Задача 1.7.1. Бег по кругу (10 баллов). С линии старта одновременно в одну сторону по круговой дорожке стадиона побежали два спортсмена A и B. Бегун A первую половину каждого круга бежал со скоростью 2υ, а вторую – со скоростью υ. Бегун B первую половину времени, затраченного на прохождение круга, бежал со скоростью υ, а вторую – со скоростью 2υ. Известно, что бегун A пробегал полный круг за $T_A = 90$ с.

Через какое время t один спортсмен догнал другого первый раз после старта?

Через какое время T один из бегунов обогнал другого ровно на один круг?

Возможное решение (А. Аполонский). Пусть S – длина одного круга на стадионе. На преодоление первой половины круга бегун A затратил время

$$t_{A.1} = \frac{S/2}{2\upsilon} = \frac{1}{4}\frac{S}{\upsilon}.$$

Вторую половину круга он пробежал за

$$t_{A.2} = \frac{S/2}{\upsilon} = \frac{1}{2}\frac{S}{\upsilon}.$$

На преодоление всего круга ему потребовалось $T_A = t_{A.1} + t_{A.2} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)\frac{S}{\upsilon} = \frac{3}{4}\frac{S}{\upsilon} = 90$ с.

Отсюда $S/\upsilon = 120$ с; $t_{A.1} = 30$ с; $t_{A.2} = 60$ с.

Пусть бегун B пробегал круг за время T_B. Длина первого участка, который он пробегал за время $T_B/2$, равна $S_{B.1} = \upsilon \cdot \frac{T_B}{2}$. Длина второго участка $S_{B.2} = 2\upsilon \cdot \frac{T_B}{2} = \upsilon T_B$.

Поскольку $S = S_{B.1} + S_{B.2} = \frac{3}{2}\upsilon T_B$, то $T_B = \frac{2}{3}\frac{S}{\upsilon} = 80$ с.

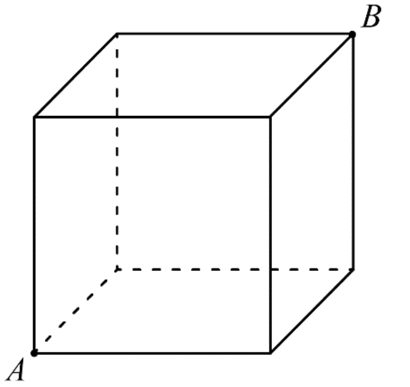
Бегун B пробежал первый круг быстрее бегуна A на $\Delta t = T_A - T_B = 10$ с. Так как скорости спортсменов отличаются в 2 раза, первая встреча бегунов произойдёт через время $t = T_B - \Delta t_1 = 70$ с.

Пусть бегуны поравнялись на линии старта после того, как спортсмен A пробежал N кругов. Бегун B пробежал на круг больше: $NT_A = (N+1)T_B$ или $N\frac{3}{4}\frac{S}{\upsilon} = (N+1)\frac{2}{3}\frac{S}{\upsilon}$.

Отсюда находим $N = 8$. Это случится через время $T = NT_A = 8 \cdot 90$ с = 720 с.

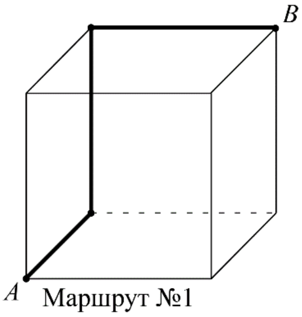
№	**Задача 1.7.1. Критерии оценивания (10 баллов)**	**Баллы**
1	Найдено отношения $S/\upsilon = 120$ с	2
2	Найдено время $T_B = 80$ с за которое бегун *B* пробегал полный круг	2
3	Найдено время $\Delta t = 10$ с на которое бегун *B* опережал бегуна *A* за 1 круг	1
4	Найдено время $t = 70$ с до первой встречи	2
5	Записано уравнение относительно *N*	1
6	Найдено число *N* полных кругов, которые пробежал *A* до встречи с *B*	1
7	Найдено время *T* до этой встречи: $T = NT_A = 720$ с	1

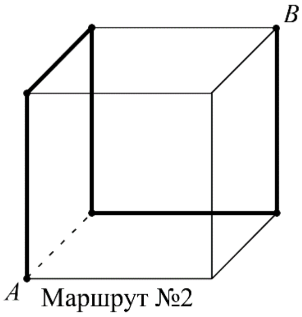
Задача 1.7.2. Как ни крути (10 баллов). Муравей направился из вершины A куба, стоящего на горизонтальной поверхности, к вершине B (см. рис), перемещаясь только по рёбрам этого куба, причем движение по горизонтальным и вертикальным рёбрам обязательно чередовались, и он не побывал ни в какой вершине дважды. Скорость перемещения муравья по вертикальным ребрам вверх была равна υ, вниз – 3υ, а по горизонтальным – он двигался с одинаковой скоростью.



Определите скорость муравья по горизонтальным рёбрам, если средняя скорость его движения от A к B не зависела от маршрута?

Возможное решение (Д. Подлесный). Возможны два варианта движения муравья с соблюдением ограничений, описанных в условии (см. рис.).





Пусть искомая скорость превышает скорость υ в k раз, т. е. равна $k\upsilon$, а длина ребра куба равна a.
Время движения по маршруту №1:

$$t_1 = \frac{a}{k\upsilon} + \frac{a}{\upsilon} + \frac{a}{k\upsilon} = \frac{k+2}{k}\frac{a}{\upsilon},$$

а средняя скорость:

$$\upsilon_1 = \frac{3a}{t_1} = \frac{3k}{k+2}\upsilon.$$

Аналогично, время движения и средняя скорость на маршруте №2:

$$t_2 = \frac{a}{\upsilon} + \frac{a}{k\upsilon} + \frac{a}{3\upsilon} + \frac{a}{k\upsilon} + \frac{a}{\upsilon} = \frac{7k+6}{3k}\frac{a}{\upsilon},$$

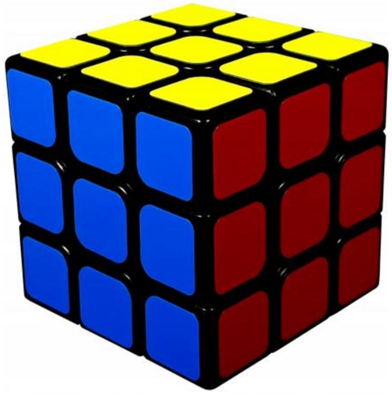
$$\upsilon_2 = \frac{5a}{t_2} = \frac{15k}{7k+6}\upsilon.$$

Поскольку по условию задачи $\upsilon_1 = \upsilon_2$, приходим к уравнению: $\dfrac{3k}{k+2} = \dfrac{15k}{7k+6}$, решая которое, находим $k = 2$. По горизонтальным рёбрам муравей перемещается со скоростью 2υ.

№	**Задача 1.7.2. Критерии оценивания (10 баллов)**	**Баллы**
1	Указано, что может быть два варианта движения муравья	2
2	Найдена средняя скорость υ_1 для маршрута из трёх участков	2
3	Найдена средняя скорость υ_2 для маршрута из пяти участков	2
4	Записано уравнение, учитывающее равенство $\upsilon_1 = \upsilon_2$,	2
5	Найдена скорость перемещения муравья по горизонтальному участку	2

Примечание: необоснованный ответ 2υ не оценивается.

Задача 1.7.3. Кубик Рубика (10 баллов). Кубик Рубика с ребром a не имеет пустот и сложен из одинаковых кубиков плотностью ρ_1 с ребром $a/3$. Если все мелкие кубики, не видимые на рисунке, заменить на другие, такие же по размеру, но с плотностью ρ_2, то средняя плотность кубика Рубика увеличится в $n = 3$ раза. Чему равно отношение плотностей ρ_2/ρ_1?



Возможное решение (С. Кармазин). На рисунке видно 19 из 27 мелких кубиков. Мы не видим 8 маленьких кубиков, один из которых находится в центре большого кубика. Средняя плотность кубика Рубика вначале равна

$$\rho_{ср.1} = \rho_1, \qquad (1)$$

так как все мелкие кубики в этом случае одинаковые.

Во втором случае средняя плотность большого Кубика:

$$\rho_{ср.2} = \frac{\frac{V}{27}19\rho_1 + \frac{V}{27}8\rho_2}{V} = \frac{19\rho_1 + 8\rho_2}{27}, \qquad (2)$$

где V – объем кубика Рубика.

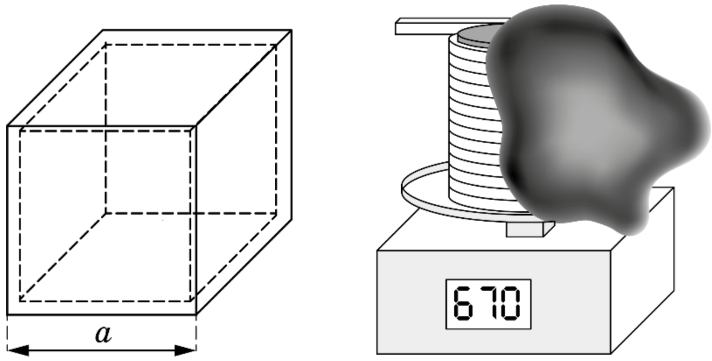
По условию $\rho_{ср.2}/\rho_{ср.1} = 3$. (3)

Из (1) – (3) находим $k = \rho_2/\rho_1 = 7{,}75$.

№	Задача 1.7.3. Критерии оценивания (10 баллов)	Баллы
1	Указано, что видно 19 и не видно 8 кубиков	2
2	Указано, что $\rho_{ср.1} = \rho_1$	1
3	Получено выражение (2) для $\rho_{ср.2}$ через ρ_1 и ρ_2	4
4	Получено значение k	3

Примечание: Если неправильно указано количество видимых и невидимых кубиков но расчет отношения плотностей проведен верно, задача оценивается максимум в 4 балла.

Задача 1.7.4. 3D принтер (20 баллов). На 3D принтере идет печать полого кубика с внешней стороной a = 10 см. Катушка с пластиковым прутком квадратного сечения стоит на весах. Показания m весов с начала и до окончания печати вместе с длиной L прутка, оставшегося на катушке, заносятся в таблицу.



m, г	670	600	575	490	455	380	310
L, м	125	110	98	80	68	55	35

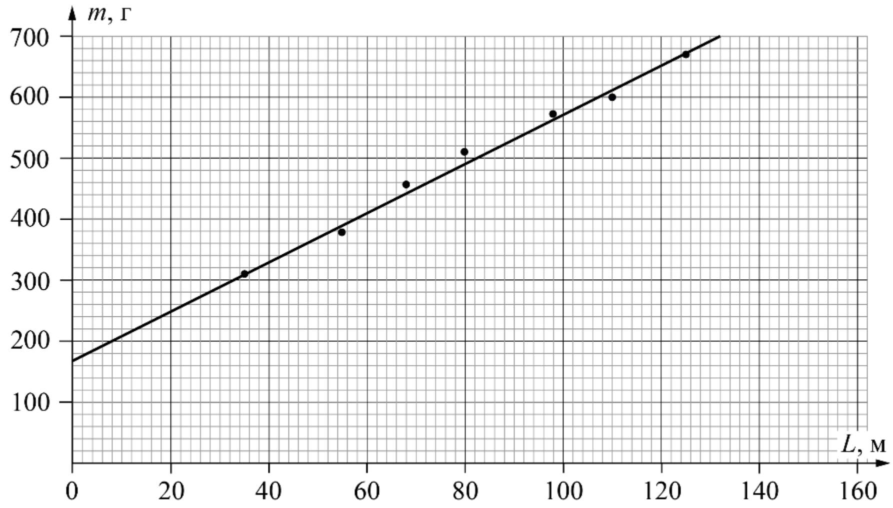
Определите:

1) массу m_0 пустой катушки;
2) линейную плотность λ прутка (массу одного метра);
3) плотность ρ материала прутка;
4) объем полости V в получившемся кубике.

Примечание: На рисунке ТОЛЬКО пруток изображен в масштабе 1:1, а размер кубика и весов даны условно. Для измерения необходимых размеров прутка можно использовать свою линейку или миллиметровую бумагу.

Возможное решение (А. Вергунов, Д. Логинов).

По таблице построим график зависимости показаний весов от длины оставшегося прутка.



Экстраполируя линейную зависимость до пересечения с осью ординат, получим массу пустой катушки $m_0 \approx 170$ г.

По мере изменения показаний весов при раскручивании катушки (по угловому коэффициенту наклона графика) найдем линейную плотность прутка:

$$\lambda = \frac{(650-250)\text{г}}{(120-20)\text{м}} = 4,0 \text{ г/м}.$$

С помощью метода рядов (проводя измерения не менее чем для 10 витков) определим толщину прутка: d = 1,5 мм.

Таким образом, поперечное сечение прутка равно s = 2,25 мм^2, а объемная плотность пластика $\rho = \lambda / s \approx 1,78$ г/см$^3 = 1,78 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Длина прутка, израсходованного на печать кубика, равна $L_1 = 125 \text{ м} - 35 \text{ м} = 90 \text{ м}$.

Следовательно, суммарный объем стенок составляет:

$V_1 = sL_1 = 2,25 \cdot 10^{-2} \cdot 9\,000 \text{ (см}^3) = 202,5 \text{ см}^3$;

а объем полости $V = a^3 - V_1 = 10^3 - 202,5 \approx 797 \text{ см}^3$.

Задача 1.8.1. «Часы» (10 баллов). На часах в некоторый момент времени угол между часовой и минутной стрелками составил $\alpha = 60°$. Определите, через сколько минут угол между стрелками в следующий раз может снова оказаться равным α?
Положение стрелок на рисунке – условное.

Решение (В. Яворский). Минутная стрелка за час (60 минут) повернётся на угол 360°, а за минуту – на 360°/60 мин = 6°. Часовая стрелка за 12 часов совершит полный оборот, т.е. повернётся на угол 360°, а за час на 360°/12 ч = 30°. За минуту она повернётся на 0,5°. Таким образом, минутная стрелка поворачивается в **12 раз** быстрее, чем часовая.

Заметим, что в условии не сказано, какая из стрелок изначально находится «впереди». Следовательно, возможны два варианта решения, когда А) часовая стрелка опережает минутную и Б) минутная стрелка опережает часовую. Рассмотрим эти варианты.

А) Часовая стрелка опережает минутную на угол $\alpha = 60°$. Пусть часовая стрелка повернулась на угол β. Тогда минутная стрелка повернётся на угол $\varphi = \alpha + \beta + \alpha$.

$$2\alpha + \beta = 12\beta.$$

$$\beta = 2\alpha/11 = 2\cdot 60°/11 \approx 11°.$$

В результате получим $\varphi \approx 2\cdot 60° + 11° = 131°$. На это минутной стрелке потребуется время $t_1 \approx 131°/(6°/\text{мин}) \approx 22$ мин.

Б) Минутная стрелка опережает часовую на угол $\alpha = 60°$. Пусть часовая стрелка повернулась на угол β. Тогда минутная стрелка повернулась на угол $\varphi = 360° - 2\alpha + \beta$.

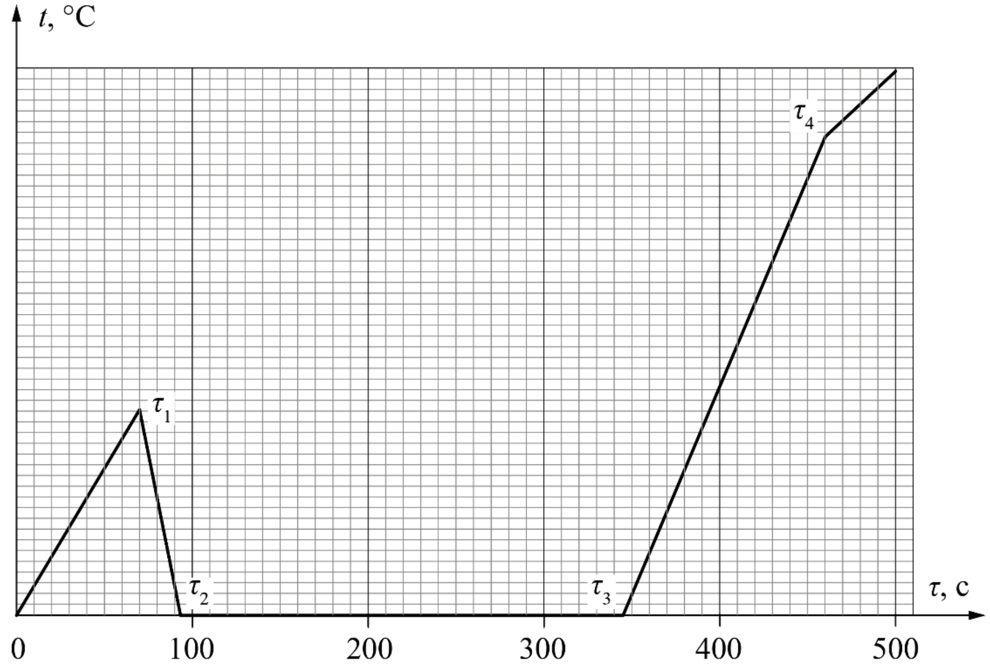
$$360° - 2\cdot 60° + \beta = 12\beta.$$

$$\beta = 240°/11 \approx 22°.$$

Итак, минутная стрелка повернулась на угол $360° - 120° + 22° \approx 262°$ за время $t_2 \approx 262°/(6°/\text{мин}) \approx 44$ мин.

№	Задача 1.8.1. Критерии оценивания (10 баллов)	Баллы
1	Показано, что минутная стрелка поворачивается в **12 раз** быстрее, чем часовая	2
2	А) Учтено, что минутная стрелка повернётся на угол $\varphi = \alpha + \beta + \alpha$	3
	Найдено время $t_1 \approx 131°/(6°/\text{мин}) \approx 22$ мин.	1
3	Б) Учтено, что минутная стрелка повернётся на угол $\varphi = 360° - 2\alpha + \beta$	3
4	Найдено время $t_2 \approx 262°/(6°/\text{мин}) \approx 44$ мин.	1

Задача 1.8.2. Соревнование калориметров (10 баллов). В два калориметра положили по куску льда и в течение $\tau_К = 10$ минут стали нагревать их содержимое с одинаковой мощностью. Известно, что первый кусок льда легче второго на $\Delta m = 100$ г. На рисунке приведена зависимость разности температур t в калориметрах от времени τ.



К сожалению, шкала оси разности температур не сохранились, а изломам графика соответствуют времена τ_1, τ_2, τ_3, τ_4.

Объясните, какие физические процессы соответствуют каждому линейному участку графика.

Определите:

1) мощность P нагревателя;
2) массы m_1 и m_2 кусков льда;
3) начальные и конечные температуры кусков льда;
4) разность температур Δt в момент времени τ_1.

Справочные данные: удельная теплоемкость льда $c_Л = 2\,100$ Дж/кг°С, удельная теплоемкость воды $c_В = 4\,200$ Дж/кг°С, удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ КДж/кг.

Решение (А. Евсеев). Из графика находим: $\tau_1 = 70$ с, $\tau_2 = 93$ с, $\tau_3 = 345$ с, $\tau_4 = 460$ с. Поскольку график начинается из нуля, температуры кусков льда вначале равны. Первые 70 с разность температур растет. Потом, более легкий кусок начинает плавиться, и разность температур уменьшается в течение 23 с. Третий участок графика соответствует плавлению обоих кусков льда, когда их температура неизменна (0°С). Это происходит в течение 252 с. Четвертый участок соответствует нагреву воды в том калориметре, где был кусок меньшей массы, а в другом – продолжает плавится лед (115 с). На пятом – в обоих калориметрах нагревается вода.

Разница во времени плавления обусловлена разницей в массе кусков льда. Т.е. время, которое ушло на плавление дополнительных 100 г льда – это $[(\tau_4 - \tau_2) - (\tau_3 - \tau_1)] = 91{,}7$ с. Отсюда мощность нагрева: $P = \dfrac{\lambda \Delta m}{\tau} \approx 360$ Вт.

Разница во времени нагрева до температуры плавления обусловлена разницей в массе кусков льда. Т. е. дополнительные 23,3 с – это время, которое ушло на нагрев 100 г льда от температуры вначале до 0°С. Откуда, $t_{01} = t_{02} = t_0 = \dfrac{-P\tau_1}{c_л \Delta m} = -\,40\ ^\circ\text{C}$.

За 70 с легкий кусок льда нагревается до 0°С. Значит его масса: $m_1 = \dfrac{-P\tau_1}{c_л t_0} \approx 0{,}3$ кг. Масса второго куска $m_2 \approx 0{,}4$ кг.

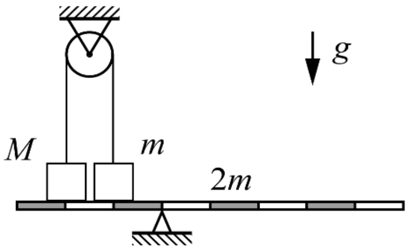
За те же 70 с второй кусок успеет нагреться до $t_{21} = \dfrac{c_л m_2 t_0 + P\tau_1}{c_л m_2} \approx -10\ ^\circ\text{C}$,

то есть температуры кусков льда будут отличаться от $\Delta t = 10$ °С.

К концу нагрева в первом калориметре установится температура:

$$t_{1К} = \frac{P(\tau_К - \tau_3)}{c_в m_1} \approx 73\ ^\circ\text{C}, \text{ а во втором } t_{2К} = \frac{P(\tau_К - \tau_4)}{c_в m_2} \approx 30\ ^\circ\text{C}.$$

№	**Задача 1.8.2. Критерии оценивания (10 баллов)**	**Баллы**
1	Верно интерпретирован график:	2
	указано, что происходит в каждом калориметре на участках от 0 до τ_2 (1 балл)	
	указано, что происходит в каждом калориметре на участках после τ_3 (1 балл)	
2	Указано, что начальная температура кусков льда одинакова	0,5
3	Определена мощность нагревателя	2
4	Определена начальная температура в калориметрах	1,5
5	Определены исходные массы кусков льда (по 0,5 за каждую массу)	1
6	Определена разность температур в момент времени τ_1	1
7	Определены конечные температуры в калориметрах (по 1 баллу за каждую)	2



Задача 1.8.3. Неразрывность (10 баллов). При каких значениях масс груза M возможно равновесие системы, приведенной на рисунке, если $m = 4{,}0$ кг? Горизонтальный рычаг массой $2m$ разделен на 8 одинаковых участков. Нить выдерживает максимальное натяжение $T_0 = 25$ Н. $g = 10$ Н/кг.

Возможное решение (М. Замятнин). Если груз M очень легкий, то связанный с ним нитью груз m перевешивает и касается рычага. Но вращающего момента груза m относительно точки опоры недостаточно, чтобы уравновесить момент силы тяжести самого рычага. Рычаг начинает проворачиваться по часовой стрелке. Нить провисает, и оба груза m и M «встают» на рычаг. Для равновесия системы необходимо, чтобы выполнилось правило моментов относительно точки опоры:

$$Mg2l + mgl = 2mgl, \qquad (1)$$

где l – длина одного участка рычага.

Тогда минимальное значение M для равновесия системы равно $M = m/2$. Нить при этом не натянута.

Рассмотрим случай больших масс M. При $M > m$ перевешивает груз M и он начинает давить на рычаг, а груз m повисает на нити. Для равновесия системы теперь достаточно выполнения условия:

$$\left(M - m\right)g2l = 2mgl\text{, откуда } M = 2m. \qquad (2)$$

Если не было бы ограничения на силу натяжения нити, равновесие системы наступило при $m/2 < M < 2m$, или 2,0 кг < M < 8,0 кг. Но при больших значениях M груз m оказывается подвешенным, и сила натяжения становится 40 Н. Нить обрывается.

Рассмотрим случай, когда нить натянута до предельного значения T_0, но грузы не отрываются от рычага. Правило моментов принимает вид:

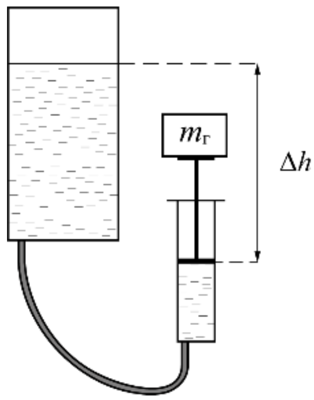
$$\left(Mg - T_0\right)2l + \left(mg - T_0\right)l = 2mgl, \qquad (3)$$

откуда $M = 0{,}5\left(m + 3T_0 / g\right) = 5{,}75$ кг.

Таким образом, равновесие системы возможно при 2,0 кг < M < 5,75 кг.

№	**Задача 1.8.3. Критерии оценивания (10 баллов)**	**Баллы**
1	Учет нескольких возможных сценариев нарушения равновесия	1
2	Анализ случая малых значений M и правило моментов (1)	1,5
3	Нахождение нижней границы: $M > 2{,}0$ кг	1
4	Анализ случая больших значений M и правило моментов (2)	1,5
5	Нахождение верхней границы $M < 8{,}0$ кг	1
6	Учет предельного значения силы натяжения	1
7	Правило моментов (3)	2
8	Явно указан **правильный** диапазон допустимых значений M, а не только его границы	1

Задача 1.8.4. Физика в медицине (20 баллов). Для измерения некоторых технических характеристик медицинского шприца экспериментатор Глюк собрал установку, изображенную на рисунке. Исследуемый шприц он закрепил в вертикальном положении. Вместо иглы к нему присоединил тонкую гибкую трубку, второй конец которой соединил с отверстием в дне цилиндрического сосуда. Затем Глюк измерил разность уровней Δh воды в сосуде и шприце, при которой поршень шприца начинал двигаться вверх в процессе плавного подъема сосуда. Оказалось, что величина Δh зависит от массы $m_г$ груза, закрепленного на верхнем упоре поршня. Результаты измерений зависимости $\Delta h(m_г)$ он представил в таблице, в которой также приведена $\Delta h_х$ для груза неизвестной массы $m_х$.



Примечания: массой поршня можно пренебречь; воздушная прослойка между поршнем и водой в шприце отсутствует; плотность воды $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3; $g = 10$ Н/кг ,

Определите площадь S поршня и силу трения скольжения $F_{тр}$ между поршнем и стенкой шприца. Для этого:

1. Выведите теоретическую зависимость $\Delta h(m_г)$.
2. Постройте график экспериментальной зависимости $\Delta h(m_г)$
3. С помощью графика определите $F_{тр}$ и S.
4. Чему равна неизвестная масса $m_х$ груза в шестой строке таблицы?

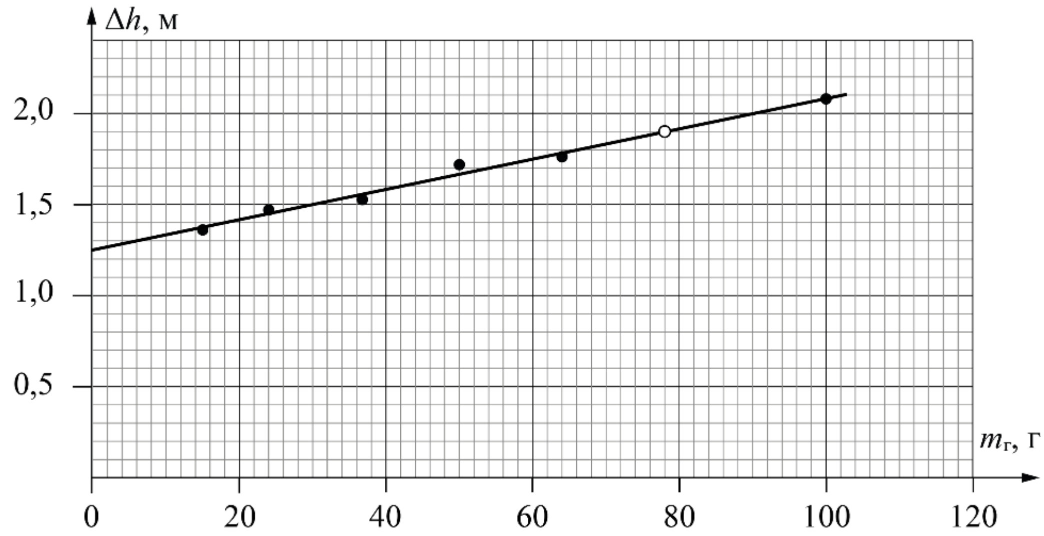
№	$m_г$, г	Δh, м
1	15	1,36
2	24	1,47
3	37	1,53
4	52	1,72
5	64	1,76
6	$m_х$	1,90
7	100	2,08

Решение (М. Чжан, С. Кармазин).

1. При равномерном движении поршня вверх сила тяжести груза и сила трения между поршнем и стенкой шприца уравновешены силой давления столба воды высотой Δh (атмосферное давление можно не учитывать):

$$m_{г} g + F_{тр} = \rho g S \Delta h ,$$

Откуда



(1)

2. Мы видим, что Δh линейно зависит от $m_{г}$ (см. график).

3. Для вычисления углового коэффициента прямой линии на графике удобно использовать точку $m_{г1}$ = 6 г, Δh_1 = 1,3 м, а также $m_{г2}$ = 90 г, Δh_2 = 2 м.

Из формулы (1) и графика вычисляем угловой коэффициент

$$k = \frac{1}{\rho S} = \frac{\Delta h_2 - \Delta h_1}{\Delta m_{г}} = \frac{0,7}{0,084}\left(\frac{м}{кг}\right) = 8,33\left(\frac{м}{кг}\right)$$

и находим площадь поршня $S = \dfrac{1}{k\rho} = \dfrac{1}{8330}\,м^2 = 1,2\ см^2$.

Из графика видно, что при $m_{г}$ = 0 прямая линия пересекает вертикальную ось в точке Δh_0 = 1,25 м. В соответствие с (1) находим $F_{тр} = \rho g S \Delta h_0 = 10^3 10 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4}\, 1,25\ Н = 1,5\ Н$.

4. Из графика видно, что при $\Delta h_{х}$ = 1,9 м масса груза должна быть равной m_x = 78 г.

№	**Задача 1.8.4. Критерии оценивания (20 баллов)**	**Баллы**
1	Получена зависимость (1)	5
2	Построен график зависимости $\Delta h(m_г)$	5
	Указаны единицы измерения по обоим осям (1 балл)	
	Выбран разумный масштаб осей (1 балл)	
	Нанесены значения у делений осей (1 балл)	
	Нанесены экспериментальные точки (1 балл)	
	Через экспериментальные точки проведена прямая (1 балл)	
3	Найдена площадь поршня $S \in$ (1,15 см^2 – 1,25см^2)	4
	$S \in$ (1,10 см^2 – 1,14 см^2) или (1,26 см^2 – 1,30 см^2) (2 балла)	
	$S \in$ (1,00 см^2 – 1,09 см^2) или (1,31 см^2 – 1,40 см^2) (1 балл)	
4	С помощью графика определена $F_{тр}$: $F_{тр} \in$ (1,45 Н – 1,55 Н)	4
	$F_{тр} \in$ (1,40 Н – 1,44 Н) или (1,56 Н – 1,60 Н) (2 балла)	
	$F_{тр} \in$ (1,30 Н – 1,39 Н) или (1,61 Н – 1,70 Н) (1 балл)	
5	Найдена масса груза m_x: $m_x \in$ (76 г – 80 г)	2
	$m_x \in$ (73 – 75 г) или (81 – 83 г) (1 балл)	