Задача 7.1. Две двери. (Кузнецова А.). Две балконные двери шириной a_1 и a_2 начинают передвигать к противоположным стенам со скоростями υ_1 и υ_2 соответственно (рис.1). На рис.3 изображён **качественный** график зависимости величины области пересечения дверей l (рис.2) от времени t. С помощью графика найдите численные значения величин a_1, a_2, υ_1 и υ_2.

Примечание: касаясь противоположной стены, дверь останавливается. График построен без соблюдения масштаба. l_0 = 1,8 м, t_1 = 6 с, t_2 = 15 с, t_0 = 30 с.

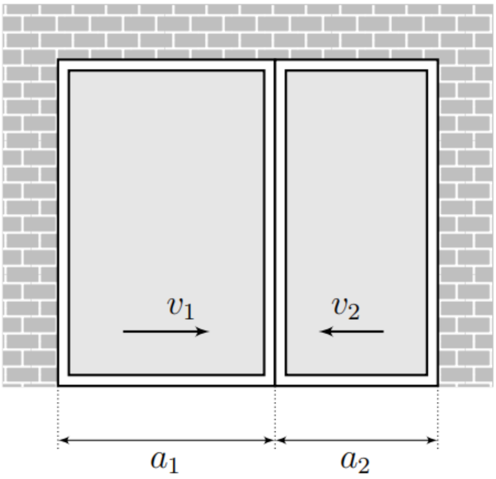


рис.1

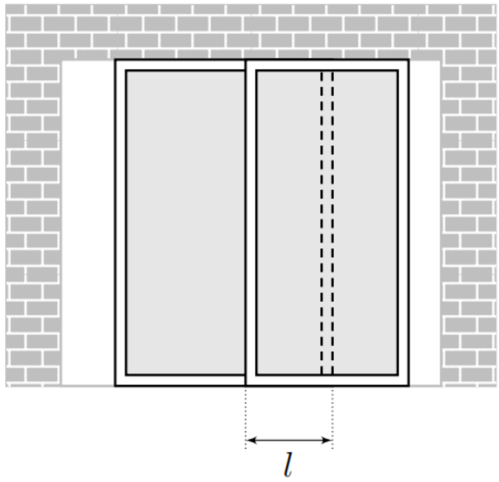


рис.2

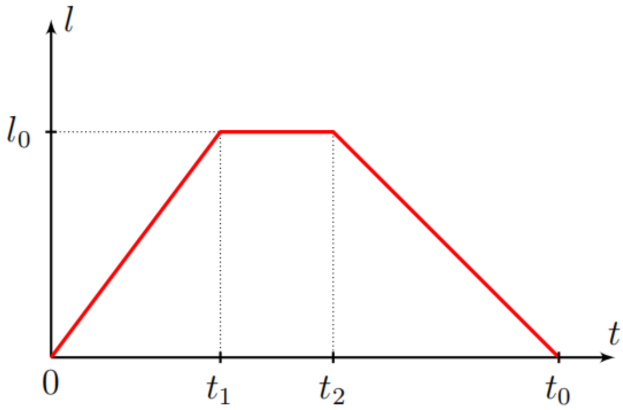


рис.3

Возможное решение. Участок с $l = l_0$ – это положение, при котором двери полностью перекрываются. То есть l_0 – это ширина меньшей двери. Следовательно,

$$a_2 = 1{,}8 \text{ м}.$$

Скорость изменения l – это относительная скорость движения дверей ($\upsilon_1 + \upsilon_2$), когда она отлична от нуля.

На первом участке $\dfrac{\Delta l}{t_1} = \dfrac{l_0}{t_1} = 0{,}30$ м/с.

На втором участке $\dfrac{\Delta l}{t_0 - t_2} = \dfrac{l_0}{t_0 - t_2} = 0{,}12$ м/с.

Относительная скорость может по условиям задачи измениться только при остановке одной из дверей. Значит, в промежутке между t_1 и t_2 одна из дверей остановилась. Если бы она остановилась раньше или позже, то на наклонных участках графика был бы излом. Значит, скорость одной из дверей составила 0,12 м/с, а другой $\frac{\Delta l}{t_1} - \frac{\Delta l}{t_0 - t_2} = 0{,}18$ м/с.

Предположим, что $\upsilon_1 = 0{,}18$ м/с, а $\upsilon_2 = 0{,}12$ м/с. Первая дверь проходит путь $S_1 = a_2 = l_0$ за время $T_1 = l_0 / \upsilon_1 = 10$ с и останавливается. Это справедливо, так как $t_1 \le T_1 \le t_2$. Вторая дверь продолжает двигаться со скоростью $\upsilon_2 = 0{,}12$ м/с (она же – относительная скорость движения), пройдя за t_0 путь $S_2 = a_1 = \upsilon_2 t_0 = 3{,}6$ м.

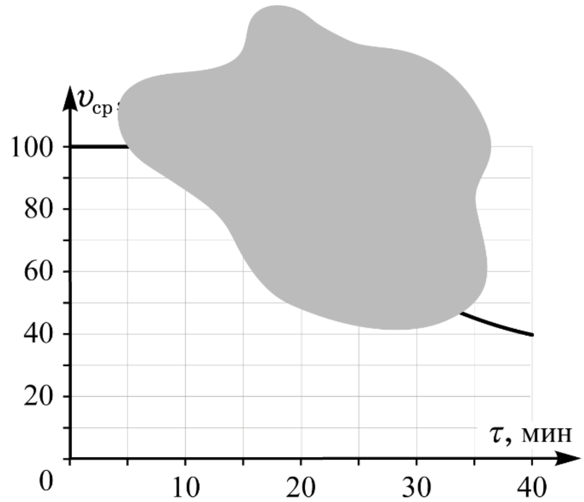
Предположим, что $\upsilon_1 = 0{,}12$ м/с, а $\upsilon_2 = 0{,}18$ м/с. Первая дверь проходит путь $S_1 = a_2 = l_0$ за время $T_1 = l_0 / \upsilon_1 = 15$ с и останавливается. Это также справедливо ($t_1 \le T_1 \le t_2$), но вторая дверь будет двигаться со скоростью $\upsilon_2 = 0{,}18$ м/с (она же – относительная скорость движения), но этот вариант нам не подходит потому что относительная скорость на последнем участке 0,12 м/с.

Окончательный ответ: $a_1 = 3{,}6$ м; $a_2 = 1{,}8$ м; $\upsilon_1 = 0{,}18$ м/с; $\upsilon_2 = 0{,}12$ м/с.

Критерии оценивания

1) Указано, что на участке с $l = l_0$ двери полностью перекрываются	1 балл
2) Найдена ширина $a_2 = 1{,}8$ м	1 балл
3) Рассчитаны скорости изменения l на двух участках	2 балла
4) Сделан вывод об остановке одной из дверей в промежутке между t_1 и t_2	1 балл
5) Сделан вывод о том, что скорость изменения l на первом участке - это $\upsilon_1 + \upsilon_2$	1 балл
6) Сделан вывод о том, что скорость изменения l на втором участке – это одна из скоростей	1 балл
7) Обоснованно найдены значения υ_1 и υ_2	2 балла
8) Найдена ширина $a_1 = 3{,}6$ м	1 балл

Задача 7.2. Алиса в кофейне чудес. (Уймин А.). В выходной день Алиса с подружками пошла в кафе «Шоколадница». Шли они с постоянной скоростью. Придя в кафе, Алиса построила график зависимости своей средней скорости от времени, включая время, когда она пила кофе. Перед уходом Алиса решила порадовать своих подписчиков в Instagram новой публикацией. Потянувшись за телефоном, девочка случайно пролила остатки кофе на график.



Определите:

1) Сколько времени Алиса пила кофе в кафе?

2) В каких единицах измерения изображена скорость на графике, если путь до кофейни S = 1,6 км?

Возможное решение. Единицы измерения скорости нам неизвестны. Обозначим их «у.е.» (условные единицы).

По определению средней скорости к моменту τ = 40 мин Алиса прошла путь

$$S = 40\ \text{мин} \cdot 40\ \text{у.е.} = 1600\ \text{мин} \cdot \text{у.е.}$$

Однако, весь этот путь Алиса прошла равномерно со скоростью υ = 100 у.е.

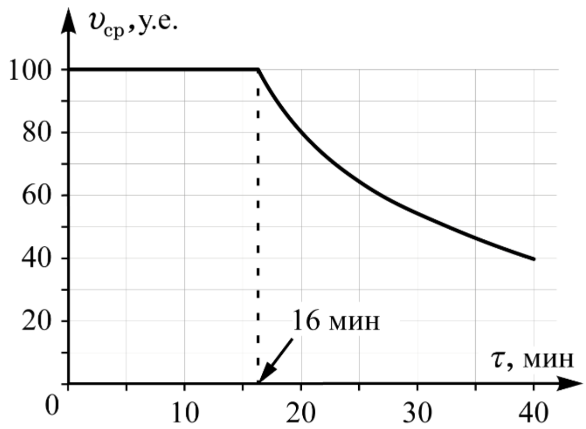
$$S = 100\ \text{у.е.} \cdot \Delta\tau \Rightarrow \Delta\tau = \frac{1600\ \text{мин} \cdot \text{у.е.}}{100\ \text{у.е.}} = 16\ \text{мин}.$$

Алиса шла 16 минут, значит в кафе она сидела

$$\Delta\tau_{\text{кафе}} = 40\ \text{мин} - 16\ \text{мин} = 24\ \text{мин}.$$

$$100\ \text{у.е.} = \frac{1{,}6\ \text{км}}{16\ \text{мин}} = 100\ \text{м/мин}.$$

Таким образом, $1\ \text{у.е.} = 1\ \text{м/мин}.$



Критерии оценивания

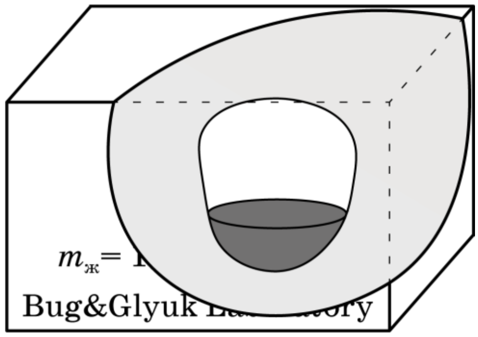
1. Использованы неизвестные единицы измерения скорости 1 балл
2. Использовано определение средней скорости 1 балл
3. Определение средней скорости применено к τ = 40 мин 1 балл
4. Использовано уравнение равномерного движения 1 балл
5. В уравнении равномерного движения использована информация с графика 1 балл
6. Использовано равенство путей из двух уравнений 2 балла
7. Правильно найдено время ходьбы 1 балл
8. Правильно найдено время отдыха в кофейне 1 балл
9. У.е. выражена через м/мин 1 балл

Примечание к критериям

1. П.1 не засчитывается, если участник просто угадал единицы измерения.
2. Если время ходьбы явно не вычислялось, а найдено сразу время отдыха, то п.7. критериев засчитывается в полной мере.
3. **П.2 и п.4 можно оценивать даже при неверной логике решения задачи. Достаточно наличия соответствующей формулы в решении.**

Задача 7.3. Жидкость в теле (Уймин А.). Дионисий нашёл в лаборатории своего дедушки 5 внешне одинаковых тел. Мальчик вычислил среднюю плотность каждого из них. Оказалось, что они разные. В прилагаемой к телам записке упоминалось, что они содержат одинаковые полости, частично заполненные жидкостью. Масса m жидкости была написана на каждом теле. Также, из записки следовало, что одно из тел отличается размером полости (бракованное). Результаты измерения средней плотности и масс налитой жидкости приведены в таблице.

№ тела	1	2	3	4	5
m, г	10	30	60	70	100
$\rho_{ср}$ г/см^3	0,9	1,3	1,9	2,5	2,7



Определите:

1) номер бракованного тела;

2) объём тела $V_к$;

3) массу $m_к$ небракованного тела без налитой жидкости.

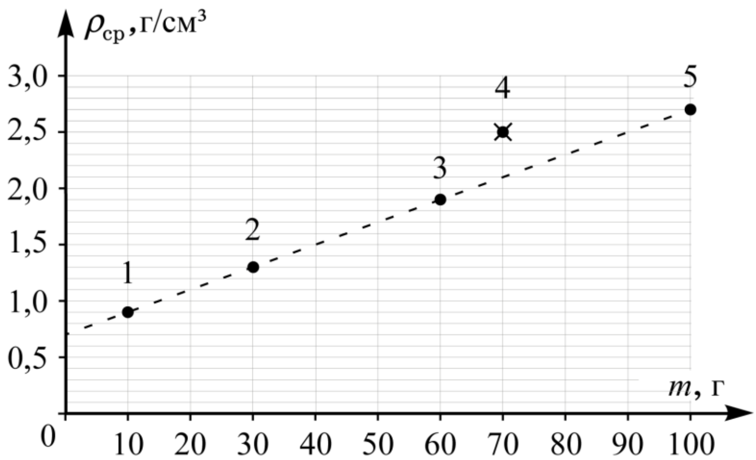
Возможное решение. По определению средняя плотность тела – это отношение массы тела к его объёму:

$$\rho_{ср} = \frac{M}{V_к} = \frac{m_к + m}{V_к} = \frac{m_к}{V_к} + \frac{m}{V_к}, \quad (1)$$

где M – масса тела с водой.

Из уравнения следует, что при постоянном объёме (дано по условию) и массе пустого тела зависимость его средней плотности от массы линейна.

Построим график зависимости средней плотности тела от массы воды в нём.



Из графика видно, что все точки, кроме №4, лежат на одной прямой. Это значит, что четвёртое тело браковано.

Из уравнения для средней плотности видно, что угловой коэффициент наклона прямой – это обратный объём:

$$\frac{\Delta\rho_{ср}}{\Delta m} = \frac{1}{V_к} \Leftrightarrow V_к = \frac{\Delta m}{\Delta\rho_{ср}}. \quad (2)$$

Подставляя данные из таблицы, найдём $V_к = 50$ см^3.

При $m = 0$ получим:

$$\rho_{ср}(0) = \frac{m_к}{V_к} + \frac{m}{V_к} = \frac{m_к}{V_к}. \quad \text{Отсюда} \quad m_к = V_к \rho_{ср}(0). \qquad (3)$$

Продолжив график до пересечения с осью $\rho_{ср}$, найдём значение $\rho_{ср}(0) = 0{,}7$ г/см^3.

Следовательно, масса пустого тела $m_к = 35$ г.

Критерии оценивания

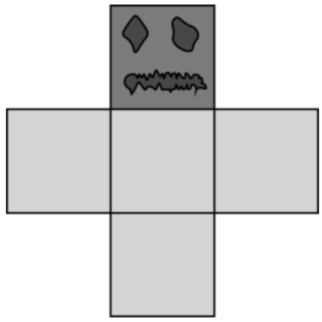
1. Получена зависимость средней плотности от массы воды (1)	1 балл
2. Использована линейность этой зависимости	1 балл
3. Построен график $\rho_{ср}(m)$	1 балл
4. Обоснованно определён номер бракованного тела	1 балл
5. Записана формула (2) или её эквивалент	2 балла
6. Получено правильное численное значение $V_к$	1 балл
7. Правильно найдена $\rho_{ср}(0)$	1 балл
8. Записана формула (3) или её эквивалент	1 балл
9. Получено правильное численное значение $m_к$	1 балл

Примечание к критериям

1. Вместо построения графика участник может применять уравнение (2) к разным парам измерений. При таком решении п.2. и п.3. нужно объединить, и оценивать каждую пару измерений в 0,5 балла (но не более 2 баллов).

2. При достаточном количестве исследованных пар измерений (п.2 примечания) и при правильных численных значениях $V_к$ и $m_к$ промежуточные критерии оцениваются полным баллом.

Задача 7.4. Глюк в «Майнкрафте». (Кутелев К.). Пока внук хозяйничал в лаборатории, экспериментатор Глюк решил поиграть в его компьютерную игру. В ней он из 5 кубических блоков он собрал фигур (см. рис), причём 4 блока были изготовлены из одного материала. Плотности материалов ему известны. Глюк высчитал ~~что~~ средняя плотность этой фигуры $\rho_1 = 6{,}5$ г/см^3. Внезапно, в игре неизвестное существо подбежало и украло один из блоков. Глюк пересчитал среднюю плотность, и у него получилось $\rho_2 = 6{,}125$ г/см^3. Но тут неизвестное существо опять похитило блок. Средняя плотность опять изменилась. Глюку надоело наблюдать за воровством блоков, и он выключил игру.



Определите:

1) плотность (по мнению Глюка) ρ_A верхнего кубика;

2) плотность (по мнению Глюка) ρ_B нижних кубиков;

3) среднюю плотность фигуры после второго похищения.

Возможное решение. Средняя плотность изначальной фигуры

$$\rho_1 = \frac{m_1+4m_2}{5V} = \frac{1}{5}\rho_A + \frac{4}{5}\rho_B, \qquad (1)$$

где m_1 - масса «головы», m_2 - масса нижнего блока, V - объём блока.

Если бы первой похитили «голову» фигуры, то после второго похищения плотность бы не изменилась (остались бы блоки одного типа). Однако, по условию это не так. Значит первым был похищен один из нижних блоков.

Следовательно, новая средняя плотность фигуры

$$\rho_2 = \frac{m_1+3m_2}{4V} = \frac{1}{4}\rho_A + \frac{3}{4}\rho_B. \qquad (2)$$

Решая систему из двух уравнений, находим предполагаемые плотности блоков:

$$\rho_A = 16\rho_2 - 15\rho_1 = 0{,}5 \text{ г/см}^3;$$

$$\rho_B = 5\rho_1 - 4\rho_2 = 8{,}0 \text{ г/см}^3.$$

Какой из блоков похитили вторым, мы не знаем, так что возможно 2 варианта:

1) Похищена голова; тогда:

$$\rho_3 = \rho_B = 8{,}0 \text{ г/см}^3.$$

2) Похищен нижний блок:

$$\rho_3 = \frac{m_1+2m_2}{3V} = \frac{1}{3}\rho_A + \frac{2}{3}\rho_B = 5{,}5 \text{ г/см}^3.$$

Критерии оценивания

1. Записано уравнение (1) или аналог	1 бал
2. Доказано, что первым похищен один из нижних блоков	2 балла
3. Записано уравнение (2) или аналог	1 балл
4. Найдена ρ_A	1 балл
5. Найдена ρ_B	1 балл
6. Найдены оба варианта для ρ_3 (по 1 баллу за каждый формульный ответ и по 1 баллу за каждый численный ответ)	4 балла

Примечание к критериям

1. В п.4 и п.5 ставьте по 0,5 балла за каждый формульный ответ и по 0,5 балла за каждый численный ответ.
2. В п.6 0,5 балла ставится за каждый формульный ответ, 0,5 балла за каждый численный ответ.
3. Если участник не получал формулы для п.4 - п.6, но численный ответ правильный, засчитывается полный балл.

Задача 8.1. Эффект Доплера (Кармазин С.). Геолог отправился на моторной лодке из базового лагеря вверх по реке. Из-за отсутствия связи с лагерем он через каждые Δt = 0,5 часа бросал в воду пронумерованные по порядку бутылки с информацией о своей экспедиции (через полчаса после отправления – первую, через час вторую и т.д., вплоть до возвращения в лагерь). В первое время после начала экспедиции эти бутылки вылавливали в лагере через каждые ΔT = 1,5 часа. На определённом расстоянии X от лагеря геолог быстро закрепил в русле автоматический анализатор химического состава воды, опустил в воду очередную бутылку и отправился в обратный путь, не изменяя режима работы лодочного мотора. На обратном пути он продолжил каждые полчаса бросать в воду пронумерованные бутылки. В какой-то момент он заметил, что шестнадцатая бутылка оказалась опущенной в реку рядом с восьмой, и от этого места до лагеря оставалось проплыть L = 4 км. Определите:

1) скорость течения реки $\upsilon_т$;
2) скорость лодки в стоячей воде $\upsilon_л$;
3) длительность T всей экспедиции геолога от отправления до возвращения в базовый лагерь.
4) На каком расстоянии X от лагеря геолог закрепил прибор?
5) Через какой промежуток времени $\Delta\tau$ приплывали в лагерь бутылки, отправленные геологом на обратном пути?
6) Через какое время после начала экспедиции в лагере выловили последнюю бутылку и какой у неё был номер?
7) Каков номер бутылки, которая приплыла в лагерь одновременно с геологом?

Возможное решение. Каждая последующая бутылка проходит такое же расстояние до места опускания предыдущей, какое проплывает лодка за полчаса при движении вверх против течения:

$$\Delta t\,(\upsilon_л - \upsilon_т) = (\Delta T - \Delta t)\upsilon_т,$$

откуда следует, что

$$\upsilon_л = 3\upsilon_т. \qquad (1)$$

Предположим, что в самой дальней точке маршрута геолог опустил в воду бутылку с номером n. Тогда встреча геолога с бутылкой №8 на обратном пути произойдёт в момент времени $16\Delta t$, если расстояние, пройденное бутылкой за время $(16 - 8)\Delta t$, будет равно расстоянию, пройденному геологом от дальней точки маршрута до места встречи минус расстояние от места опускания бутылки №8 до дальней точки:

$$\upsilon_т(16 - 8)\Delta t = (\upsilon_л + \upsilon_т)(16 - n)\Delta t - (\upsilon_л - \upsilon_т)(n - 8)\Delta t,$$

откуда с учётом (1) получаем $$n = 12. \qquad (2)$$

Из условия равенства путей геолога туда и обратно найдём количество получасовых интервалов k, в течение которых геолог плыл обратно (по течению):

$$(\upsilon_л + \upsilon_т)k\Delta t = (\upsilon_л - \upsilon_т)n\Delta t.$$

С учетом (1) и (2) получаем $k = 6$. Все путешествие геолога длилось $(n + k) = 18$ получасовых интервалов или $T = (n + k)\Delta t = 9$ часов.

По условию задачи от места опускания бутылки № 16 до лагеря лодка прошла 4 км за время $(18 - 16)\Delta t = 1$ час. Следовательно, $(\upsilon_л + \upsilon_т) = 4$ км/час, а с учётом (1)
$\upsilon_л = 3$ км/час, $\upsilon_т = 1$ км/час.

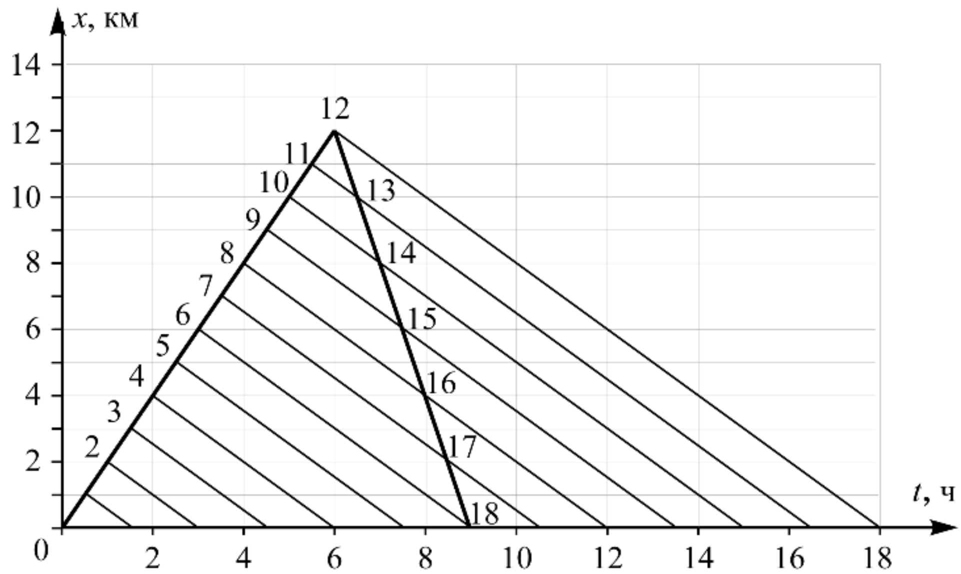
Анализатор химического состава воды был установлен на расстоянии
$X = (\upsilon_л - \upsilon_т)n\Delta t = 12$ км от базового лагеря.

На обратном пути каждая последующая бутылка опускалась в воду на $(\upsilon_л + \upsilon_т)\Delta t = 2$ км ближе к лагерю, чем предыдущая, но на $\Delta t = 0{,}5$ часа позже предыдущей. Поэтому расстояние между ними в реке составляет $(\upsilon_л + \upsilon_т)\Delta t - \upsilon_т\Delta t = 1{,}5$ км, и приплывать в лагерь они будут с тем же интервалом $\Delta T = 1{,}5$ часа, как и бутылки, опущенные в воду по пути вверх по течению. Следует отметить, что бутылки, опущенные на обратном пути, будут приплывать в лагерь в обратной последовательности. Например, после 17-й бутылки через полтора часа приплывёт 16-я (одновременно с 8-й), ещё через полчаса 15-я вместе с 9-й и т.д. Последней в лагере выловят бутылку с номером 12 и произойдёт это через
$12/(\upsilon_л - \upsilon_т) + 12/\upsilon_т = 18$ часов после начала экспедиции.

Одновременно с геологом в лагерь приплывёт бутылка с номером N. Определить N можно из условия $t_1 + t_2 = T$, где t_1 – время от начала экспедиции до момента опускания в воду $N-$й бутылки и t_2 – время возвращения этой бутылки в лагерь. Иначе говоря, $N\Delta t + \left(\upsilon_Л - \upsilon_Т\right) N\Delta t / \upsilon_Т = T$, откуда $N = 6$.

Бутылку с номером 18, которую геолог должен был бы опустить в воду в момент своего возвращения, он опускать не стал ввиду отсутствия необходимости.

Задача имеет наглядное графическое решение, представленное на следующей странице.



Ответы по пунктам:

1. $\upsilon_т = 1$ км/час.
2. $\upsilon_л = 3$ км/час.
3. $T = 9$ час.
4. $X = 12$ км.
5. $\Delta\tau = 1{,}5$ часа.
6. Последней выловят бутылку с номером 12 через 18 часов, после начала экспедиции.
7. Одновременно с геологом в лагерь приплывёт бутылка №6.

Критерии оценивания:

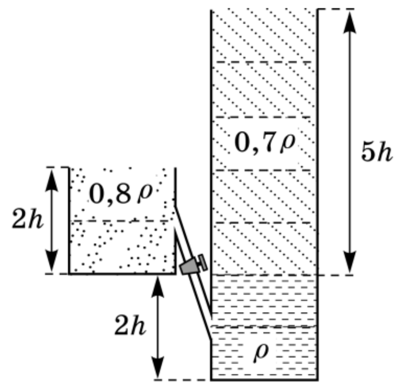
1. Установлено, что $\upsilon_л = 3\upsilon_т$ 1 балл

2. Определено X 2 балла
3. Определена скорость лодки в стоячей воде $\upsilon_л$ 2 балла
4. Определена скорость течения $\upsilon_т$ 2 балла
5. Определена длительность всей экспедиции T 0,5 балла
6. Определён промежуток времени $\Delta\tau$ 0,5 балла
7. Определено время прихода последней бутылки 0,5 балла
8. Определён номер последней бутылки 0,5 балла
9. Определён номер бутылки, которая приплыла одновременно с геологом 1 балл

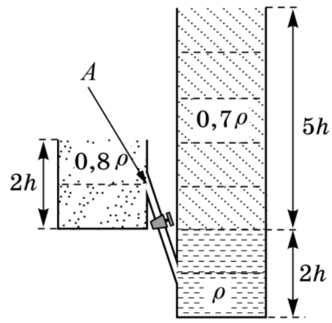
Примечания к критериям. Задача может решаться «по действиям», графически, в системе отсчёта «река».

В любом случае правильные полные обоснованные ответы оцениваются полным баллом.

Задача 8.2. Сообщающиеся сосуды (Замятнин М.). Два сообщающихся сосуда заполнены жидкостями до высот $2h$. Плотность жидкости в правом сосуде ρ, в левом - $0{,}8\rho$. Сосуды смещены по вертикали на высоту $2h$ (см. рисунок). Кран в трубке изначально закрыт. В правый сосуд добавляют $5h$ жидкости с плотностью $0{,}7\rho$. Какой высоты H столб жидкости с плотностью $0{,}7\rho$ останется в правом сосуде после открывания крана? Сверху сосуды открыты. Объёмом соединительной трубки можно пренебречь.



Возможное решение. Определим, куда начнёт перетекать жидкость при открытии крана. В открытых сообщающихся сосудах можно не учитывать воздействие атмосферного давления. Предположим, что жидкость из правого сосуда начнёт переливаться в левый. Сравним величины давления в т. A, создаваемые левым и правым столбами жидкостей (считаем, что трубка заполнилась жидкостью плотностью ρ).



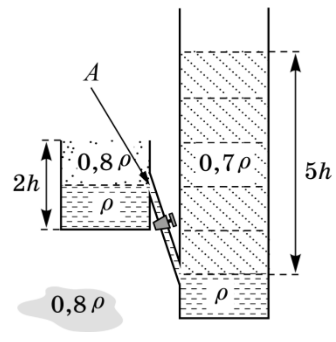
$$0{,}8\rho gh < 0{,}7\rho g(5h) + \rho gh - \rho g(2h);$$
$$0{,}8 < 2{,}5.$$

Значит, наше предположение верно, и жидкость из правого сосуда начнёт перетекать в левый.

Жидкость с плотностью ρ будет переливаться в левый сосуд, вытесняя из него жидкость с плотностью $0{,}8\rho$.

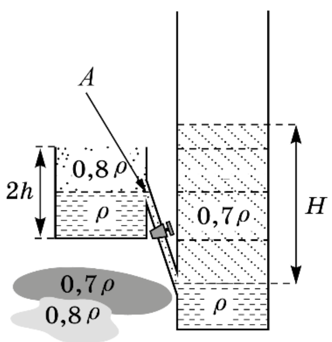
Рассмотрим момент, когда уровень в правом сосуде упал на h.

Трубка начнёт заполняться жидкостью с плотностью $0{,}7\rho$. Опять сравним величины давления в т. A, создаваемые левым и правым столбами жидкостей (считаем, что трубка заполнилась жидкостью с $0{,}7\rho$).



$$0{,}8\rho gh < 0{,}7\rho g(3h);$$
$$0{,}8 < 2{,}1.$$

По-прежнему, наше предположение верно. Значит, переливание продолжится. Однако лёгкая жидкость будет всплывать в левом сосуде и выливаться из него. Давление т. A, создаваемое левым столбом жидкости, изменяться не будет, а справа будет падать до состояния равновесия.



Найдём высоту столба жидкости с плотностью $0{,}7\rho$, который останется в состоянии равновесия:

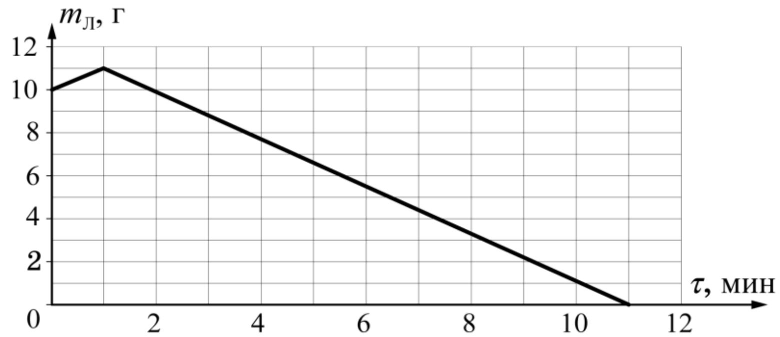
$$0{,}8\rho gh = 0{,}7\rho g(H-2h); \quad (1)$$

$$H = (22/7)h.$$

Критерии оценивания

1) Доказано, что жидкость с плотностью ρ будет переливаться в левый сосуд	2 балла
2) Указано, что жидкость с плотностью $0{,}8\rho$ будет при этом вытекать	1 балл
3) Доказано, что жидкость с плотностью $0{,}7\rho$ будет переливаться в левый сосуд	2 балла
4) Указано, что жидкость с плотностью $0{,}7\rho$ будет при этом вытекать	1 балл
5) Записано уравнение (1) или аналог	3 балла
6) Найдена высота H	1 балл

Задача 8.3. Ледяной столб (Кутелев К.). В теплоизолированный стакан, ко дну которого приморожен столбик льда, начинают наливать воду с постоянным массовым расходом. Это делают столь медленно, что температура всего содержимого стакана в каждый момент времени остаётся одинаковой. График зависимости массы льда от времени приведён на рис.



Пренебрегая тепловыми потерями, определите начальную температуру льда $t_л$ и температуру $t_в$ наливаемой воды.

Постройте график зависимости массы жидкой воды от времени в интервале 0 - 12 минут.

Вода из стакана не вытекает.

Справочные данные: удельная теплоёмкость воды $c_в = 4200$ Дж/(кг·ºС); удельная теплоёмкость льда $c_л = 2100$ Дж/(кг·ºС); удельная теплота плавления льда $\lambda = 320$ кДж/кг.

Возможное решение. Увеличение массы льда на первом участке происходило за счёт замерзания поступающей воды. При этом температура льда росла. К моменту времени $\tau = 1$ мин лёд нагрелся до температуры плавления, а вся поступившая вода превратилась в лёд при $t = 0$ºС. Составим уравнение теплового баланса для первого участка:

$$m_0 c_л(0°C - t_л) = \mu \Delta\tau_1(c_в(t_в - 0°C) + \lambda), \qquad (1)$$

где $m_0 = 10$ г – начальная масса льда, μ - массовый расход воды, $\Delta\tau_1 = 1$ мин – длительность первого участка.

Так как на этом участке вся поступающая вода замерзала, то массовый расход воды равен (с точностью до знака) скорости увеличения массы льда.

$$\mu = \frac{\Delta m}{\Delta \tau_1} = 1 \text{ г/мин}.$$

Далее лёд начал таять за счёт остывания поступающей воды до температуры плавления. К моменту времени $\tau = 11$ мин лёд расплавился полностью. Составим уравнение теплового баланса для второго участка:

$$m_1\lambda = \mu\Delta\tau_2 c_в(t_в - 0°\text{C}), \qquad (2)$$

где $m_1 = 11$ г – масса льда к моменту времени $\tau = 1$ мин, $\Delta\tau_2 = 10$ мин – длительность второго участка. Из [2] найдём начальную температуру наливаемой воды $t_в$:

$$t_в = \frac{m_1\lambda}{\mu\Delta\tau_2} \approx 83{,}81°C.$$

Из уравнения (1) выразим начальную температуру льда $t_л$:

$$t_л = -\frac{\mu\Delta\tau_1}{m_0 c_л}(c_в t_в + \lambda) = -32°C.$$

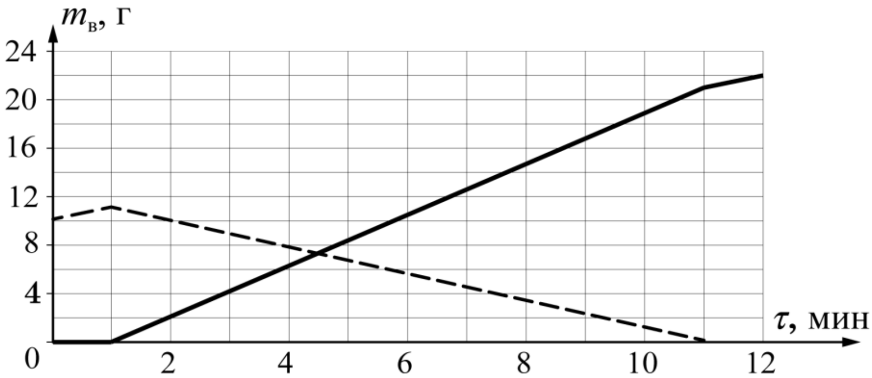
Построим график зависимости массы жидкой воды от времени. До момента τ = 1 мин жидкой воды в стакане не было (она сразу замерзала). Потом её количество линейно от времени возрастало за счёт постоянного притока извне и таяния льда (оно пропорционально притоку извне). К моменту τ = 11 мин масса воды была

$$m(11\text{ мин}) = m_1 + \mu\Delta\tau_2 = 21\text{ г}.$$

Далее сохранился линейный характер изменения массы воды, но наклон изменился, так как закончилось таяние. К моменту τ = 12 мин масса воды была

$$m(12\text{ мин}) = m(11\text{ мин}) + \mu\ 1\text{ мин} = 22\text{ г}.$$

Нанесём полученные данные на график.



На данном графике дополнительно показана зависимость массы льда от времени.

Критерии оценивания

1) Указано, что в конце первого участка в стакане, будет только лёд при t = 0ºC	0,5 балла
2) Правильно составлено уравнение теплового баланса для первого участка	1 балл
3) Правильно рассчитан массовый расход	1 балл
4) Указано, что в конце второго участка в стакане только жидкая вода при t = 0ºC	0,5 балла
5) Правильно составлено уравнение теплового баланса для второго участка	1 балл
6) Правильно найдена начальная температура наливаемой воды $t_в$	1 балл
7) Правильно найдена начальная температура льда $t_л$	1 балла
8) Обоснован линейный от времени характер изменения массы воды	0,5 балла
9) Рассчитана масса воды при τ = 11 мин	0,5 балла
10) Рассчитана масса воды при τ = 12 мин	0,5 балла
11) Построен график	2,5 балла
a) Оси подписаны, включая единицы измерения	0,5 балла
b) Оси правильно оцифрованы	0,5 балла
c) Правильно изображены 3 линейных участка изменения массы воды (по 0,5 балла за каждый участок)	1,5 балла

Примечание к критериям

1. Если массовый расход не вычислен прямо, но используется косвенно в ходе решения, то п.3 засчитывается в полной мере.

2. Если для построения графика рассчитывается масса воды не при $\tau = 11$ мин и $\tau = 12$ мин, а в другие моменты (прямую можно провести через любые точки), то при правильно полученных значениях п.9 - 10 засчитываются в полной мере.

3. Баллы за п.11a и п.11b ставятся только при наличии хоть каких-то графических зависимостей.

4. П. 11b подразумевает, что шкалы оцифрованы равномерно, и график занимает более 70% площади рисунка.

Задача 8.4. В Саргассовом море (Кутелев К.). Считается, что одной из причин исчезновения судов в Саргассовом море является большое количество пузырьков газа, выделяемых водорослями (саргассами).

В некотором месте *A* моря, когда экипаж корабля наблюдал пузырьки газа, поднимающиеся из глубины, судно было погружено на четверть своего объёма. Проплыв некоторое расстояние, корабль погрузился уже наполовину, а концентрация пузырьков увеличилась вдвое. Считая, что размеры пузырьков не изменяются, определите:

1) Во сколько раз плотность «газированной» воды в месте *A* меньше плотности обычной воды?
2) Во сколько раз должна измениться концентрация пузырьков по отношению к концентрации в месте *A*, чтобы судно начало тонуть?

Примечание: Концентрацией пузырьков n будем называть отношение количества пузырьков в «газированной» воде к её объёму.

Возможное решение. Определим, как связана средняя плотность газированной жидкости ρ с концентрацией пузырьков n. По определению:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_\text{В}}{V} = \frac{\rho_\text{В}(V - V_1)}{V}.$$

где m - масса «газировки», V - её объём, $m_\text{В}$ - масса воды (массой пузырей пренебрегаем), $\rho_\text{В}$ - плотность воды, V_1 – объём всех пузырей.

$$\rho = \frac{\rho_B(V - NV_0)}{V} = \rho_B(1 - nV_0), \qquad (1)$$

где V_0 – объём одного пузыря.

Применим условие плавания для корабля:

$$m_\text{К}g = F_\text{А} \rightarrow \rho_\text{К}V_\text{К} = \rho V_\text{П} \rightarrow \rho = \rho_\text{К}\frac{V_\text{К}}{V_\text{П}},$$

где $m_\text{К}$, $\rho_\text{К}$, $V_\text{К}$ – масса, средняя плотность и объём корабля, $V_\text{П}$ - объём погруженной части корабля. Пока судно держится на плаву, должно выполняться условие:

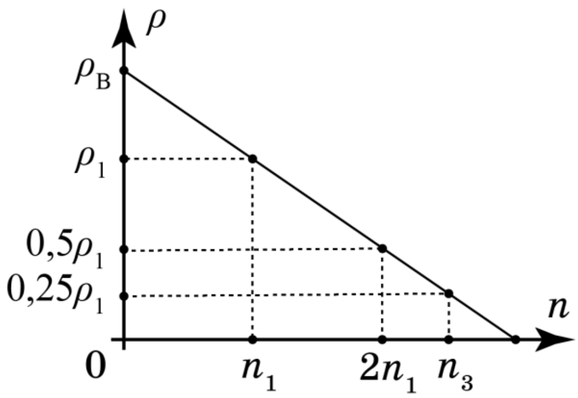
$$\rho_B(1 - nV_0) = \rho_K\frac{V_K}{V_П}. \qquad (2)$$

Применим его к трём нашим случаям:

$$1)\ \rho_B(1 - n_1V_0) = 4\rho_K;\quad 2)\ \rho_B(1 - 2n_1V_0) = 2\rho_K;\ 3)\ \rho_B(1 - n_3V_0) = \rho_K.$$

Решая систему, находим, что $n_3 = \frac{5}{2}n_1$ и $n_1V_0 = \frac{1}{3}$. Тогда $\rho_1 = \rho_B(1 - n_1V_0) = \frac{2}{3}\rho_B$.

Вместо трудоёмкого решения системы можно построить график зависимости средней плотность газированной жидкости от концентрации пузырьков *ρ(n).*



На графике учтено соотношение плотностей «газировки», полученное из условия плавания.

Отметим, что на графике много подобных треугольников. Запишем условия подобия:

$$\frac{n_1}{2n_1} = \frac{\rho_B - \rho_1}{\rho_B - \rho_1/2} \rightarrow \rho_1 = \frac{2}{3}\rho_B.$$

$$\frac{n_1}{n_3} = \frac{\rho_B - \rho_1}{\rho_B - \rho_1/4} = \frac{\rho_B - 2\rho_B/3}{\rho_B - \rho_B/6} \rightarrow n_3 = \frac{5}{2}n_1.$$

Критерии оценивания

1. Получена связь концентрации с плотностью	1 балл
2. Записано условие плавания корабля для сил	1 балл
3. Записано условие плавания корабля для плотностей [2]	1 балл
4. Применены условия плавания к данным задачи	3 балла
5. Найдено $n_3 = 5n_1/2$	2 балла
6. Найдено $\rho_1 = 2\rho_B/3$	2 балла

Примечание к критериям

1. В п.4 каждое уравнение оценивается в 1 балл.
2. Если какие-то из промежуточных пунктов критериев отсутствуют в работе в явном виде, но косвенно учитываются в дальнейшем решении, то данные пункты критериев оцениваются в полной мере.