) к минимальному числу уравнений (рассуждений), необходимых для этого метода, независимо от сложности уравнения (рассуждения).</p> <p>Пример: записано 3 уравнения из 4-х необходимых. Тогда оценка за пункт: $6 \cdot (3/4) = 4,5$ балла.</p>	6
4	Получен верный ответ (Важно!!! Баллы за ответ ставятся только при корректном методе и полном наборе правильных исходных уравнений/рассуждений)	2

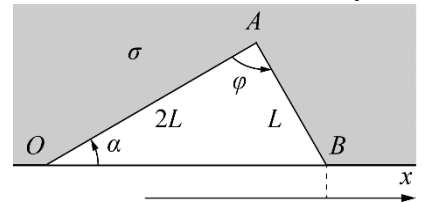
11.1. Треугольник и плёнка. Лёгкие стержни OA и AB соединены шарнирно между собой. Конец O стержня OA закреплён шарнирно на гладкой спице, а на конце B стержня AB прикреплено с помощью шарнира маленькое колечко массы m , которое может скользить по спице. Длины стержней различаются в два раза: $|AB| = L$, $|OA| = 2L$, все шарниры невесомы. Система снаружи (до закреплённой внешней границы) окружена двусторонней плёнкой с коэффициентом поверхностного натяжения σ . В области между спицей и стержнями плёнки нет. Силу тяжести не учитывайте.



- 1) Найдите величину угла α в положении равновесия.
- 2) Найдите период малых колебаний системы вблизи положения равновесия.

11.1. Возможное решение. Способ 1 (энергетика).

1) В состоянии равновесия энергия системы должна быть минимальна. В данном случае энергия системы – это энергия натянутой плёнки, которая пропорциональна площади плёнки: с учётом того, что плёнка двусторонняя, $E_{пл} = 2\sigma S_{пл}$. Ясно, что минимум этой энергии отвечает положению стержней, в котором максимальна площадь треугольника OAB . Её удобно вычислять по двум сторонам (OA и AB) и углу φ между ними:



$$S_{OAB} = \frac{1}{2} L \cdot 2L \cdot \sin(\varphi) = L^2 \sin(\varphi).$$

Эта площадь максимальна при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то есть когда стержни перпендикулярны друг другу, и поэтому в прямоугольном треугольнике OAB $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{1}{2}$. Итак, в состоянии равновесия

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) = \operatorname{arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 26,6^\circ.$$

2) Потенциальная энергия определена с точностью до константы, поэтому мы можем считать энергию системы в положении равновесия равной нулю. Тогда энергия системы в положении, в котором колечко сдвинулось вдоль стержня в точку с координатой x , отсчитываемой от положения равновесия (см. рисунок), равна

$$E(x) = 2\sigma[L^2 - S_{OAB}(x)] = 2\sigma L^2\{1 - \sin[\varphi(x)]\}.$$

Длина стороны OB в этом положении $|OB| = L\sqrt{5} + x$, и, в соответствии с теоремой косинусов, $(L\sqrt{5} + x)^2 = L^2 + 4L^2 - 4L^2 \cos[\varphi(x)] \Rightarrow \cos[\varphi(x)] \approx -\frac{\sqrt{5}}{2L}x$.

Отметим, что в этом выражении мы пренебрегли слагаемым порядка $\frac{x^2}{L^2}$ (колебания малые).

В том же приближении $\sin[\varphi(x)] \approx \sqrt{1 - \frac{5x^2}{4L^2}} \approx 1 - \frac{5x^2}{8L^2}$. Значит, $E(x) \approx \frac{5\sigma x^2}{4} = \frac{kx^2}{2}$. Здесь введено обозначение $k = \frac{5\sigma}{2}$. Мы получили в точности такое же выражение, как для груза на пружине – малые колебания колечка будут происходить по гармоническому закону с

$$\text{периодом } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{5\sigma}}.$$

Ответы: $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) = \operatorname{arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 26,6^\circ$, $T = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{5\sigma}}$.

Полный балл за соответствующий пункт критериев ставится, если записана правильная формула или корректно приведён необходимый закон.

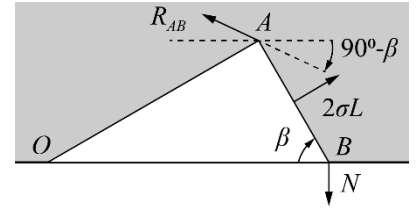
11.1. Критерии оценивания (из 12 баллов)	баллы
Указано, что в состоянии равновесия энергия плёнки минимальна	1
Указано, что в состоянии равновесия максимальна площадь треугольника OAB	1
Записано выражение для площади OAB (или для энергии системы*) через один геометрический параметр (угол, длина стороны OB и т.д.)	1
Определено положение равновесия системы (указано, что треугольник OAB прямоугольный, найдена длина $ OB = L\sqrt{5}, \dots$)	1
Найден угол α (численно или как значение обратной тригонометрической формулы)	1
** записано выражение для энергии системы при отклонении от положения равновесия (через любую однозначно определенную линейную или угловую координату).	2
Выражение для энергии приведено к квадратичному виду для малых колебаний	2
Указано на аналогию с колебаниями пружинного маятника (или используется иной корректный способ, позволяющий связать вид выражения для потенциальной энергии с периодом гармонических колебаний)	1
Получена ** формула для периода малых колебаний	2

*в этом пункте за потерю в выражении для энергии коэффициента 2 (связанного с наличием у плёнки двух поверхностей) баллы не снижаются.

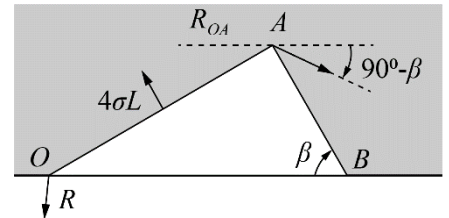
**в этих пунктах за потерю в выражении для энергии коэффициента 2 (связанного с наличием у плёнки двух поверхностей) вместо 2 баллов ставится 1 балл.

11.1. Возможное решение задачи. Способ 2 (статика и динамика).

1) Рассмотрим равновесие стержня AB , на который действуют три силы. Это равнодействующая сил поверхностного натяжения, которая перпендикулярна стержню и приложена к его середине. Поскольку стержень невесом, из условия равенства моментов относительно колечка находим проекцию силы реакции шарнира на направление, перпендикулярное стержню: $2\sigma L \frac{L}{2} - R_{AB\perp} L = 0 \Rightarrow R_{AB\perp} = \sigma L$. Наконец, из условия баланса проекций сил на стержень, находим параллельную стержню составляющую силы реакции шарнира



$R_{AB\parallel} = N \sin(\beta) = \sigma L \operatorname{tg}(\beta)$. Таким образом, величина этой силы $R_{AB} = \frac{\sigma L}{\cos(\beta)}$, и она направлена под углом $(2\beta - 90^\circ)$ к стержню, и под углом $(90^\circ - \beta)$ к горизонтали. Сила, действующая на шарнир A со стороны стержня AB , в соответствии с III законом Ньютона, равна по величине и противоположна по направлению найденной силе \vec{R}_{AB} , а также и силе, действующей на шарнир A со стороны стержня OA (шарнир A находится в равновесии под действием этих двух сил). И, конечно, сила \vec{R}_{OA} , действующая со стороны шарнира A на стержень OA , оказывается равна по величине и противоположна по направлению найденной нами силе: $\vec{R}_{OA} = -\vec{R}_{AB}$.



Теперь мы можем рассмотреть равновесие стержня OA под действием \vec{R}_{OA} , равнодействующей сил поверхностного натяжения и силы реакции шарнира O . Записав условие равновесия моментов относительно O , находим перпендикулярную стержню компоненту \vec{R}_{OA} :

$$4\sigma L \frac{L}{2} - R_{OA\perp} L = 0 \Rightarrow R_{OA\perp} = 2\sigma L.$$

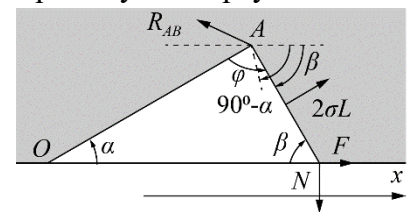
Но из найденного ранее получаем другое выражение для этой величины:

$$R_{OA\perp} = \frac{\sigma L}{\cos(\beta)} \cos(90^\circ - \beta) = \sigma L \cdot \operatorname{tg}(\beta).$$

Из сопоставления этих выражений видим, что в состоянии равновесия $\operatorname{tg}(\beta) = 2$. Из теоремы синусов $\sin(\alpha) = \frac{1}{2} \sin(\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}}$, и поэтому $\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 26,6^\circ$.

Отметим, что из полученных углов ($\sin(\alpha) = \cos(\beta)$) видно, что третий угол в треугольнике OAB – прямой!

2) Рассмотрим теперь неравновесное положение колечка, в котором оно имеет координату x , отсчитываемую от положения равновесия (см. рис.). Далее будем считать, что обозначения всех углов относятся именно к смещённому положению колечка. Поскольку нам нужно описывать малые гармонические колебания, то все силы нужно вычислять с точностью до первого порядка по x/L . Например, длина OB в этом положении $|OB| = L\sqrt{5} + x$, и, в соответствии с теоремой косинусов,



$$(L\sqrt{5} + x)^2 = L^2 + 4L^2 - 4L^2 \cos(\varphi) \Rightarrow \cos(\varphi) \approx -\frac{\sqrt{5}}{2L} x.$$

Соответственно, с этой точностью $\sin(\varphi) \approx \sqrt{1 - \frac{5x^2}{4L^2}} \approx 1$. По теореме синусов

11 класс

$$\sin(\beta) = \frac{2L}{L\sqrt{5}+x} \sin(\varphi) \approx \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{5L}x \Rightarrow \cos(\beta) \approx \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{5L}x.$$

Поскольку стержни и шарниры невесомые, то сумма приложенных к каждому из них сил и моментов сил равна нулю. Шайба в положении покоя просто передавала действующую на неё силу нормальной реакции спицы на стержень AB . Поскольку шайба массивная, и теперь движется с ускорением, то действующая с её стороны на стержень AB сила имеет компоненту F вдоль спицы. Повторим рассуждения о стержне AB для новой ситуации. Условие равновесия моментов сил относительно шарнира A даёт уравнение (1):

$$2\sigma L \frac{L}{2} - NL\cos(\beta) + FL\sin(\beta) = 0 \Rightarrow NL\cos(\beta) - FL\sin(\beta) = \sigma L.$$

Условие равновесия моментов относительно колечка прежде: $2\sigma L \frac{L}{2} - R_{AB\perp}L = 0 \Rightarrow R_{AB\perp} = \sigma L$. Условие баланса сил в проекции на стержень AB теперь превратилось в

$$R_{AB\parallel} = N\sin(\beta) + F\cos(\beta).$$

Условие равновесия моментов сил, действующих на стержень OA относительно O , тоже не изменилось: $4\sigma L \frac{L}{2} - R_{OA\perp}L = 0 \Rightarrow R_{OA\perp} = 2\sigma L$. С учётом $\vec{R}_{OA} = -\vec{R}_{AB}$ можно вычислить эту компоненту через силы, действующие на AB (важно обратить внимание на то, что направление, перпендикулярное OA , составляет с горизонталью угол $(90^\circ - \alpha)$, а стержень AB – угол β):

$$R_{OA\perp} = 2\sigma L = R_{AB\parallel} \cos(90^\circ - \alpha - \beta) + R_{AB\perp} \cos(180^\circ - \alpha - \beta).$$

С учётом того, что $(180^\circ - \alpha - \beta = \varphi)$, и выражений для сил, получаем уравнение (2):

$$N\sin(\beta) + F\cos(\beta) = \sigma L \frac{2 - \cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} \approx \sigma L \left(2 + \frac{\sqrt{5}}{2L}x \right).$$

Исключая из (1) и (2) силу N , и используя полученные выше приближённые формулы для углов, находим, что

$$F \approx \sigma L \left[\left(2 + \frac{\sqrt{5}}{2L}x \right) \cos(\beta) - \sin(\beta) \right] \approx \frac{5}{2}\sigma \cdot x.$$

Соответствующая компонента силы, действующей со стороны стержня AB на колечко, имеет противоположный знак. Таким образом, уравнение движения колечка при $x \ll L$ имеет вид:

$$m\ddot{x} \approx -\frac{5}{2}\sigma \cdot x.$$

Это уравнение гармонических колебаний с циклической частотой $\omega = \sqrt{\frac{5\sigma}{2m}}$. Период

$$\text{колебаний } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{5\sigma}}.$$

$$\text{Ответы: } \alpha = \arctg\left(\frac{1}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 26,6^\circ, T = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{5\sigma}}.$$

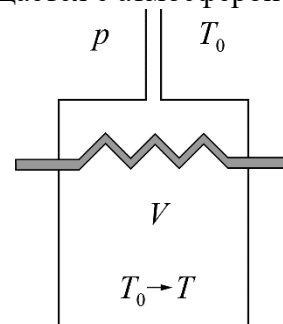
Полный балл за соответствующий пункт критериев ставится если записана правильная формула или корректно приведён необходимый закон.

11.1. Критерии оценивания (из 12 баллов)	баллы
Из условий равновесия * найдена N	0,5
Из условий равновесия * найдена $R_{AB\perp}$	0,5
Из условий равновесия * найдена $R_{AB\parallel}$	0,5
Из условий равновесия * найдена $R_{OA\perp}$	0,5
Из сравнения выражений для сил найден геометрический параметр, определяющий положение равновесия (β , $ OB $, φ , ...)	2
Найден угол α (численно или как значение обратной тригонометрической формулы)	2
Получены выражения для синусов и (или) косинусов <u>двух</u> углов в треугольнике OAB в первом порядке по x/L (2×0,5 балла)	1
Записана * полная система уравнений для сил, позволяющая найти величину F	2
Уравнение движение шайбы приведено к уравнению гармонических колебаний	1
Получена ** формула для периода малых колебаний	2

*в этих пунктах за потерю в выражении для энергии коэффициента 2 (связанного с наличием у плёнки двух поверхностей) баллы не снижаются.

**в этих пунктах за потерю в выражении для энергии коэффициента 2 (связанного с наличием у плёнки двух поверхностей) вместо 2 баллов ставится 1 балл.

11.2. Охлаждение. Сосуд объёмом V с теплообменником внутри сообщается с атмосферой через тонкую длинную трубку. Исходно температура в нём T_0 равна температуре атмосферного воздуха. По теплообменнику прокачивают охлаждающую жидкость до тех пор, пока температура воздуха во всём сосуде не уменьшится до T ($T < T_0$). Сколько тепла от воздуха передано теплообменнику? Атмосферное давление P . Поток тепла через стенки сосуда и трубку можно пренебречь. Внутренняя энергия воздуха



$U = (5/2)\nu RT$, где ν – число молей, T – температура, а R – газовая постоянная.

11.2. Возможное решение. При включении теплообменника температура вблизи него падает, остывший воздух сжимается, становится тяжелее и опускается вниз, а на его место входит более тёплый атмосферный воздух. При вхождении воздуха совершается положительная работа атмосферного давления.

Из уравнения состояния идеального газа находим, что число молей воздуха в сосуде увеличится от начального $\nu_0 = PV/RT_0$ до $\nu = PV/RT$ при конечной температуре T .

Если ΔV объём атмосферного воздуха, вошедшего в сосуд, то начальный объём ν молей воздуха при заданных внешних условиях:

$$V + \Delta V = \nu RT_0/P = VT_0/T, \text{ а } \Delta V = V(T_0/T - 1).$$

Тогда работа атмосферного давления при вхождении воздуха в сосуд:

$$A = P\Delta V = PV(T_0/T - 1).$$

По первому началу термодинамики работа идёт на изменение внутренней энергии и передачу теплоты (в данном случае теплообменнику):

$$A = \Delta U + Q \text{ или } Q = A - \Delta U.$$

Используем выражения для работы и изменения внутренней энергии:

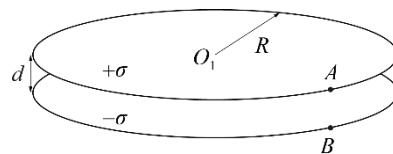
$$Q = A - \Delta U = PV(T_0/T - 1) - (5/2)\nu R(T - T_0).$$

Используя выражение $\nu = PV/RT$, окончательно найдём искомое тепло

$$Q = (7/2)PV(T_0/T - 1).$$

№	11.2. Критерии оценивания (12 баллов)	Баллы
1	Указано, что в сосуд входит атмосферный воздух	1
2	Указано, что при этом совершается положительная работа внешнего давления	1
3	Найдено из уравнения состояния идеального газа число молей воздуха в сосуде при начальной и конечной температуре	2
4	Найден исходный объём воздуха, вошедшего в сосуд, $\Delta V = V(T_0/T - 1)$.	2
5	Верно записано выражение для работы внешней среды $A = P\Delta V = PV(T_0/T - 1)$	2
6	Верно применено первое начало $A = \Delta U + Q$ или $Q = A - \Delta U$	1
7	Выражено изменение внутренней энергии и получено уравнение для Q	2
8	Получен верный ответ (если в п.6 выкладки доведены до ответа, то добавляется этот балл).	1

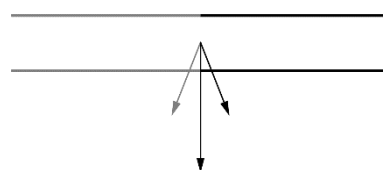
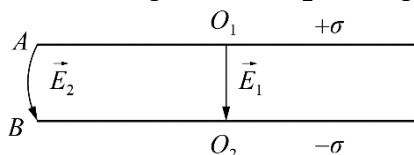
11.3. Плоский конденсатор. Две круглые непроводящие пластины радиуса R располагаются параллельно на малом расстоянии $d \ll R$ друг от друга, образуя плоский конденсатор. Пластины заряжены равномерно с поверхностными плотностями заряда $+\sigma$ и $-\sigma$. Точки O_1 и O_2 — центры пластин. Точки A и B находятся на краях пластин. Отрезки O_1O_2 и AB перпендикулярны плоскостям пластин. Найдите разности потенциалов между парами точек: 1) O_1 и O_2 ; 2) A и B ; 3) O_1 и A .



11.3. Решение задачи. 1. Напряжённость электрического поля в зазоре между центрами пластин соответствует напряжённости между двумя бесконечными плоскостями $E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

Тогда разность потенциалов между центрами пластин $\varphi_{O_1} - \varphi_{O_2} = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$.

2. Рассмотрим поле \vec{E}_2 в зазоре на границе пластин.



Так как зазор мал, пластины можно считать полуплоскостями. Для нахождения поля \vec{E}_2 между ними мысленно добавим ещё две полуплоскости. Они будут создавать напряжённость поля, имеющую такую же нормальную (т. е. перпендикулярную плоскостям) компоненту, а суммарная напряжённость поля от всех четырёх полуплоскостей будет равна E_1 . Таким образом получаем, что нормальная компонента напряжённости электрического поля двух полуплоскостей равна половине E_1 , или

$$E_{2n} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Приведённое рассуждение применимо для любой точки отрезка AB , отсюда разность потенциалов между краями пластин:

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{\sigma d}{2\epsilon_0}.$$

3. Из потенциальности электрического поля следует:

$$\varphi_{O_1} - \varphi_A = \varphi_B - \varphi_A + \varphi_{O_2} - \varphi_B + \varphi_{O_1} - \varphi_{O_2}$$

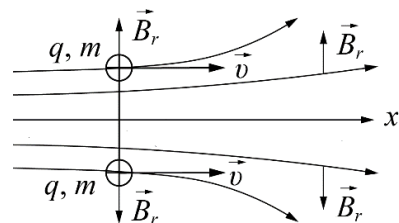
Из соображений симметрии $\varphi_{O_1} - \varphi_A = \varphi_B - \varphi_{O_2}$. Комбинируя эти выражения, получаем

$$\varphi_{O_1} - \varphi_A = \frac{1}{2} \left((\varphi_{O_1} - \varphi_{O_2}) - (\varphi_A - \varphi_B) \right) = \frac{\sigma d}{4\epsilon_0}.$$

Полный балл за соответствующий пункт критериев ставится, если записана правильная формула или корректно приведён необходимый закон.

№	11.3. Критерии оценивания (12 баллов)	Баллы
1	Найдена напряжённость поля E_1	1
2	Найдена разность потенциалов между точками O_1 и O_2	1
3	Указано, что кривизну пластин можно не учитывать, или что пластины можно заменить полуплоскостями	3
4	Найдена нормальная составляющая напряжённости поля на отрезке AB	2
5	Найдена разность потенциалов между точками A и B	1
6	Использовано соображение суммарной нулевой разности потенциалов по контуру $O_1ABO_2O_1$	2
7	Указано, что разности потенциалов между A и O_1 и между O_2 и B равны	1
8	Найдена разность потенциалов между точками O_1 и A	1

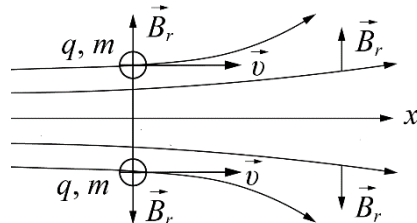
11.4. Гантель в магнитном поле. В аксиально-симметричном магнитном поле находится гантель – лёгкий непроводящий стержень с заряженными шариками на концах. Массы и заряды шариков одинаковы и равны m и q . Гантель перпендикулярна оси симметрии (оси x), а её центр находится на этой оси (см. рис.). Проекция магнитного поля на радиальное (перпендикулярное оси) направление на расстоянии равном радиусу гантели везде одинакова и равна B_r . Осевая компонента поля изменяется вдоль оси. В момент времени t_0 гантели сообщают скорость v_0 вдоль оси x . Силу тяжести не учитывайте.



- 1) На какое наибольшее расстояние L_{\max} от начального положения удаляется центр гантели?
- 2) Чему равна максимальная окружная (перпендикулярная оси симметрии) скорость вращения шариков гантели в процессе движения?
- 3) Через какое время после t_0 угловая скорость вращения гантели окажется наибольшей?

11.4. Возможное решение. Вызываемые осевой проекцией магнитного поля силы направлены вдоль стержня, равны по величине и противоположно направлены и не сказываются на движении гантели.

В начальный момент силы, связанные с радиальной проекцией магнитного поля, оказываются тангенциальными, то есть перпендикулярными оси и радиальному направлению. Это приводит к росту угловой скорости вращения вокруг оси симметрии, но при этом нет сил, смещающих центр гантели поперёк оси или вызывающих поворот плоскости вращения. В самом деле, при скорости v шариков вдоль оси и окружной скорости u возникающие из-за радиальной проекции магнитного поля B_r силы перпендикулярны скорости шариков и имеют осевую составляющую $F_x = -quB_r$ и тангенциальную (окружную) $F_t = qvB_r$. Соответственно



$$m \frac{dv}{dt} = -quB_r; \quad m \frac{du}{dt} = qvB_r.$$

Пока v не уменьшится до нуля, окружная и угловая скорости растут. Поскольку работа магнитной силы равна нулю, то кинетическая энергия остаётся неизменной и максимальная окружная скорость $u_{\max} = v_0$.

При смещении центра гантели на x от начальной точки

$$m \frac{du}{dt} = qvB_r = qB_r \frac{dx}{dt},$$

откуда $mu = qB_r x$. Для максимального смещения L_{\max} имеем:

$$mu_{\max} = qB_r L_{\max} \quad \text{и} \quad L_{\max} = \frac{mv_0}{qB_r}.$$

После подстановки $u = \frac{qB_r x}{m}$ в выражение $m \frac{dv}{dt} = -quB_r$ получим уравнение гармонических колебаний

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\left(\frac{qB_r}{m}\right)^2 x$$

LVI Всероссийская олимпиада школьников по физике. Региональный этап.

Теоретический тур. 22 января 2022 г.

11 класс

с круговой частотой $\omega = \frac{qB_r}{m}$ и периодом $T = \frac{2\pi m}{qB_r}$. Первый раз от момента начала движения максимальная скорость вращения будет достигнута через четверть периода $t_1 = \frac{\pi m}{2qB_r}$. Затем максимальное значение скорости вращения будет достигаться через каждые полпериода. Таким образом, для моментов времени, в которые достигается максимальная скорость вращения, справедлива формула

$$t_n = \frac{\pi m}{2qB_r} (2n - 1),$$

где n - натуральное число.

№	11.4. Критерии оценивания (12 баллов)	Баллы
1	Указано, что от осевой компоненты магнитного поля движение не зависит	1
2	Записаны выражения для осевой и тангенциальной компонент магнитной силы (0,5 балла за каждую компоненту)	1
3	Верно записан 2-й закон Ньютона для этих компонент (0,5 балла за каждую компоненту)	1
4	Указано, что кинетическая энергия и модуль полной скорости при движении в магнитном поле не меняются, определена максимальная окружная скорость	1
5	Установлена связь окружной скорости со смещением вдоль оси симметрии	1
6	Найдено максимальное смещение от начальной точки	2
7	Получено уравнение гармонических колебаний	2
8	Получено выражение для периода или частоты колебаний	1
9	Определены моменты времени достижения максимума угловой скорости *	2

*Если определено только значение времени t_1 то за этот пункт ставится один балл.

11.5. Круг Снелла. Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли чертёж оптической схемы, на которой были изображены тонкая собирающая линза, круг и его изображение в линзе. От времени чернила выцвели, и на чертеже остались видны лишь круг и его изображение, но известно, что круг целиком располагался в плоскости, проходящей через главную оптическую ось линзы, и что круг и его изображение располагались по разные стороны от плоскости линзы.

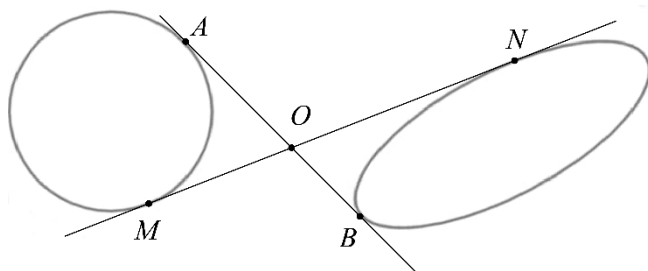
Пользуясь только циркулем и линейкой без делений, восстановите положения:

- 1) оптического центра O линзы;
- 2) плоскости линзы;
- 3) фокусов F_1 и F_2 линзы.

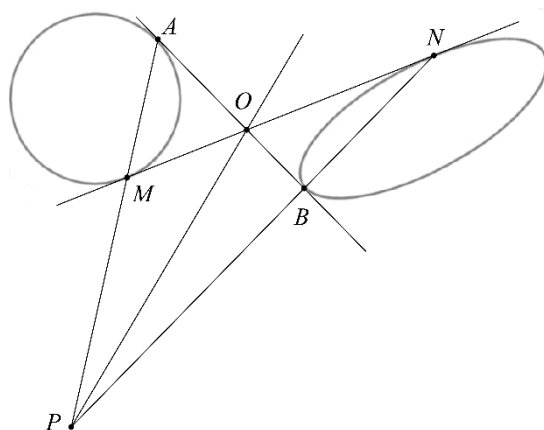


11.5. Возможное решение. Поскольку плоскость линзы находится между источником и его изображением, то изображение является действительным, причём фокальные плоскости линзы также находятся между ними – в противном случае изображение оказалось бы «разорванным» на действительную и мнимую часть.

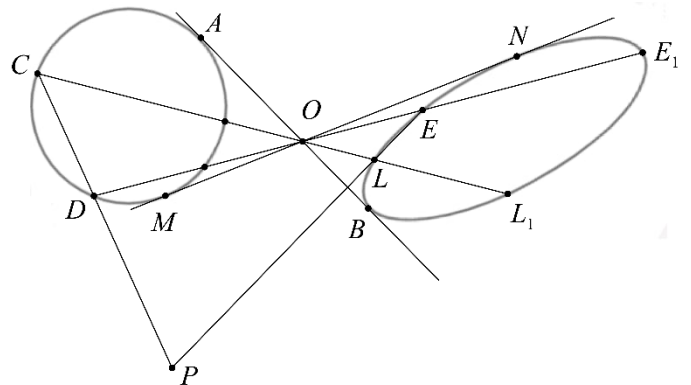
Точечный источник и его изображение в линзе лежат на прямой, проходящей через оптический центр O . Если прямая, проходящая через оптический центр, касается круга, то на этой прямой находится изображение лишь одной его точки. Это означает, что данная прямая касается и изображения круга. Из этого следует, что оптический центр линзы O находится в точке пересечения общих внутренних касательных AB и MN к кругу и его изображению.



Рассмотрим луч, проходящий через точки A и M . После преломления в линзе он проходит через точки пересечения касательных к изображению круга B и N . Поэтому в точке пересечения линий, проходящих через точки круга и его изображения, находится точка P , принадлежащая плоскости линзы. Проведя прямую OP , найдём положение плоскости линзы.



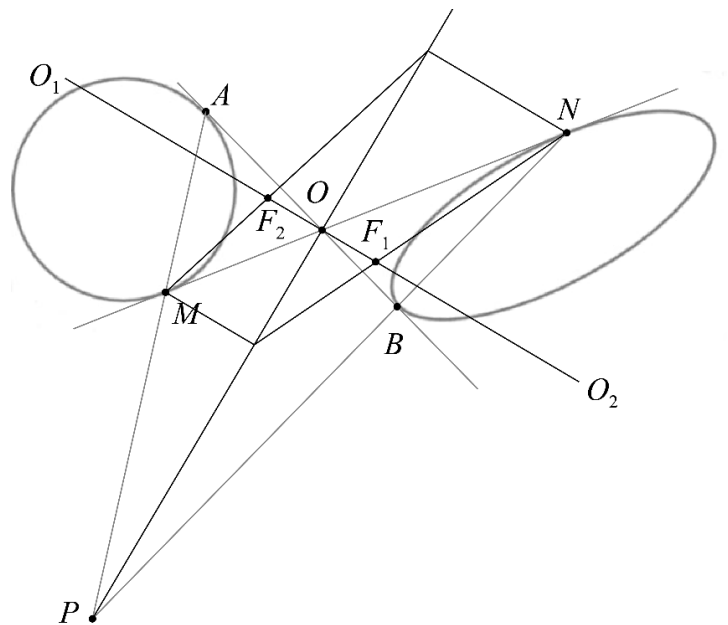
Отметим, что для построения плоскости линзы можно провести через O любые две прямые, пересекающие круг и его изображение (например, CL и DE), выбрать на этих прямых точки, принадлежащие кругу, используя найденный центр линзы определить изображения этих точек (L и E), а затем провести через эти пары точек прямые до пересечения, чтобы определить положение точки в плоскости линзы.



Однако при таком подходе важно не перепутать изображения этих точек с другими точками пересечения прямых CO , DO с линией изображения («ложные точки» E_1 и L_1).

Для правильного выбора достаточно заметить, что для действительных изображений в собирающей линзе увеличение расстояния от предмета до линзы приводит к уменьшению расстояния от линзы до изображения. Поэтому изображения «дальних» от O точек пересечения круга с прямыми (C и D) отвечают «ближние» к O точки пересечения этих прямых с эллипсом-изображением.

Закачивая наше построение, определим главную оптическую ось линзы O_1O_2 как прямую, проходящую через точку O перпендикулярно OP . Наконец, для определения положения фокусов линзы рассмотрим лучи, идущие параллельно главной оптической оси через точку M и её изображение N . По другую сторону от линзы эти лучи проходят через точки N и M соответственно, пересекая оптическую ось в точках фокусов F_1 и F_2 . Как видно, фокальные плоскости действительно оказались между кругом и его изображением.



№	11.5. Критерии оценивания (12 баллов)	Баллы
1	Указано или используется в ходе решения, что оптический центр линзы O находится в точке пересечения внутренних касательных к кругу и его изображению.	3,0
2	Предыдущее утверждение обосновано.	1,5
3	Правильно восстановлен построением оптический центр линзы O .	0,5
4	Указано или используется в ходе решения, что точка пересечения прямой, проходящей через два точечных источника и прямой, проходящей через их изображения, принадлежит плоскости линзы.	2,5
5	Правильно восстановлена построением плоскость линзы.	1,5
6	Указано или используется в ходе решения, что главная оптическая ось линзы – перпендикуляр к плоскости линзы, проходящий через оптический центр.	0,5
7	Правильно восстановлена построением главная оптическая ось линзы.	0,5
8	Правильно восстановлены построением фокусы линзы F_1 и F_2 (по 1 баллу за каждый).	2,0

Примечание. Для определения точки, принадлежащей плоскости линзы, может быть использован другой луч, пересекающий любые две точки круга, отличные от точек A и M . Однако, как указывалось в решении, в этом случае возможна ошибка, связанная с неверным установлением соответствия между этими точками и их изображениями. В этом случае баллы за пункты 5, 7 и 8 не ставятся!