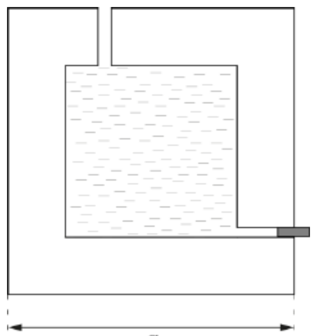
1. На дальних берегах. В Египетской системе измерений существовали меры длины: атур обычный, атур царский, парасанг, шем. Атур царский равнялся 1,5 парасангам. Один шем равнялся 1,2 атура обычного. Определите, какой атур больше и во сколько раз, если один парасанг равен 1,1 шема.

2. Триатлон. На соревнованиях по триатлону спортсмен должен проплыть дистанцию S = 1 500 м, затем проехать на велосипеде расстояние $80S/3$, а на заключительном этапе пробежать трассу длиной $20S/3$. Если спортсмен едет на велосипеде со скоростью v = 40 км/час, плывёт со скоростью $0{,}09v$ и бежит со скоростью $0{,}3v$, то он выполняет норматив первого разряда. Во сколько раз спортсмен должен увеличить скорость бега, если он хочет выполнить норматив кандидата в мастера спорта (КМС), а увеличить скорость плавания и езды на велосипеде он не в состоянии?

Средняя скорость кандидата в мастера спорта на всей дистанции должна быть в $\alpha = 27/25$ раза больше, чем средняя скорость перворазрядника.

3. Вода в кубе. Сосуд представляет собой куб с длиной ребра a. Его внутренняя полость также имеет форму куба с длиной ребра $3a/5$. Толщина всех стенок сосуда одинакова. На уровне дна полости и в её потолке имеются сквозные отверстия малого диаметра. Нижнее отверстие закрыто пробкой. Куб заполнили водой, поместили в цилиндр с площадью дна $3a^2$ и вынули пробку из отверстия. Определите уровень воды h, установившийся в цилиндре (h измеряют ото дна цилиндра). Сосуд не всплывает.


a

Примечание. В открытых сообщающихся сосудах устанавливается одинаковый уровень воды.

4. Плотность стенок. Сосуд из предыдущей задачи заполнили жидкостью плотностью ρ_1 = 1,25 г/см^3. Чему равна плотность ρ_2 его стенок, если средняя плотность заполненного сосуда оказалась равной $\rho_{ср}$ = 2,23 г/см^3?

1. Ехали Медведи. Из пункта A в пункт B по прямой дороге ехали медведи на велосипеде, а за ними раки на хромой собаке и ещё комарики на воздушном шарике. Все они стартовали одновременно. Медведи приехали в пункт B через пятнадцать минут. Через три минуты после них приехали раки, а комарики отстали от медведей на десять минут.
Если бы комарики полетели сами, а не на воздушном шарике, то они обогнали бы медведей на пять минут.

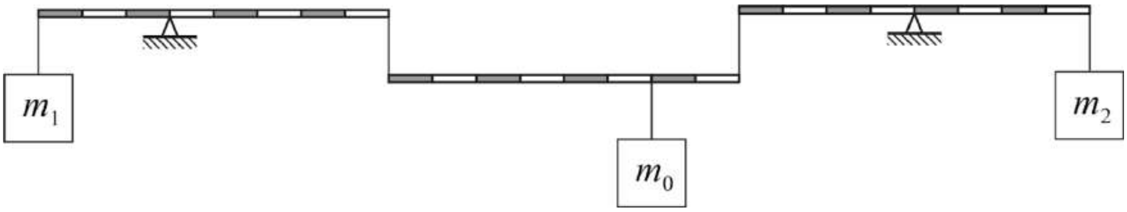
(a) На сколько минут отстали бы комарики от медведей, если бы в день путешествия комарики летели сами, а ветер дул в другую сторону с той же скоростью? Ветер на медведей не влияет!

(b) Во сколько раз скорость медведей на велосипеде больше скорости хромой собаки?

2. Ускорил? Желая скорее довести кастрюлю с холодной водой $\left(t_1 = 20^\circ\mathrm{C}\right)$ до кипения $\left(t_\text{к} = 100^\circ\mathrm{C}\right)$, экспериментатор Глюк подлил в неё горячей воды $\left(t_2 = 60^\circ\mathrm{C}\right)$, объём которой составил $\alpha = 20\%$ от начального объёма воды в кастрюле, и включил нагреватель. Определите, во сколько раз изменилось время нагрева воды до температуры кипения.
Теплоёмкостью кастрюли по сравнению с теплоёмкостью воды в ней можно пренебречь. Мощность нагревателя постоянна. Тепловые потери не учитывайте.

3. Плотность к плотности. Два кубика одинаковых размеров, изготовленные из разных материалов, поставили на столе один на другой. Если все линейные размеры нижнего кубика увеличить в 2 раза, а верхнего кубика в 3 раза, не изменяя при этом их плотности, то давление на стол увеличится в 4 раза. Найдите отношение плотностей материалов, из которых изготовлены эти кубики.

4. Подвисли. Находящаяся в равновесии система состоит из трёх лёгких горизонтальных рычагов и трёх грузов, подвешенных на нитях. Рычаги разделены на 8 равных частей. Масса центрального груза $m_0 = 2{,}4$ кг. Крайние рычаги могут вращаться вокруг неподвижных опор, а средний соединён с ними с помощью нитей.



Определите силы натяжения всех нитей. Трения в системе нет. Коэффициент $g = 10$ Н/кг.

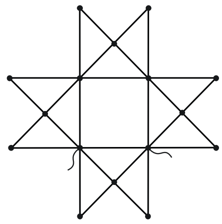
1. Песнь льда и воды. Смесь льда и воды общей массой m поместили в морозильную камеру, заметив, что часы в этот момент показывали время 12:00. Затем провели два измерения температуры смеси: в 13:55 термометр показал $t_1 = -5$ °C, а в 14:05 $t_2 = -15$ °C. Определите:

1) Массовую долю льда в исходной смеси;

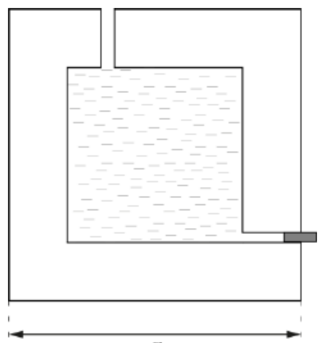
2) Определите показания часов в момент, когда вся вода кристаллизовалась.

Удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг, удельная теплоёмкость воды $c_в = 4{,}2$ кДж/(кг·°C), удельная теплоёмкость льда $c_л = 2{,}1$ кДж/(кг·°C), температура плавления льда $t_0 = 0$ °C. Количество теплоты, отбираемое у смеси в единицу времени морозильной камерой, считайте постоянной.

2. *R*-звезда. Определите эквивалентное сопротивление проволочной сетки, изображённой на рисунке. Сопротивление каждого отрезка (вне зависимости от длины) равно R.

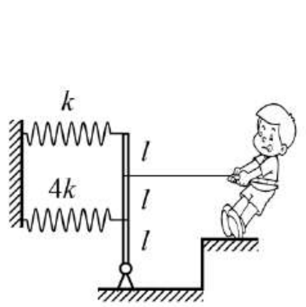


3. Куб. Сосуд представляет собой куб с длиной ребра a. Его внутренняя полость также имеет форму куба с длиной ребра $3a/5$. Толщина всех стенок одинакова. Плотность материала сосуда 3ρ. На уровне дна полости и в её потолке имеются сквозные отверстия малого диаметра. Нижнее отверстие закрыто пробкой. Куб заполнили водой плотностью ρ, поместили в цилиндр с площадью шероховатого дна $3a^2$ и вынули пробку из отверстия. Во сколько раз отличаются силы давления сосуда на дно цилиндра до извлечения пробки и после прекращения вытекания жидкости?



4. Перемещённый путь. Тело двигалось с постоянной скоростью υ. В момент времени t_0 у него появилось постоянное ускорение. Через некоторое время после появления ускорения скорость тела оказалась в 2 раза меньше υ. Определите отношение модуля перемещения к пути от начала ускоренного движения до этого момента. Считайте, что тело двигалось вдоль одной прямой.

5. Как, жёстко? Две параллельные лёгкие пружины соединены с закреплённым в шарнире лёгким рычагом. Коэффициенты жёсткости пружин равны k и $4k$. Определите:



1) какой эквивалентный коэффициент жёсткости системы k_0 определит тянущий за нить экспериментатор;

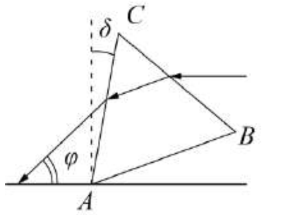
2) чему будет равна сила Q, действующая на рычаг со стороны шарнира, если тянуть за нить силой F;

3) куда направлена сила Q?

Точки крепления нити и пружин делят рычаг на три равные части. Угол α отклонения рычага от вертикали можно считать малым (α<<1), нить и пружины горизонтальны.

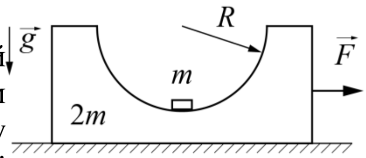
1. Прыг-скок. С некоторой высоты над горизонтальной поверхностью пола с нулевой начальной скоростью отпустили теннисный мяч. Известно, что при каждом ударе кинетическая энергия уменьшалась на 19 % (от значения до удара). Движение мяча прекратилось через время $\tau = 7$ с. Определите скорость υ_2 мяча сразу после второго удара. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

2. Сквозь призму. Луч света распространяется параллельно поверхности, на которой установлена равносторонняя треугольная стеклянная призма, грань AC которой образует угол $\delta = 18^\circ$ с нормалью к поверхности. Преломившись, луч света распространяется внутри призмы параллельно основанию AB. Определите:

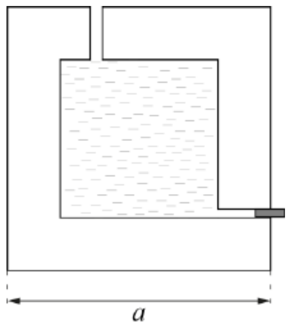


1) угол φ между лучом, вышедшим из призмы, и поверхностью, на которой она установлена;
2) коэффициент преломления n стекла.

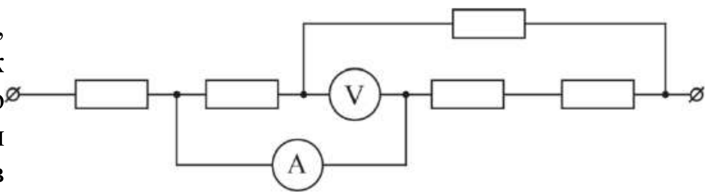
3. В лунке. В бруске, находящемся на горизонтальной поверхности, сделано гладкое сферическое углубление радиусом R. В углублении лежит маленькая шайба массы m. К бруску прикладывают горизонтальную силу F, плавно увеличивая её значение от 0 до F_0. Найдите максимальную высоту, на которую поднимется шайба, если масса бруска $2m$. Ускорение свободного падения g. Трением в системе можно пренебречь.



4. Гидростатика. Сосуд представляет собой куб с длиной ребра a. Внутренняя полость сосуда также имеет форму куба с длиной ребра $4a/5$. Толщина всех стенок сосуда одинакова. Плотность материала, из которого изготовлен сосуд, 3ρ. На уровне дна полости и в её потолке имеются сквозные отверстия малого диаметра. Сосуд заполнен водой (плотность воды ρ). Нижнее отверстие закрыто пробкой. Сосуд помещают в пустой цилиндр с площадью дна $3a^2$. Стык между сосудом и дном цилиндра герметизируют, чтобы вода под сосуд не подтекала. При этом воздух между неровностями сосуда и дном цилиндра остаётся при атмосферном давлении. Затем вынимают пробку из отверстия куба. Во сколько раз отличаются силы давления сосуда на дно цилиндра до извлечения пробки и после прекращения вытекания жидкости?

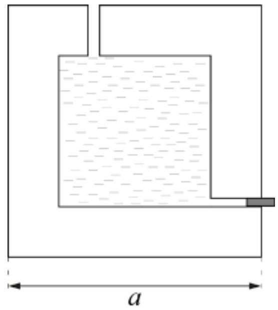


5. Почти идеально. Участок цепи, показанный на рисунке, подключён к идеальному источнику постоянного напряжения. Идеальные приборы показывают 2 А и 6 В. Все резисторы в цепи одинаковые.

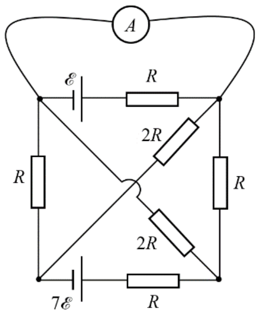


Определите:
1) сопротивление одного резистора R;
2) напряжение источника U_0;
3) показания приборов, если их поменять местами;
4) тепловую мощность, выделяющуюся на крайнем левом резисторе, если приборы в цепи поменяют местами.

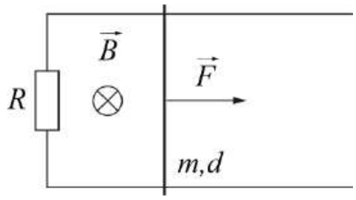
11 класс

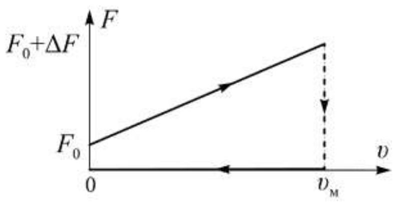


1. Куб. Сосуд представляет собой куб с длиной ребра a. Внутренняя полость сосуда также имеет форму куба с длиной ребра $4a / 5$. Толщина всех стенок сосуда одинакова. Плотность материала, из которого изготовлен сосуд, 3ρ. На уровне дна полости и в её потолке имеются сквозные отверстия малого диаметра. Сосуд заполнен водой (плотность воды ρ). Нижнее отверстие закрыто пробкой. Сосуд помещают в пустой цилиндр с площадью шероховатого дна $3a^2$. Затем вынимают пробку из отверстия куба. Во сколько раз отличаются силы давления сосуда на дно цилиндра до извлечения пробки и после прекращения вытекания жидкости?



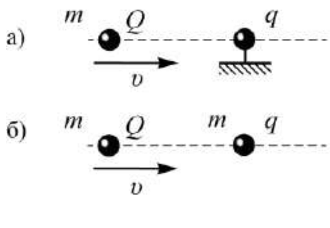
2. Идеальные показания. Электрическая цепь, схема которой представлена на рисунке, состоит из двух идеальных источников ЭДС, шести резисторов и одного идеального амперметра. Определите показания амперметра. ЭДС источников и сопротивления резисторов указаны на рисунке. Сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь.





3. Квазицикл. На горизонтальных проводящих рельсах лежит перемычка массой m. Расстояние между рельсами d. Цепь помещена в однородное вертикальное магнитное поле B и замкнута на сопротивление R. Электрическое сопротивление рельсов мало. В начальный момент времени на перемычку начинает действовать горизонтальная сила F_0. При этом зависимость приложенной силы $F(v)$ от скорости перемычки линейна, а перемычка движется с постоянным ускорением. Когда скорость перемычки стала равна u, действие силы прекратилось. Трения нет. Определите:

1) направления тока в перемычке и силы Ампера, действующей не неё при разгоне (сделайте рисунок);
2) ускорение a, с которым двигалась перемычка при разгоне;
3) ΔF;
4) перемещение S перемычки за всё время движения.



4. Пролёт. Небольшой шарик массой m с электрическим зарядом Q может сблизиться до расстояния $l = 10$ см с таким же закреплённым шариком с зарядом q, если вдалеке ему сообщить скорость v (рисунок а). До какого минимального расстояния s сблизятся шарики, если второй не будет закреплён (рисунок б)?

5. Скороварка. В кастрюле-скороварке крышка закрывается герметично, но в ней имеется предохранительный клапан, который открывается, когда давление p газа внутри кастрюли превышает атмосферное давление p_0 в 2 раза. Пустую кастрюлю закрыли при нормальных условиях (давление p_0, температура T_0). В этот момент внутренняя энергия воздуха в ней равнялась U_0. Затем воздух в окружающей среде медленно нагрели до $4T_0$, а затем остудили до первоначальной температуры. Считая, что стенки кастрюли хорошо проводят тепло, постройте график зависимости внутренней энергии U воздуха в кастрюле от температуры T воздуха в окружающей среде в процессе его нагревания и охлаждения. Укажите на графике значения физических величин в характерных точках. Наружное давление оставалось неизменным.

1. На дальних берегах. В Египетской системе измерений существовали меры длины: атур обычный, атур царский, парасанг, шем. Атур царский равнялся 1,5 парасангам. Один шем равнялся 1,2 атура обычного. Определите, какой атур больше и во сколько раз, если один парасанг равен 1,1 шема.

Возможное решение:
Выразим оба атура через одну и ту же единицу (например, шем):
Атур обычный = 10/12 шема.
Атур царский = 1,5*1,1 шема =33/20 шема
Сравним атуры (любым способом: вычитанием, делением, приведением к общему знаменателю и т.д.):

$$\frac{\text{Царский}}{\text{Обычный}} = \frac{33}{20}\frac{12}{10} = 1{,}98$$

Значит царский атур больше почти в 2 раза

Критерии оценивания.

№	критерий	баллы
1.	Идея выражения через одинаковую единицу	2
2.	Правильно выражен царский атур	2
3.	Правильно выражен обычный атур	2
4.	Сделан обоснованный вывод о том, что царский атур больше	2
5.	Найдено правильное соотношение атуров	2
итого:		**10**

2. Триатлон. На соревнованиях по триатлону спортсмен должен проплыть дистанцию S = 1 500 м, затем проехать на велосипеде расстояние $80S/3$, а на заключительном этапе пробежать трассу длиной $20S/3$. Если спортсмен едет на велосипеде со скоростью v = 40 км/час, плывёт со скоростью 0,09υ и бежит со скоростью 0,3υ, то он выполняет норматив первого разряда. Во сколько раз спортсмен должен увеличить скорость бега, если он хочет выполнить норматив кандидата в мастера спорта (КМС), а увеличить скорость плавания и езды на велосипеде он не в состоянии?

Средняя скорость кандидата в мастера спорта на всей дистанции должна быть в α = 27/25 раза больше, чем средняя скорость перворазрядника.

Возможное решение. Обозначим v_1скорость бега при выполнении норматива КМС. Так как средняя скорость должна увеличиться в $\frac{27}{25}$ раза, то время на прохождение всей дистанции должно уменьшиться в $\frac{25}{27}$ раза. Время прохождения дистанции складывается из времен прохождения отдельных этапов. Запишем уравнение:

$$\frac{25}{27}\left(\frac{100S}{9v}+\frac{80S}{3v}+\frac{20\cdot 10S}{3\cdot 3v}\right)=\frac{100S}{9v}+\frac{80S}{3v}+\frac{20S}{3v_1}$$

Сокращая S и решая полученное уравнение относительно v_1, получаем

$$\frac{v_1}{v}=\frac{3}{8}$$

Так как по условию скорость бега при выполнении номы первого разряда равна $\frac{3}{10}v$, то спортсмену придется ее увеличить в $\frac{3\cdot 10v}{8\cdot 3v}=\ \frac{5}{4}=1{,}25$ раза.

Учащиеся могут подставить в условие значения всех скоростей и расстояний в цифрах. На соревнованиях по триатлону спортсмен должен проплыть дистанцию S = 1,5 км, затем проехать на велосипеде расстояние 40 км, а на заключительном этапе пробежать трассу длиной 10 км. Если спортсмен едет на велосипеде со скоростью v = 40 км/час, плывет со скоростью 3,6 км/час и бежит со скоростью 12 км/час, то он как раз выполняет норматив первого разряда. Во сколько раз спортсмен должен увеличить скорость бега, если он хочет выполнить норматив кандидата в мастера спорта (КМС), а увеличить скорость плавания и езды на велосипеде он не в состоянии? Средняя скорость кандидата в мастера спорта на всей дистанции должна быть в α = 1,08 раза больше, чем средняя скорость перворазрядника.

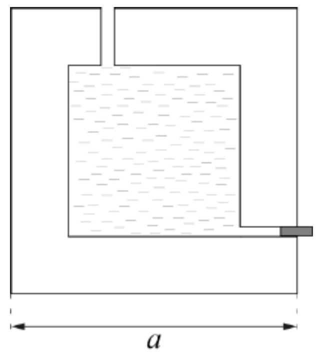
Тогда возможно решение. Время заплыва 5/12 часа = 25 минут. Время езды на велосипеде 1 час = 60 минут. Время бега 10/12 часа = 50 минут. Общее время спортсмена на дистанции 2 часа 15 минут или 135 минут.

Время КМС на дистанции 135 мин. х 25/27 = 125 мин = 2 часа 5 минут.

Это время нужно сократить на 10 мину (135 мин – 125 мин) и это сокращение будет при беге. КМС должен пробежать дистанцию за 40 минут (50 – 10). Следовательно, его скорость должна возрасти в 50/40 = 1,25 раз.

Критерии оценивания.

№	критерий	баллы
1.	Понимание того, что такое средняя скорость	2
2.	Уравнение, связывающее времена прохождения дистанции в двух случаях	3
3.	Найдено, что $v_1 = \frac{3}{8}v$	3
4.	Найдено, что v_1 превышает начальную скорость бега в 1,25 раза	2
итого:		**10**



3. Вода в кубе. Сосуд представляет собой куб с длиной ребра a. Его внутренняя полость также имеет форму куба с длиной ребра $3a/5$. Толщина всех стенок сосуда одинакова. На уровне дна полости и в её потолке имеются сквозные отверстия малого диаметра. Нижнее отверстие закрыто пробкой. Куб заполнили водой, поместили в цилиндр с площадью дна $3a^2$ и вынули пробку из отверстия. Определите уровень воды h, установившийся в цилиндре (h измеряют ото дна цилиндра). Сосуд не всплывает.
Примечание. В открытых сообщающихся сосудах устанавливается одинаковый уровень воды.

Возможное решение. Возможны два сценария развития событий. Либо вода полностью выльется из полости и ее уровень окажется ниже отверстия в стенке сосуда, либо уровень воды окажется выше уровня отверстия и, следовательно, в полости останется некоторое количество воды. Проверим сначала первый вариант. Используем равенство начального объема воды и объема воды, вылившейся в стакан.
$\frac{27}{125}a^3 = (3a^2 - a^2)h$, где h – искомая высота уровня воды. После вычислений получаем:

$$\frac{27}{125}a^3 = 2a^2h, \quad h = \frac{27}{250}a = 0{,}108a$$

Это значительно меньше толщины стенки сосуда d, которая в нашем случае равна
$d = \frac{a - \frac{3}{5}a}{2} = \frac{1}{5}a$. Значит, реализуется именно этот вариант.
Ответ: $h = \frac{27}{250}a$.

Критерии оценивания.

№	критерий	баллы
1.	Идея равенства объемов воды до и после выливания	1
2.	Правильно записанный объем воды до выливания	2
3.	Правильно записанный объем после выливания	2
4.	Правильно найдена толщина стенки	1
5.	Численный ответ	2
6.	Слова о реализации именного этого сценария	2
итого:		**10**

4. Плотность стенок. Сосуд из предыдущей задачи заполнили жидкостью плотностью ρ_1 = 1,25 г/см^3. Чему равна плотность ρ_2 его стенок, если средняя плотность заполненного сосуда оказалась равной $\rho_{ср}$ = 2,23 г/см^3?

Возможное решение. Средняя плотность сосуда с жидкостью $\rho_{ср}$ равна его полной массе, деленной на его объем $V_с$. Полная масса складывается из массы жидкости $m_ж = \rho_ж V_ж$ и массы стенок $m_{ст} = \rho_{ст} V_{ст}$

$$V_ж = \frac{27}{125}a^3$$

$$V_{ст} = \left(1 - \frac{27}{125}\right)a^3$$

$\rho_{ср} = \frac{\rho_ж V_ж + \rho_{ст} V_{ст}}{V_с}$, откуда $\rho_{ст} = \frac{\rho_{ср} V_с - \rho_ж V_ж}{V_{ст}} = \frac{2{,}23a^3 - 1.25 \cdot \frac{27}{125}a^3}{\left(1 - \frac{27}{125}\right)a^3} = 2{,}5\ \frac{г}{см^3}$.

Критерии оценивания.

№	критерий	баллы
1.	Записано определение средней плотности	2
2.	Записано выражение для массы жидкости	1
3.	Записано выражение для массы стенок	1
4.	Правильно вычислен объем жидкости	1
5.	Правильно вычислен объем стенок	2
6.	Получен численный ответ	2
7.	Указана единица измерения	1
итого:		**10**

1. Ехали Медведи. Из пункта *A* в пункт *B* по прямой дороге ехали медведи на велосипеде, а за ними раки на хромой собаке и ещё комарики на воздушном шарике. Все они стартовали одновременно. Медведи приехали в пункт *B* через пятнадцать минут. Через три минуты после них приехали раки, а комарики отстали от медведей на десять минут.

Если бы комарики полетели сами, а не на воздушном шарике, то они обогнали бы медведей на пять минут.

(a) На сколько минут отстали бы комарики от медведей, если бы в день путешествия комарики летели сами, а ветер дул в другую сторону с той же скоростью? Ветер на медведей не влияет!

(b) Во сколько раз скорость медведей на велосипеде больше скорости хромой собаки?

Возможное решение.

Все пути, пройденные участниками мероприятия одинаковые. Время движения хромой собаки (с раками) составляет $t_р$ = 18 минут.

$$\frac{\upsilon_{мед}}{\upsilon_{соб}} = \frac{L}{t_{мед}} \div \frac{L}{t_{соб}} = \frac{t_{соб}}{t_{мед}} = \frac{18}{15} = 1{,}2$$

Время движения комариком на воздушном шарике составляет $t_ш$ = 25 минут. Шарик двигается только за счёт ветра (комарикам его не разогнать), значит в этот день ветер был попутный.

$$\frac{\upsilon_{мед}}{\upsilon_{вет}} = \frac{L}{t_{мед}} \div \frac{L}{t_{вет}} = \frac{t_{вет}}{t_{мед}} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$$

$$\upsilon_{вет} = \frac{3}{5}\upsilon_{мед}$$

Если бы комарики летели сами, то их скорость складывалась бы со скоростью ветра

$$\frac{\upsilon_{мед}}{\upsilon_{вет} + \upsilon_{ком}} = \frac{L}{t_{мед}} \div \frac{L}{t_{вет+ком}} = \frac{t_{вет+ком}}{t_{мед}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\upsilon_{вет} + \upsilon_{ком} = \frac{3}{2}\upsilon_{мед}$$

$$\upsilon_{ком} = \frac{9}{10}\upsilon_{мед}$$

Если бы комарики летели против ветра, то из их скорости вычиталась бы со скорость ветра:

$$\upsilon_{ком} - \upsilon_{вет} = \frac{9}{10}\upsilon_{мед} - \frac{6}{10}\upsilon_{мед} = \frac{3}{10}\upsilon_{мед}$$

Тогда время движения комариков против ветра

$$\frac{t_{против}}{t_{мед}} = \frac{L}{\upsilon_{ком} - \upsilon_{вет}} \div \frac{L}{\upsilon_{мед}} = \frac{\upsilon_{мед}}{\frac{3}{10}\upsilon_{мед}} = \frac{10}{3}$$

$$t_{против} = \frac{10}{3}t_{мед} = 50 \text{ минут}$$

А отставание составило бы 35 минут.

Критерии оценивания.

№	**критерий**	**баллы**
1.	Указано, что пути одинаковые	1
2.	Формула скорости в любом виде: $l = \upsilon t$	1
3.	Получен ответ: $\upsilon_{мед} > \upsilon_{соб}$ в 1,2 раза	2
4.	Формула (или словесное описание) скорости при движении по ветру: $\upsilon = \upsilon_{ком} + \upsilon_{ветра}$	1
5.	Формула (или словесное описание) скорости при движении против ветра: $\upsilon = \upsilon_{ком} - \upsilon_{ветра}$	1
6.	Найдено время путешествия комариков: 50 минут	3
7.	Найдено отставание комариков: 35 минут	1
итого:		**10**

2. Ускорил? Желая скорее довести кастрюлю с холодной водой $\left(t_1 = 20^\circ\text{C}\right)$ до кипения $\left(t_\text{к} = 100^\circ\text{C}\right)$, экспериментатор Глюк подлил в неё горячей воды $\left(t_2 = 60^\circ\text{C}\right)$, объём которой составил $\alpha = 20\%$ от начального объёма воды в кастрюле, и включил нагреватель. Определите, во сколько раз изменилось время нагрева воды до температуры кипения.

Теплоёмкостью кастрюли по сравнению с теплоёмкостью воды в ней можно пренебречь. Мощность нагревателя постоянна. Тепловые потери не учитывайте.

Возможное решение.

Количество теплоты, которое передаёт кастрюле нагреватель с постоянной мощностью N пропорционально времени τ.

Нагревание исходного количества воды описывается уравнением:

$$cm(t_к - t_1) = N\tau_1$$

Масса воды пропорциональна её объёму. Значит нагревание смеси воды описывается уравнением:

$$cm(t_к - t_1) + c\alpha m(t_к - t_2) = N\tau_2$$

Сравним времена поделив второе уравнение на первое:

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{cm(t_к - t_1) + c\alpha m(t_к - t_2)}{cm(t_к - t_1)} = 1 + \alpha\frac{(t_к - t_2)}{(t_к - t_1)} = 1{,}1$$

Время нагревания увеличилось в 1,1 раза.

Критерии оценивания.

№	**критерий**	**баллы**
1.	Использовано выражение связи теплоты, мощности и времени	1
2.	Использовано выражение для количества теплоты в процессе нагревания	1
3.	Правильно описано нагревание исходного количества воды	2
4.	Правильно описано нагревание смеси	2
5.	Правильно найдено отношение времён	3
6.	Сделан вывод об увеличении времени нагрева	1
итого:		**10**

3. Плотность к плотности. Два кубика одинаковых размеров, изготовленные из разных материалов, поставили на столе один на другой. Если все линейные размеры нижнего кубика увеличить в 2 раза, а верхнего кубика в 3 раза, не изменяя при этом их плотности, то давление на стол увеличится в 4 раза. Найдите отношение плотностей материалов, из которых изготовлены эти кубики.

Возможное решение.
Давление кубиков на стол пропорционально их суммарной массе, и обратно пропорционально площади нижнего кубика.

$p = \frac{m_в + m_н}{S_н} g$, где коэффициент g = 10 Н/кг.

Для первого случая: $p_1 = \frac{\rho_в a^3 + \rho_н a^3}{a^2} g$, где a - длина ребра исходных кубов.

Для второго случая: $4p_1 = \frac{\rho_в (3a)^3 + \rho_н (2a)^3}{(2a)^2} g = \frac{27\rho_в a^3 + 8\rho_н a^3}{4a^2} g$

Поделив друг на друга два этих выражения получим:

$$16\rho_в a^3 + 16\rho_н a^3 = 27\rho_в a^3 + 8\rho_н a^3$$

Откуда

$$16\rho_в a^3 + 16\rho_н a^3 = 27\rho_в a^3 + 8\rho_н a^3$$

$$\frac{\rho_в}{\rho_н} = \frac{8}{11} \approx 0{,}73$$

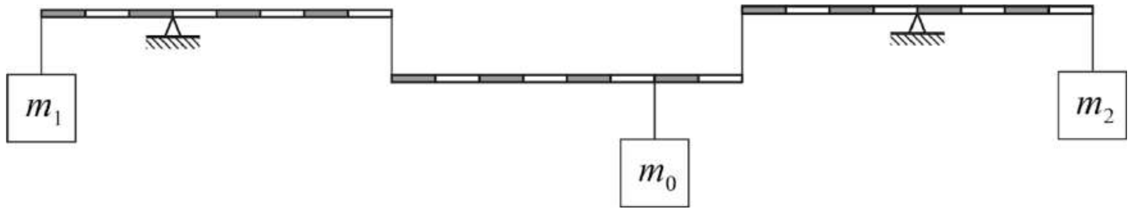
или

$$\frac{\rho_н}{\rho_в} = \frac{11}{8} \approx 1{,}4$$

Критерии оценивания.

№	**критерий**	**баллы**
1.	Использовано выражение для давления	1
2.	Использована связь массы, плотности и объёма	1
3.	Использовано выражение для объёма куба	1
4.	Правильно записано выражение для давления в первой ситуации через плотности и длину ребра	2
5.	Правильно записано выражение для давления во второй ситуации через плотности и длину ребра	2
6.	Найдено отношение плотностей	3
итого:		**10**

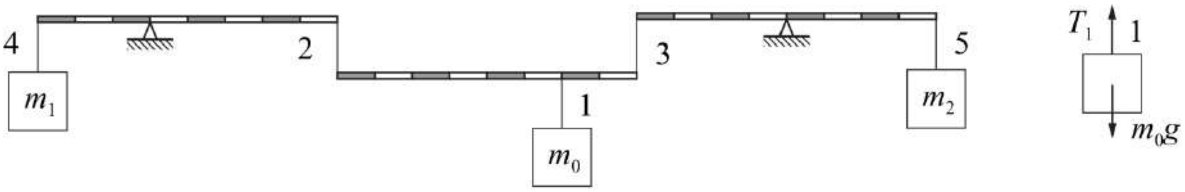
4. Подвисли. Находящаяся в равновесии система состоит из трёх лёгких горизонтальных рычагов и трёх грузов, подвешенных на нитях. Рычаги разделены на 8 равных частей. Масса центрального груза $m_0 = 2{,}4$ кг. Крайние рычаги могут вращаться вокруг неподвижных опор, а средний соединён с ними с помощью нитей.

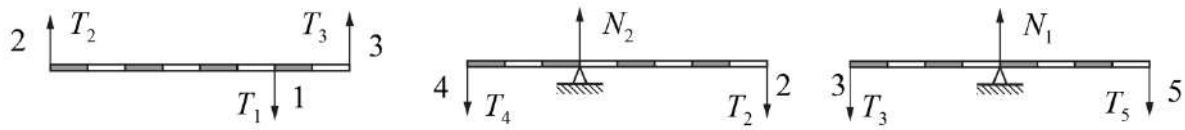


Определите силы натяжения всех нитей. Трения в системе нет. Коэффициент $g = 10$ Н/кг.

Возможное решение.

Отметим, что в условиях равновесия системы силы натяжения нитей с грузами численно равны силам тяжести действующим на грузы. В частности, $T_1 = m_0g = 24$ Н. Расставим силы, действующие на рычаги.





Запишем правило моментов для центрального рычага относительно точки 2:

$T_1\,6l = T_3\,8l \rightarrow T_3 = T_1\,6/8 = 18$ Н. l - длина сегмента рычага.

Запишем правило моментов для центрального рычага относительно точки 3:

$T_1\,2l = T_2\,8l \rightarrow T_2 = T_1\,2/8 = 6$ Н.

Запишем правило моментов для левого рычага относительно точки опоры:

$T_4\,3l = T_2\,5l \rightarrow T_4 = T_2\,5/3 = 10$ Н.

Запишем правило моментов для правого рычага относительно точки опоры:

$T_3\,4l = T_5\,4l \rightarrow T_5 = T_3 = 18$ Н.

№	критерий	баллы
1.	Указано, что силы натяжения нитей с грузами численно равны силам тяжести действующим на грузы	1.0
2.	Найдена T_1	0.5
3.	На рисунке указаны все 3 силы, действующие на центральный рычаг	0.5
4.	На рисунке указаны все 3 силы, действующие на правый рычаг	0.5
5.	На рисунке указаны все 3 силы, действующие на левый рычаг	0.5
6.	Записаны 2 правила моментов для центрального рычага (по 0,5 балла). Вместо одного из них может быть условие нулевой равнодействующей	1.0
7.	Найдена T_2	1.0
8.	Найдена T_3	1.0
9.	Записано правило моментов для левого рычага.	1.0
10.	Найдена T_4	1.0
11.	Записано правило моментов для правого рычага.	1.0
12.	Найдена T_5	1.0
итого:		**10**

Примечания:

1) Правильное решение неавторским методом оценивается в 10 балов!

2) Вместо рисунков с расстановкой сил может быть словесное описание ситуации с указанием точек приложения.

3) Использование g = 9,8 Н/кг ошибкой не является.

4) Оценка за силы разделяется на 2 части по 0,5 балла: оценка за аналитическую связь с известной силой (засчитывается даже при арифметической ошибке на предыдущем этапе) и балл за правильное численное значение.

1. Песнь льда и воды. Смесь льда и воды общей массой m поместили в морозильную камеру, заметив, что часы в этот момент показывали время 12:00. Затем провели два измерения температуры смеси: в 13:55 термометр показал $t_1 = -5$ ℃, а в 14:05 $t_2 = -15$ ℃. Определите:

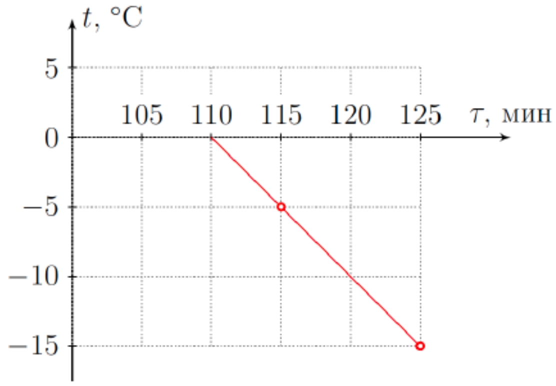
1) Массовую долю льда в исходной смеси;

2) Определите показания часов в момент, когда вся вода кристаллизовалась.

Удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг, удельная теплоёмкость воды $c_в = 4{,}2$ кДж/(кг·°C), удельная теплоёмкость льда $c_л = 2{,}1$ кДж/(кг·°C), температура плавления льда $t_0 = 0$ ℃. Количество теплоты, отбираемое у смеси в единицу времени морозильной камерой, считайте постоянной.

Возможное решение:

Считая мощность морозильной камеры постоянной, мы можем утверждать, что график зависимости температуры содержимого от времени — линейный.



Восстановим участок графика по имеющимся двум точкам и найдем время, которое потребовалось для кристаллизации всей воды в смеси.

110 минут с момента начала эксперимента соответствует времени на часах 13:50.

На первый вопрос можно ответить иначе:

Поскольку обе измеренные температуры ниже нуля, значит все содержимое было в твердом агрегатном состоянии (лед).

Количество теплоты, которое было отведено от содержимого камеры с момента полного замерзания до первого измерения температуры ($\tau_1 = 115$ мин):

$$P \cdot (\tau_1 - \tau_0) = m \cdot c_л \cdot (t_1 - 0)$$

Количество теплоты, которое было отведено от содержимого камеры с момента полного замерзания до второго измерения температуры ($\tau_2 = 125$ мин):

$$P \cdot (\tau_2 - \tau_0) = m \cdot c_л \cdot (t_2 - 0)$$

Решая совместно два последних уравнения, получим

$$\tau_0 = \frac{\tau_2 t_1 - \tau_1 t_2}{t_1 - t_2} = 110 \text{ мин}$$

Массовую долю льда в смеси обозначим как φ. Смесь льда и воды долгое время может находиться в термодинамическом равновесии только при температуре плавления льда, то есть при $0\,℃$. При помещении смеси в морозильную камеру в первую очередь происходит кристаллизация воды, масса доля которой $(1 - \varphi)$:

$$P \cdot \tau_0 = -m \cdot (1-\varphi) \cdot \lambda$$

Возьмём любое из ранее записанных выражений и поделим на последнее:

$$\frac{\tau_2 - \tau_0}{\tau_0} = \frac{c_л \cdot (t_2 - 0)}{-\lambda \cdot (1-\varphi)},$$

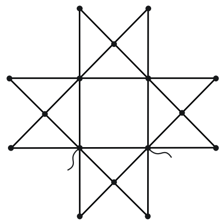
откуда выразим массовую долю:

$$\varphi = 1 - \frac{c_л t_2}{-\lambda} \cdot \frac{\tau_0}{\tau_2 - \tau_0} = 0{,}3.$$

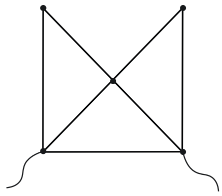
Критерии оценивания.

№	**критерий**	**баллы**
1.	Понимание значения начальной температуры смеси	1
2.	Указана линейность зависимости $t(\tau)$ или $Q(\tau)$ в процессе охлаждения	1
3.	Построены две точки на графике или записаны два уравнения для охлаждения льда	2
4.	Получено численное значение τ_0	1
5.	Указано постоянство температуры смеси при кристаллизации воды	1
6.	Записано выражение для количества теплоты, отводимой при кристаллизации	1
7.	Решена система уравнений и получено выражение для массовой доли	2
8.	Получено правильное численное значение массовой доли льда	1
итого:		**10**

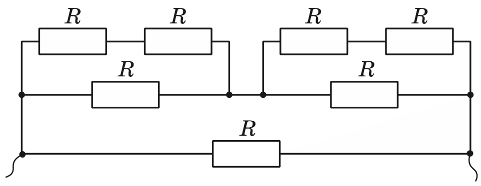
2. *R*-звезда. Определите эквивалентное сопротивление проволочной сетки, изображённой на рисунке. Сопротивление каждого отрезка (вне зависимости от длины) равно R.



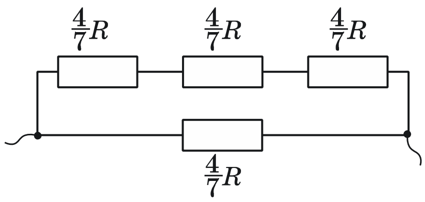
Возможное решение:
Способ 1
Рассмотрим отдельный фрагмент проволочной сетки:



Изобразим эквивалентную схему этого участка:
Применяя формулы последовательного и параллельного соединений, найдем общее сопротивление R_1 выделенного участка:



$R_1 = \frac{4}{7}R$.
Можно заметить, что всю сетку можно преобразовать к виду:



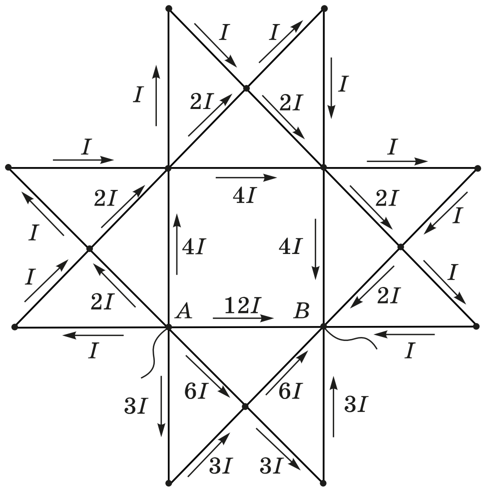
Применяя формулы последовательного и параллельного соединений, найдем эквивалентное сопротивление все проволочной сетки:

$$R_э = \frac{3}{7}R \approx 0{,}43R.$$

Критерии оценивания 1.

№	**критерий**	**баллы**
1.	Изображение эквивалентной схемы для фрагмента	3
2.	Общее сопротивление выделенного фрагмента	2
3.	Эквивалентная схема для всей цепи	2
4.	Эквивалентное сопротивление всей цепи	3
итого:		**10**

Способ 2
Расставим токи в цепи с учетом симметрии и первого правила Кирхгофа.



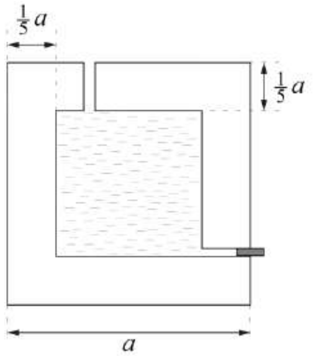
Общий ток I_0 в цепи равен: $I_0 = 28I$; $\varphi_A - \varphi_B = 12IR$.
Эквивалентное сопротивление $R_э$ вычисли с помощью закона Ома:

$$R_э = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{I_o} = \frac{12IR}{28I} = \frac{3}{7}R \approx 0{,}43R.$$

Критерии оценивания 2.

№	**критерий**	**баллы**
1.	Расставлены токи во всех участках цепи	3
2.	Пояснения для каждого соотношения токов	2
3.	Найден общий ток	1
4.	Найдена разность потенциалов между узлами *A* и *B*	1
5.	Найдено эквивалентное сопротивление	3
итого:		**10**

3. Куб. Сосуд представляет собой куб с длиной ребра a. Его внутренняя полость также имеет форму куба с длиной ребра $3a/5$. Толщина всех стенок одинакова. Плотность материала сосуда 3ρ. На уровне дна полости и в её потолке имеются сквозные отверстия малого диаметра. Нижнее отверстие закрыто пробкой. Куб заполнили водой плотностью ρ, поместили в цилиндр с площадью шероховатого дна $3a^2$ и вынули пробку из отверстия. Во сколько раз отличаются силы давления сосуда на дно цилиндра до извлечения пробки и после прекращения вытекания жидкости?



Возможное решение:

Возможны два сценария развития событий. Либо вода полностью выльется из полости и ее уровень окажется ниже отверстия в стенке сосуда, либо уровень воды окажется выше уровня отверстия и, следовательно, в полости останется некоторое количество воды. Второй случай сложнее для вычислений. Проверим сначала первый вариант. Используем равенство начального объема воды и объема воды, вылившейся в стакан.

$\frac{27}{125}a^3 = (3a^2 - a^2)h$, где h – искомая высота уровня воды. После вычислений получаем:

$$\frac{27}{125}a^3 = 2a^2h, \quad h = \frac{27}{250}a$$

Это меньше толщины стенки сосуда d, которая в нашем случае равна

$d = \frac{a-\frac{3}{5}a}{2} = \frac{1}{5}a$. Значит, реализуется первый вариант, когда воды в полости сосуда не остается, а уровень воды в стакане $h = \frac{27}{250}a$.

Сила давления сосуда на дно стакана до открытия отверстия F_1 определяется массой самого сосуда и массой заполняющей его воды

$$F_1 = \left(a^3 - \frac{27}{125}a^3\right)3\rho g + \frac{27}{125}a^3\rho g = \frac{321}{125}a^3\rho g$$

Сила давления сосуда во втором случае F_2 определяется массой самого сосуда минус сила Архимеда, действующая на него

$$F_2 = \left(a^3 - \frac{27}{125}a^3\right)3\rho g - a^2\frac{27}{250}a\rho g = \frac{561}{250}a^3\rho g$$

Найдем отношение $\frac{F_1}{F_2} = \frac{321}{125} \cdot \frac{250}{561} = \frac{642}{561} = \frac{214}{187} \approx 1{,}14$

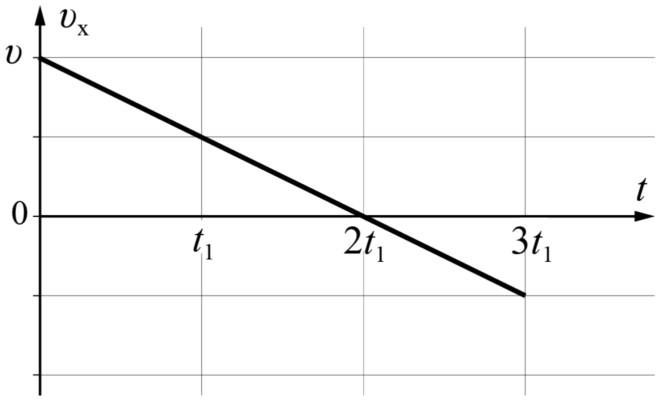
Критерии оценивания.

№	критерий	баллы
1.	Проверка реализации первого сценария (в сосуде не остается воды)	1
2.	Правильно записан объем воды до выливания	1
3.	Правильно записан объем воды после выливания	1
4.	Получен уровень воды в сосуде после вынимания пробки	1
5.	Вычисление силы давления F_1 (до открытия отверстия) (Если использована правильная формула для вычисления, но из-за арифметических ошибок, результат не верный, то 1 балл)	2
6.	Вычисление силы давления F_2 (после открытия отверстия) (Если использована правильная формула для вычисления, но из-за арифметических ошибок, результат не верный, то 1 балл)	3
7.	Получено правильное отношение $\frac{F_1}{F_2}$	1
итого:		**10**

4. Перемещённый путь. Тело двигалось с постоянной скоростью υ. В момент времени t_0 у него появилось постоянное ускорение. Через некоторое время после появления ускорения скорость тела оказалась в 2 раза меньше υ. Определите отношение модуля перемещения к пути от начала ускоренного движения до этого момента. Считайте, что тело двигалось вдоль одной прямой.

Возможное решение:

Построим качественный график зависимости проекции скорости тела от времени. В качестве направления оси x выберем направление начальной скорости υ.



Можно заметить, что скорость тела может быть меньше начальной в 2 момента времени: до ($t = t_1$) и после ($t = 3t_1$) разворота ($t = 2t_1$).

На данном графике перемещение (его проекция) и пройденный путь пропорциональны площади под/над графиком. Разница лишь в том, что для вычисления проекции перемещения площадь над графиком считается отрицательной.

Путь к моменту t_1: $S_1 = \dfrac{3}{4}\upsilon t_1$

Модуль перемещения к моменту t_1: $S_{x1} = \dfrac{3}{4}\upsilon t_1$

Отношение $\dfrac{S_{x1}}{S_1} = 1$

Путь к моменту $3t_1$: $S_2 = \dfrac{5}{4}\upsilon t_1$

Модуль перемещения к моменту $3t_1$: $S_{x2} = \dfrac{3}{4}\upsilon t_1$

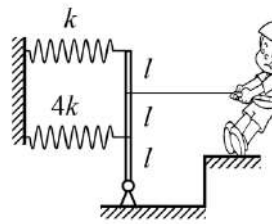
Отношение $\dfrac{S_{x2}}{S_2} = \dfrac{3}{5}$

Критерии оценивания.

№	критерий	баллы
1.	Построен качественный график зависимости скорости от времени	1
2.	Указан способ нахождения пути по графику	1
3.	Указан способ нахождения проекции перемещения по графику	1
4.	Найден S_1	0,5
5.	Найден S_{x1}	0,5
6.	Найдено отношение $\frac{S_{x1}}{S_1}=1$. Если сразу указано, что до разворота искомое отношение равно 1, то пп. 1, 4 и 5 засчитываются автоматически	1
7.	Найден S_2	2
8.	Найден S_{x2}	2
9.	Найдено отношение $\frac{S_{x2}}{S_2}=\frac{3}{5}$.	1
итого:		**10**

Критерии оценивания для аналитического решения.

№	критерий	баллы
1.	Записано уравнение равноускоренного движения	1
2.	Записана связь t_1 (или времени разворота), a и v	1
3.	Указано, что до разворота искомое отношение равно 1 (даже без 1 и 2 пунктов)	3
4.	Найден S_2	2
5.	Найден S_{x2}	2
6.	Найдено отношение $\frac{S_{x2}}{S_2}=\frac{3}{5}$.	1
итого:		**10**



5. Как, жёстко? Две параллельные лёгкие пружины соединены с закреплённым в шарнире лёгким рычагом. Коэффициенты жёсткости пружин равны k и $4k$. Определите:

1) какой эквивалентный коэффициент жёсткости системы k_0 определит тянущий за нить экспериментатор;

2) чему будет равна сила Q, действующая на рычаг со стороны шарнира, если тянуть за нить силой F;

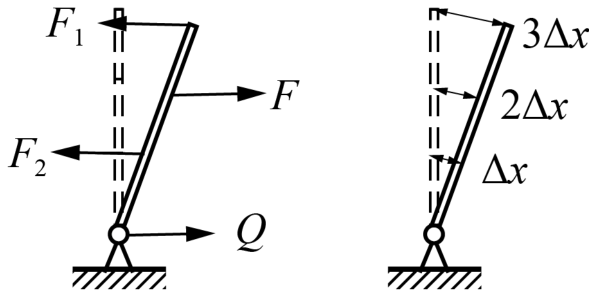
3) куда направлена сила Q?

Точки крепления нити и пружин делят рычаг на три равные части. Угол α отклонения рычага от вертикали можно считать малым (α<<1), нить и пружины горизонтальны.

Возможное решение:

Эквивалентной жёсткостью называют отношение внешней силы F (с которой тянет мальчик) к малому смещению точки приложения этой силы.

На невесомый рычаг действуют две силы упругости F_1 и F_2, сила натяжения нити F и сила реакции шарнира Q. Если угол поворота рычага мал, то силы F_1, F_2 и F — горизонтальные. Следовательно, сила Q тоже направлена горизонтально.



Обозначим малое смещение точки приложения силы F_2 за Δx. Малое смещение точки приложения силы F будет $2\Delta x$, а малое смещение точки приложения силы F_1 будет $3\Delta x$.

Запишем правило моментов относительно оси проходящей через шарнир:

$$F_1 3l + F_2 l = F2l$$

$$k(3\Delta x)3l + 4k\Delta x l = F2l$$

$$F = \frac{13}{2}k\Delta x$$

Тогда эффективная жесткость системы

$$k_0 = \frac{F}{2\Delta x} = \frac{13}{4}k$$

Выразим силы упругости через F:

$$F_1 = \frac{6}{13}F$$

$$F_2 = \frac{8}{13}F$$

Из условия равновесия для сил находим, что $Q = \dfrac{1}{13}F$ и сонаправлена с F.

Критерии оценивания.

№	**критерий**	**баллы**
1.	Использована связь силы упругости с удлинением	1
2.	Верно определено соотношение растяжений пружин	1
3.	Правильно записано правило моментов	2
4.	Сила F выражена через удлинения пружин	1
5.	Найден эффективный коэффициент жёсткости	2
6.	Указана горизонтальность силы Q	0,5
7.	F_1 выражена через F	0,5
8.	F_2 выражена через F	0,5
9.	Указана сонаправленность F и Q	0,5
10.	Найден модуль Q	1
итого:		**10**

1. Прыг-скок. С некоторой высоты над горизонтальной поверхностью пола с нулевой начальной скоростью отпустили теннисный мяч. Известно, что при каждом ударе кинетическая энергия уменьшалась на 19 % (от значения до удара). Движение мяча прекратилось через время $\tau = 7$ с. Определите скорость υ_2 мяча сразу после второго удара. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Возможное решение:

По условию после каждого удара энергия системы уменьшается: $W_{n+1} = 0{,}81 \cdot W_n$, а скорость $\upsilon_{n+1} = \sqrt{0{,}81} \cdot \upsilon_n = 0{,}9 \cdot \upsilon_n$. Значит относительная доля потери скорости равна $\alpha = 0{,}1$. Если начальная высота мяча была равна h, то скорость после n-го удара будет равна: $\upsilon_n = \sqrt{2g \cdot h} \cdot (1-\alpha)^n$.

Время до первого удара $t_0 = \sqrt{\dfrac{2 \cdot h}{g}}$, а время между n-м и n+1-м соударениями $t_n = \dfrac{2 \cdot \upsilon_n}{g} = 2 \cdot \sqrt{\dfrac{2 \cdot h}{g}} \cdot (1-\alpha)^n$.

Тогда соударения шарика со столом прекратятся через время, равное:

$$\tau = t_0 + \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \cdot \left(1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (1-\alpha)^n\right) = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \cdot \left(\frac{2-\alpha}{\alpha}\right).$$

С учётом этого искомая скорость мяча υ_2 сразу после второго удара:

$$\upsilon_2 = \sqrt{2g \cdot h} \cdot (1-\alpha)^2 = \frac{\alpha(1-\alpha)^2}{2-\alpha} g\tau \approx 3{,}0 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

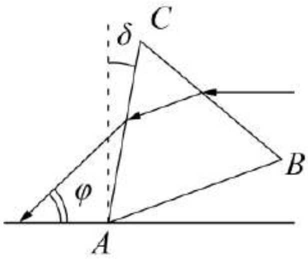
Ответ:

$$\upsilon_2 = \sqrt{2g \cdot h} \cdot (1-\alpha)^2 = \frac{\alpha(1-\alpha)^2}{2-\alpha} g\tau \approx 3{,}0 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Критерии оценивания.

№	**критерий**	**баллы**
1.	Записан закон изменения полной энергии после удара	1
2.	Записан закон изменения максимальной скорости после удара	1
3.	Получено время первого падения	1
4.	Получено время n-го прыжка	1
5.	Установлена связь полного времени движения с начальной высотой или скоростью первого удара	3
6.	Установлена связь скорости υ_2 с начальной высотой или скоростью первого удара	1
7.	Установлена связь скорости υ_2 и полного времени движения	1
8.	Получен численный ответ	1
итого:		**10**

2. Сквозь призму. Луч света распространяется параллельно поверхности, на которой установлена равносторонняя треугольная стеклянная призма, грань AC которой образует угол $\delta = 18^\circ$ с нормалью к поверхности. Луч света преломившись, распространяется внутри призмы параллельно основанию AB. Определите:



1) угол φ между лучом, вышедшим из призмы, и поверхностью, на которой она установлена;
2) коэффициент преломления n стекла.

Возможное решение. $\gamma = 90° - \delta - \beta = 12°$

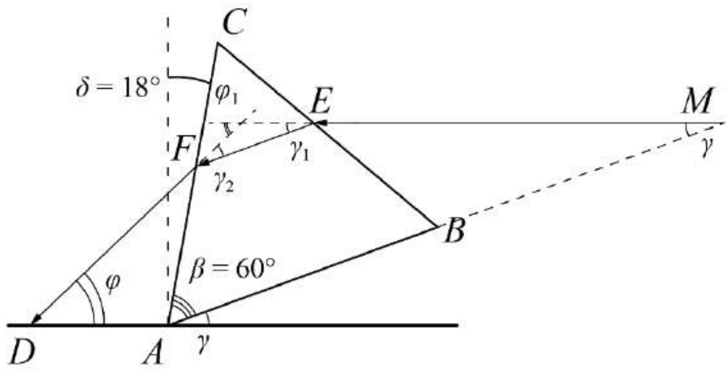
$\begin{cases} \gamma = \gamma_1 \\ \varphi = \varphi_1 \end{cases}$ как внутренние накрест лежащие ($EM \parallel DA$)

$\varphi = \gamma_1 + \gamma_2 = 2\gamma = 24°$ по теореме о внешнем угле треугольника.

Угол падения луча EM на призму $\alpha_1 = 90° - (60° - \gamma) = 42°$

Угол преломления $\alpha_2 = 30° (EF \parallel BA)$

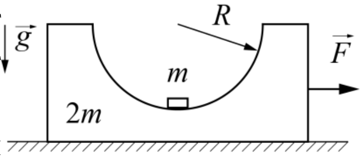
$$n = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \approx 1{,}34$$



Критерии оценивания.

№	критерий	баллы
1.	Найден угол $\gamma = 12^\circ$	1
2.	Показано что $\begin{Bmatrix} \varphi = \varphi_1 \\ \gamma = \gamma_1 \end{Bmatrix}$ как внутренние накрест лежащие или использованы аналогичные соображения	2
3.	Показано что $\varphi_1 = 2\gamma = 24^\circ$ по теореме о внешнем угле треугольника	2
4.	Найден угол падения $\alpha_1 = 42°$	2
5.	Найден угол преломления $\alpha_2 = 30°$	2
6.	Найден показатель преломления: $n \approx 1{,}34$	1
итого:		**10**

3. В лунке. В бруске, находящемся на горизонтальной поверхности, сделано гладкое сферическое углубление радиусом R. В углублении лежит маленькая шайба массы m. К бруску прикладывают горизонтальную силу F, плавно увеличивая её значение от 0 до F_0. Найдите максимальную высоту, на которую поднимется шайба, если масса бруска $2m$. Ускорение свободного падения g. Трением в системе можно пренебречь.



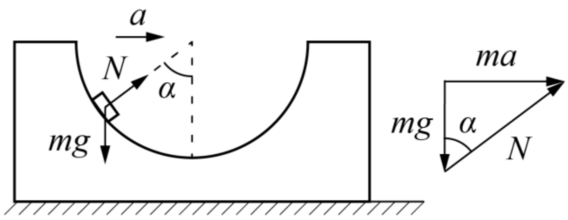
Возможное решение:

При плавном, без сильных рывков, увеличении внешней силы шайба будет постепенно подниматься в лунке, что бы горизонтальная компонента силы реакции со стороны бруска обеспечивала одинаковое с бруском ускорение. Значит максимальный подъём будет при достижении силой значения F_0.

Применим 2й закон Ньютона (в проекции на горизонтальную ось) ко всей системе и найдём ускорение поступательного движения тел:

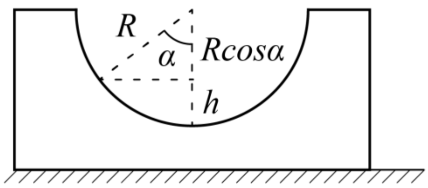
$$3ma = F_0 \Rightarrow a = \frac{F_0}{3m}$$

Запишем 2й закон Ньютона для шайбы в момент наивысшего подъёма:



$$m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g}$$

Далее можно либо через проекции, либо используя векторный треугольник сил связать угол α и F_0:



$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g} = \frac{F_0}{3mg}$$

Высота подъёма h связана с радиусом лунки R и углом α:

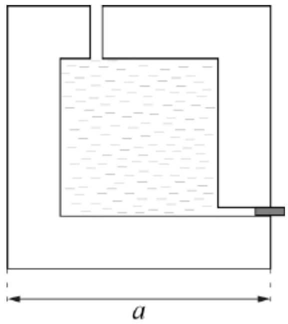
$$h = R(1-\cos\alpha)$$

Осталось связать высоту и силу:

$$h = R(1-\cos\alpha) = R\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}\right) = R\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{F_0}{3mg})^2}}\right) = R\left(1-\frac{3mg}{\sqrt{F_0^2+(3mg)^2}}\right)$$

Критерии оценивания.

№	критерий	баллы
1.	Указано, что максимальный подъём соответствует F_0	1
2.	Указано, что у бруска и шайбы одинаковое ускорение (они неподвижны друг относительно друга)	1
3.	Найдено ускорение a	1
4.	Угол отклонения (любая его тригонометрическая функция) выражен через F_0	2
5.	Высота h связана с углом отклонения	2
6.	h выражен через F_0	3
итого:		**10**



4. Гидростатика. Сосуд представляет собой куб с длиной ребра a. Внутренняя полость сосуда также имеет форму куба с длиной ребра $4a/5$. Толщина всех стенок сосуда одинакова. Плотность материала, из которого изготовлен сосуд, 3ρ. На уровне дна полости и в её потолке имеются сквозные отверстия малого диаметра. Сосуд заполнен водой (плотность воды ρ). Нижнее отверстие закрыто пробкой. Сосуд помещают в пустой цилиндр с площадью дна $3a^2$. Стык между сосудом и дном цилиндра герметизируют, чтобы вода под сосуд не подтекала. При этом воздух между неровностями сосуда и дном цилиндра остаётся при атмосферном давлении. Затем вынимают пробку из отверстия куба. Во сколько раз отличаются силы давления сосуда на дно цилиндра до извлечения пробки и после прекращения вытекания жидкости?

Возможное решение:

Возможны два сценария развития событий. Либо вода полностью выльется из полости и ее уровень окажется ниже отверстия в стенке сосуда, либо уровень воды окажется выше уровня отверстия и, следовательно, в полости останется некоторое количество воды. Второй случай сложнее для вычислений. Проверим сначала первый вариант. Используем равенство начального объема воды и объема воды, вылившейся в стакан.

$\frac{64}{125}a^3 = (3a^2 - a^2)h$, где h – искомая высота уровня воды. После вычислений получаем:

$$\frac{64}{125}a^3 = 2a^2h, \qquad h = \frac{64}{250}a$$

Это больше толщины стенки сосуда d, которая в нашем случае равна $d = \frac{a-\frac{4}{5}a}{2} = \frac{1}{10}a$. Значит, реализуется второй вариант, когда часть воды останется в полости сосуда. Запишем условие равенства объемов воды для второго случая:

$$\frac{64}{125}a^3 = (3a^2 - a^2)h + \frac{16}{25}a^2\left(h - \frac{a - \frac{4}{5}a}{2}\right)$$

$$\frac{64}{125}a^3 = 2a^2h + \frac{16}{25}a^2h - \frac{16}{250}a^3$$

$$\frac{144}{250}a^3 = \frac{66}{25}a^2h$$

$$h = \frac{12}{55}a$$

Таким образом, вода установится на высоте $h = \frac{12}{55}a$ от дна стакана, а в сосуде ее высота окажется равной $h_1 = h - \frac{a-\frac{4}{5}a}{2} = \frac{12}{55}a - \frac{1}{10}a = \frac{13}{110}a$

Сила давления сосуда в первом случае F_1 определяется массой самого сосуда и массой заполняющей его воды

$$F_1 = \left(a^3 - \frac{64}{125}a^3\right)3\rho g + \frac{64}{125}a^3\rho g = \frac{247}{125}a^3\rho g$$

После вынимания пробки часть воды выльется в стакан. Сила Архимеда в данной задаче не возникает, так вода под сосуд не подтекает. Следовательно, сила давления сосуда во втором случае F_2 определяется массой самого сосуда и массой, оставшейся в нем воды (силой давления оставшейся в полости воды на ее дно)

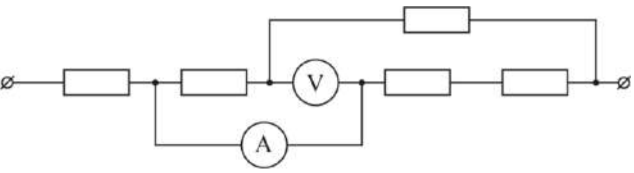
$$F_2 = \left(a^3 - \frac{64}{125}a^3\right)3\rho g + \frac{13}{110}a\frac{16}{25}a^2\rho g = \frac{2117}{1375}a^3\rho g$$

Найдем отношение $\frac{F_1}{F_2} = \frac{247}{125} \cdot \frac{1375}{2117} = \frac{2717}{2117} \approx 1{,}3$

Критерии оценивания.

№	**критерий**	**баллы**
1.	Проверка реализации второго сценария (в сосуде остается вода)	0,5
2.	Правильно записан объем воды до выливания	0,5
3.	Правильно записан объем воды после выливания	1
4.	Получен уровень воды в сосуде после вынимания пробки	2
5.	Вычисление силы давления F_1 (до открытия отверстия) (Если использована правильная формула для вычисления, но из-за арифметических ошибок, результат не верный, то 1 балл)	2
6.	Вычисление силы давления F_2 (после открытия отверстия) (Если использована правильная формула для вычисления, но из-за арифметических ошибок, результат не верный, то 1 балл)	3
7.	Получено правильное отношение $\frac{F_1}{F_2}$	1
итого:		**10**

5. **Почти идеально.** Участок цепи, показанный на рисунке, подключён к идеальному источнику постоянного напряжения. Идеальные приборы показывают 2 А и 6 В. Все резисторы в цепи одинаковые.

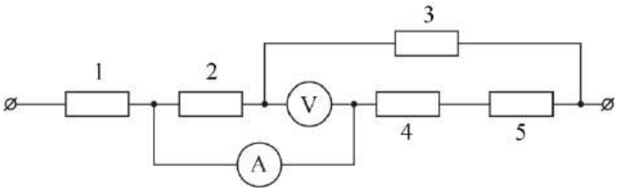


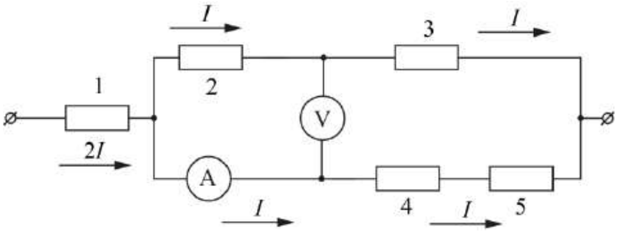
Определите:

1) сопротивление одного резистора R;
2) напряжение источника U_0;
3) показания приборов, если их поменять местами;
4) тепловую мощность, выделяющуюся на крайнем левом резисторе, если приборы в цепи поменяют местами.

Возможное решение:

Перерисуем для удобства схему:



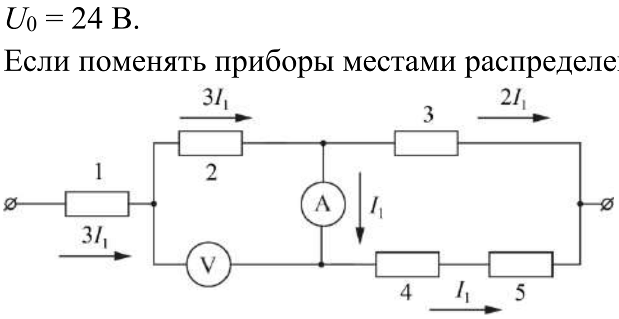


Так как идеальный вольтметр эквивалентен разрыву цепи, а падение напряжения на идеальном амперметре равно 0, то резисторы 2 и 3 параллельны резисторам 4 и 5. Из равенства сопротивлений резисторов следует, что амперметр показывает половину общего тока. Такой же ток бежит через резистор 2, напряжение на котором показывает вольтметр. Значит сопротивление резистора R = 3 Ом.

Напряжение источника падает на резисторах 2 и 3 (по 6 В) и на резисторе 1 (12 В, так как сила тока через него в два раза больше).

U_0 = 24 В.

Если поменять приборы местами распределение токов изменится:



Теперь резисторы 4 и 5 параллельны одному резистору 3, значит ток через них в 2 раза меньший. Через резисторы 1 и 2 бежит общий неразветвленный ток (в 3 раза больший чем через резистор 4), через амперметр ток отводится на ветку 4-5. Общее напряжение не изменилось. Запишем его как сумму падений напряжения на резисторах 1,2 и 3:

$$U_0 = 3I_1R + 3I_1R + 2I_1R$$

$$I_1 = \frac{U_0}{8R} = 1\text{ А}$$

Это и покажет амперметр.

Показания вольтметра равны падению напряжения на резисторе 2:

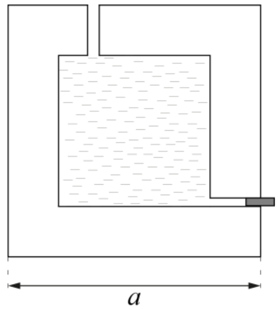
$U = 3I_1R = 9$ В

Тепловую мощность, выделяющуюся на резисторе 1 найдём из закона Джоуля-Ленца:

$N = (3I_1)^2 R = 27$ Вт

Критерии оценивания.

№	критерий	баллы
1.	Получен ответ: 3 Ом	2
	Если верного ответа нет, то можно ставить 1 балл за любые правильные действия, ведущие к ответу (например, верно перерисована схема, или верно расставлены токи в схеме, или есть верно записанный закон Ома)	
2.	Получен ответ: 24 В	2
	Если верного ответа нет, то можно ставить 1 балл за правильные действия, ведущие к ответу (например, первый ответ неверен, а верное решение на него опирается)	
3.	Получен ответ для амперметра: 1 А	2
4.	Получен ответ для вольтметра: 9 В	2
	Если верного ответа нет, то можно ставить 1 балл за любые правильные действия, ведущие к ответу (например, верно перерисована схема, или верно расставлены токи в схеме)	
5.	Получен ответ: мощность 27 Вт	2
	Если верного ответа нет, то можно ставить 1 балл за правильную запись формулы мощности постоянного тока	
итого:		**10**



1. Куб. Сосуд представляет собой куб с длиной ребра a. Внутренняя полость сосуда также имеет форму куба с длиной ребра $4a/5$. Толщина всех стенок сосуда одинакова. Плотность материала, из которого изготовлен сосуд, 3ρ. На уровне дна полости и в её потолке имеются сквозные отверстия малого диаметра. Сосуд заполнен водой (плотность воды ρ). Нижнее отверстие закрыто пробкой. Сосуд помещают в пустой цилиндр с площадью шероховатого дна $3a^2$. Затем вынимают пробку из отверстия куба. Во сколько раз отличаются силы давление сосуда на дно цилиндра до извлечения пробки и после прекращения вытекания жидкости?

Возможное решение:

Возможны два сценария развития событий. Либо вода полностью выльется из полости и ее уровень окажется ниже отверстия в стенке сосуда, либо уровень воды окажется выше уровня отверстия и, следовательно, в полости останется некоторое количество воды. Второй случай сложнее для вычислений. Проверим сначала первый вариант. Используем равенство начального объема воды и объема воды, вылившейся в стакан.

$\frac{64}{125}a^3 = (3a^2 - a^2)h$, где h – искомая высота уровня воды. После вычислений получаем:

$$\frac{64}{125}a^3 = 2a^2h, \quad h = \frac{64}{250}a$$

Это больше толщины стенки сосуда d, которая в нашем случае равна $d = \frac{a-\frac{4}{5}a}{2} = \frac{1}{10}a$. Значит, реализуется второй вариант, когда часть воды останется в полости сосуда. Запишем условие равенства объемов воды для второго случая:

$$\frac{64}{125}a^3 = (3a^2 - a^2)h + \frac{16}{25}a^2(h - \frac{a - \frac{4}{5}a}{2})$$

$$\frac{64}{125}a^3 = 2a^2h + \frac{16}{25}a^2h - \frac{16}{250}a^3$$

$$\frac{144}{250}a^3 = \frac{66}{25}a^2h$$

$$h = \frac{12}{55}a$$

Таким образом, вода установится на высоте $h = \frac{12}{55}a$ от дна стакана, а в сосуде ее высота окажется равной $h_1 = h - \frac{a-\frac{4}{5}a}{2} = \frac{12}{55}a - \frac{1}{10}a = \frac{13}{110}a$

Сила давления сосуда в первом случае F_1 определяется массой самого сосуда и массой заполняющей его воды

$$F_1 = \left(a^3 - \frac{64}{125}a^3\right)3\rho g + \frac{64}{125}a^3\rho g = \frac{247}{125}a^3\rho g$$

После вынимания пробки часть воды выльется в стакан, и сила давления F_2 сосуда на дно стакана во втором случае определяется силой тяжести самого сосуда, минус сила Архимеда, действующая на него. При вычислении силы Архимеда надо понимать, что вода вытесняется только той частью **стенок** сосуда, которые находятся в воде. Силу F_2 можно вычислить также как силу тяжести самого сосуда, плюс сила давления на дно полости слоя воды, находящегося в сосуде, минус сила давления слоя воды в стакане на внешнюю нижнюю грань сосуда. Результат, естественно, будет одинаковым.

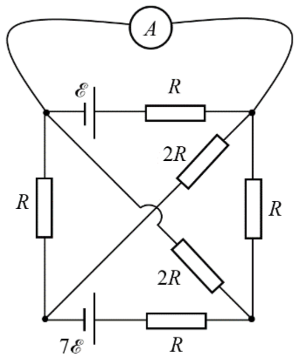
$$F_2 = \left(a^3 - \frac{64}{125}a^3\right)3\rho g + \frac{13}{110}a\frac{16}{25}a^2\rho g - \frac{12}{55}a\rho g a^2 = \frac{1817}{1375}a^3\rho g$$

Найдем отношение $\frac{F_1}{F_2} = \frac{247}{125} \cdot \frac{1375}{1817} = \mathbf{\frac{2717}{1817}} = \frac{11}{23} \cdot \frac{13}{79} \cdot \frac{19}{1}$

Ответ: $\frac{F_1}{F_2} = \frac{2717}{1817} \approx 1{,}5.$

Критерии оценивания.

№	**критерий**	**баллы**
1.	Проверка реализации второго сценария (в сосуде остается вода)	0,5
2.	Правильно записан объем воды до выливания	0,5
3.	Правильно записан объем воды после выливания	1,0
4.	Получен уровень воды в стакане после вынимания пробки	1,0
5.	Получен уровень воды в сосуде после вынимания пробки	1,0
6.	Вычисление силы давления F_1 (до открытия отверстия) (Если использована правильная формула для вычисления, но из-за арифметических ошибок, результат не верный, то 1 балл)	2,0
7.	Вычисление силы давления F_2 (после открытия отверстия) (Если использована правильная формула для вычисления, но из-за арифметических ошибок, результат не верный, то 1 балл)	3,0
8.	Получено правильное отношение $\frac{F_1}{F_2}$	1,0
итого:		**10,0**



2. Идеальные показания. Электрическая цепь, схема которой представлена на рисунке, состоит из двух идеальных источников ЭДС, шести резисторов и одного идеального амперметра. Определите показания амперметра. ЭДС источников и сопротивления резисторов указаны на рисунке. Сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь.

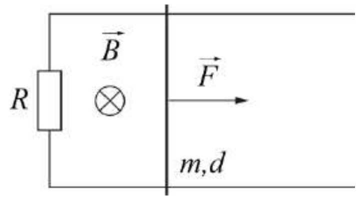
Возможное решение.
Обозначим узлы, как это представлено на рисунке. Так как амперметр идеальный, то точки C и D имеют одинаковый потенциал. Откуда, с учётом закона Ома, сила тока $I_{CD} = \frac{\mathcal{E}}{R}$, а $I_{CB}R = I_{DB}2R, I_{ED}R = I_{EC}2R$.
Для узла E и узла B можно записать первое правило Кирхгофа:
$I_{BE} = I_{EC} + I_{ED} = I_{CB} + I_{DB}$, а для контура $BEDCB$ – второе правило Кирхгофа:
$7\mathcal{E} = I_{BE}R + I_{ED}R + 0 + I_{CB}R$.
Из вышеприведённых соотношений получаем $I_{ED} = \frac{2\mathcal{E}}{R}, I_{DB} = \frac{\mathcal{E}}{R}$.
Из первого правила Кирхгофа для узла D получаем ответ:

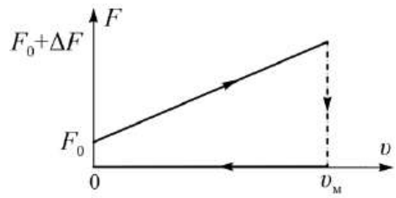
$$I_A = I_{CD} + I_{ED} - I_{DB} = \frac{2\mathcal{E}}{R}.$$

Критерии оценивания.

№	**критерий**	**баллы**
1.	Рисунок с правильной расстановкой токов	2
2.	Найден ток I_{CD}	1
3.	первое правило Кирхгофа для узла E или аналог	1
4.	первое правило Кирхгофа для узла B или аналог	1
5.	второе правило Кирхгофа для контура $BEDCB$ или аналог	1
6.	первое правила Кирхгофа для узла D (или C) или аналог	1
7.	Найден I_A	3
итого:		**10**

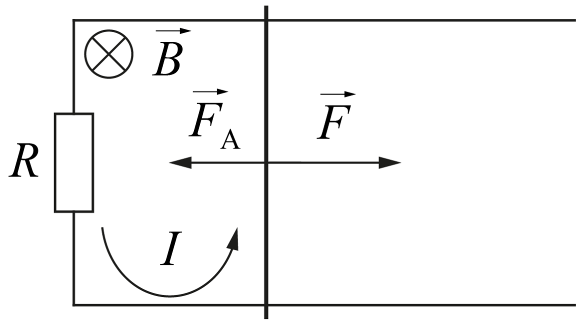
Примечание: пункты 3-6 необходимо интерпретировать, как наличие необходимого количества уравнений для нахождения распределения токов в схеме. Пункт 7 относится к решению системы уравнений и нахождению ответа на поставленный вопрос.





3. Квазицикл. На горизонтальных проводящих рельсах лежит перемычка массой m. Расстояние между рельсами d. Цепь помещена в однородное вертикальное магнитное поле B и замкнута на сопротивление R. Электрическое сопротивление рельсов мало. В начальный момент времени на перемычку начинает действовать горизонтальная сила F_0. При этом зависимость приложенной силы $F(\upsilon)$ от скорости перемычки линейна, а перемычка движется с постоянным ускорением. Когда скорость перемычки стала равна u ($u = \upsilon_m$), действие силы прекратилось. Трения нет. Определите:

1) направления тока в перемычке и силы Ампера действующей не неё при разгоне (сделайте рисунок);
2) ускорение a, с которым двигалась перемычка при разгоне;
3) ΔF;
4) перемещение S перемычки за всё время движения.



ЭДС индукции в движущемся проводнике $\varepsilon_i = B v d$, тогда сила тока $I = \varepsilon_i / R$. Величина силы Ампера $F_A = IBd = (Bd)^2 \upsilon / R$,

Запишем II закон Ньютона для перемычки в произвольный момент времени $ma = (F - F_A)$

Так как ускорение постоянно, а начальная скорость (и сила Ампера) равна 0, то $a = F_0/m$.

К моменту достижения скорости u внешняя сила возросла на величину силы Ампера (так как ускорение, а значит и равнодействующая, не поменялась): $\Delta F = \frac{(Bd)^2 u}{R}$.

Двигаясь равноускорено, перемычка прошла к моменту окончания разгона расстояние перемещение при разгоне $S_1 = \frac{u^2}{2a} = \frac{mu^2}{2F_0}$.

После прекращения действия силы F на перемычку, в горизонтальном направлении на неё будет действовать только сила Ампера $F_A = IBd = (Bd)^2 \upsilon / R$, где υ – модуль мгновенной скорости перемычки. Эта сила сообщает перемычке ускорение $a = F_A / m$, направленное противоположно скорости перемычки.

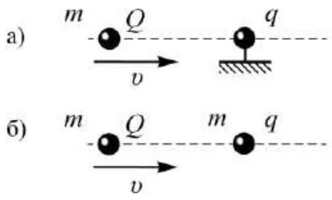
За малый промежуток времени Δt перемычка совершает перемещение, равное по модулю $\Delta S = \upsilon \cdot \Delta t = \upsilon \cdot \Delta \upsilon / a$, где $\Delta \upsilon$ – модуль изменения скорости. Заметим, что $\upsilon / a = mR / (Bd)^2 = const$. Поэтому, при изменении скорости перемычки от u до 0 совершаемое ей перемещение будет равно $S_2 = mRu / (Bd)^2$.

А путь за всё время движения $S = \frac{mR}{(Bd)^2} u + \frac{mu^2}{2F_0}$.

Критерии оценивания.

№	критерий	баллы
1.	верно определено направление силы тока	1.0
2.	верно определено направление силы Ампера	1.0
3.	ЭДС индукции в движущемся проводнике $\varepsilon_i = Bvd$	0.5
4.	величина силы тока $I = \varepsilon_i/R$	0.5
5.	величина силы Ампера $F_A = IBd$	0.5
6.	II закон Ньютона $ma = (F - F_A)$	0.5
7.	при $v = 0$ сила Ампера $F_{\text{A}} = 0$	0.5
8.	ускорение $a = F_0/m$	1.0
9.	$\Delta F = (Bd)^2 u/R$	1.0
10.	перемещение при разгоне $S_1 = \frac{mu^2}{2F_0}$	1.0
11.	связь между ускорением и скоростью при торможении $a_2 = \frac{(Bd)^2}{mR} v$	1.0
12.	перемещение при торможении $S_2 = \frac{mR}{(Bd)^2} u$	1.0
13.	Полный путь $S = \frac{mR}{(Bd)^2} u + \frac{mu^2}{2F_0}$	0.5
итого:		**10**

4. Пролёт. Небольшой шарик массой m с электрическим зарядом Q может сблизиться до расстояния l = 10 см с таким же закреплённым шариком с зарядом q, если вдалеке ему сообщить скорость υ (рисунок (а)). До какого минимального расстояния s сблизятся шарики, если второй не будет закреплён (рисунок (б))?



Возможное решение.

Запишем ЗСЭ для случая *а*:

Начальная кинетическая энергия шарика с зарядом Q перешла в потенциальную энергию взаимодействия зарядов (начальной потенциальной энергией пренебрегаем)

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = k\frac{qQ}{l}$$

Если второй шар не закреплён, то начальная кинетическая энергия шарика с зарядом Q частично перейдёт в кинетическую энергию шара с зарядом q, в потенциальную энергию взаимодействия зарядов на расстоянии s.

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\upsilon_1^2}{2} + \frac{m\upsilon_2^2}{2} + k\frac{qQ}{s}$$

В момент наибольшего сближения скорости у шариков будут одинаковы.

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon_0$$

А из закона сохранения импульса

$$m\upsilon = m\upsilon_1 + m\upsilon_2 = 2m\upsilon_0$$

$$\upsilon_0 = \frac{\upsilon}{2}$$

Подставим всё в закон сохранения энергии для случая *б*:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{8} + \frac{m\upsilon^2}{8} + k\frac{qQ}{s}$$

$$\frac{m\upsilon^2}{4} = k\frac{qQ}{s}$$

Используем первый ЗСЭ и получим

$$s = 2l = 20\text{ см}$$

Критерии оценивания.

№	критерий	баллы
1.	ЗСЭ для первой ситуации	2
2.	ЗСЭ для второй ситуации	2
3.	Условие на скорость для наибольшего сближения	2
4.	ЗСИ для второй ситуации	2
5.	Найдена скорость при наибольшем сближении	0,5
6.	Найдена связь s и l	1
7.	Численный ответ	0,5
итого:		**10**

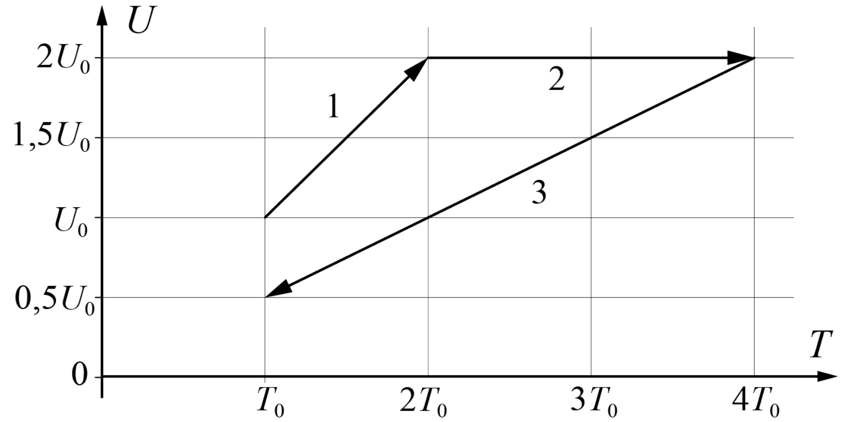
5. Скороварка. В кастрюле-скороварке крышка закрывается герметично, но в ней имеется предохранительный клапан, который открывается, когда давление p газа внутри кастрюли превышает атмосферное давление p_0 в 2 раза. Пустую кастрюлю закрыли при нормальных условиях (давление p_0, температура T_0). В этот момент внутренняя энергия воздуха в ней равнялась U_0. Затем воздух в окружающей среде медленно нагрели до $4T_0$, а затем остудили до первоначальной температуры. Считая, что стенки кастрюли хорошо проводят тепло, постройте график зависимости внутренней энергии U воздуха в кастрюле от температуры T воздуха в окружающей среде в процессе его нагревания и охлаждения. Укажите на графике значения физических величин в характерных точках. Наружное давление оставалось неизменным.

Возможное решение.

При нагревании до $2T_0$ внутренняя энергия будет линейно возрастать до $2U_0$, так как $U = \frac{5}{2}\nu RT$, а количество молей воздуха в сосуде остается неизменным, клапан закрыт. Давление при этом возрастет в два раза и при $T = 2T_0$ клапан откроется.

При дальнейшем нагревании давление в кастрюле будет оставаться неизменным и равным $2p_0$. При постоянном объеме и росте температуры это возможно лишь за счет того, что из кастрюли через клапан будет выходить воздух. При нагреве от $2T_0$ до $4T_0$ количество молей воздуха уменьшится в два раза. Таким образом, во время этого процесса внутренняя энергия воздуха в кастрюле будет оставаться постоянной.

Как только начнется охлаждение, давление в кастрюле станет меньше $2p_0$, клапан закроется, количество воздуха останется постоянным, внутренняя энергия вновь будет изменяться пропорционально температуре. При ее уменьшении от $4T_0$ до T_0 внутренняя энергия также уменьшится в 4 раза и примет значение $U_0/2$.



Критерии оценивания.

№	критерий	баллы
1.	Имеется участок графика 1 (линейный рост внутренней энергии)	1
2.	Имеется участок графика 2 (постоянная внутренняя энергия)	3
3.	Имеется участок графика 3 (линейное уменьшение внутренней энергии)	2
	За верно указанные на графике характерные точки:	
4.	U_0	0,5
5.	T_0	0,5
6.	$2U_0$	0,5
7.	$2T_0$	0,5
8.	$U_0/2$	1
9.	$4T_0$	1
итого:		**10**