

Теоретический тур

9 класс

Задача 1. Навигация

Движущийся равномерно и прямолинейно корабль прошел точку A , находящуюся на расстоянии $L = 5$ км от пристани B (рис. 1). Через некоторое время τ после этого от корабля и от пристани навстречу друг другу отправились два катера. Перерисуйте рисунок в бланк решений и построениями с помощью циркуля и линейки без делений определите точку, в которой находился корабль в момент встречи катеров, если известно, что:

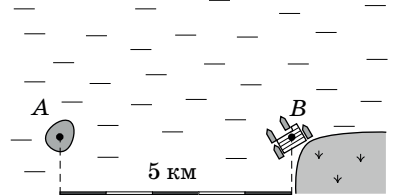


Рис. 1

- катера двигались по прямой с одинаковыми скоростями, составляющими $3/8$ от скорости корабля;
 - время движения катеров от их старта до встречи также равно τ ;
 - при встрече катеров корабль вновь оказался на расстоянии L от пристани.
- Опишите последовательность построений и найдите расстояние (в километрах), которое проходит катер за время τ ? Ветра и течения нет.

Примечание: на рисунке расстояние AB разделено на 5 равных интервалов.

Задача 2. Безопасная дистанция

По прямому участку дороги с одинаковой скоростью v друг за другом едут две машины, одна из которых при торможении замедляется с ускорением a_1 , а другая с ускорением a_2 . Если начнет тормозить водитель передней машины, то водитель задней среагирует и нажмет на педаль тормоза не сразу, а с задержкой $\tau = 1,0$ с. В зависимости от того, какая из машин будет ехать впереди, минимальная безопасная дистанция, позволяющая избежать столкновения между ними, окажется равной либо $L_1 = 5$ м, либо $L_2 = 40$ м. Определите, с какой скоростью едут машины.

Задача 3. Стремянка

На рисунке 2 изображена упрощённая модель лестницы-стремянки, состоящей из соединённых шарнирно легкой опоры и массивной части, наклоненных под углами $\beta = 20^\circ$ и γ к вертикали ($\text{tg } \gamma = 2 \text{tg } \beta$). Масса лестницы $m = 20$ кг. Определите, с какой силой взаимодействуют между собой части лестницы. Трения в шарнире нет. Коэффициент трения μ между полом и касающимися его частями стремянки одинаков. При каком минимальном значении коэффициента μ части лестницы не будут разъезжаться? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

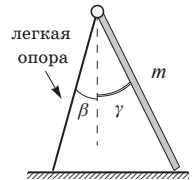


Рис. 2

Задача 4. Четырёхцилиндровый нагрев

В цилиндрический стакан калориметра налито $m_0 = 200$ г жидкости плотностью ρ_0 при температуре $t_0 = 0^\circ\text{C}$. В термостате при неизвестной температуре T находится набор однородных цилиндров из одного и того же металла плотностью $\rho = 6\rho_0$. Диаметр всех цилиндров одинаков и практически совпадает (чуть меньше) с диаметром стакана. При погружении в калориметр цилиндра массы m , тепловое равновесие устанавливается при температуре $t_1 = 10^\circ\text{C}$. Если вместо первого цилиндра в калориметр был бы погружен цилиндр массой $1,6m$, то установилась бы температура $t_2 = 15^\circ\text{C}$. При погружении цилиндра массы $3m$ установилась бы температура $t_3 = 30^\circ\text{C}$, а для цилиндра массы $4m$ — температура $t_4 = 45^\circ\text{C}$. Ось цилиндров при погружении вертикальна. Определите:

1. температуру T цилиндров;
2. долю γ объёма стакана калориметра, заполненного жидкостью;
3. массу m первого цилиндра;
4. отношение удельных теплоемкостей c_0 жидкости и c металла.

Задача 5. Треугольная призма

Электрическая цепь, представляющая собой треугольную призму с диагоналями в боковых гранях (рис. 3), состоит из проводников с одинаковым сопротивлением $R = 12$ Ом независимо от их длины.

Определите сопротивление цепи между узлами: 1) A и A_1 ; 2) C и A_1 .

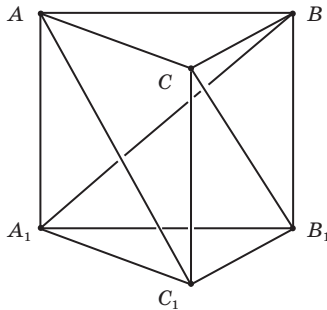


Рис. 3

10 класс

Задача 1. Гантель

На гладком горизонтальном столе лежит гантель, состоящая из двух маленьких по размеру шайб, имеющих массы m_1 и m_2 , соединенных легким жестким (деформации стержня малы по сравнению с его размерами) стержнем длины L . В момент времени $t = 0$ на шайбу с массой m_1 начинает действовать постоянная по величине горизонтальная сила F . Направление действия силы всегда составляет один и тот же острый угол α со стержнем (рис. 4). Считайте известным, что при таком движении угловое ускорение стержня является постоянным.

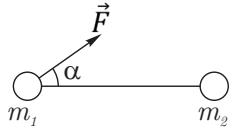


Рис. 4

В некоторый момент времени τ после начала действия силы стержень на мгновение оказался не напряженным (то есть ни сжатым, ни растянутым).

1. Найдите угловую скорость ω вращения стержня в момент времени τ .
2. Найдите угловое ускорение стержня $d\omega/dt$.
3. Чему равен промежуток времени τ ?
4. Найдите угол поворота стержня к моменту времени τ .

Задача 2. Поканальное движение

Небольшие частицы с одинаковыми массами m и зарядами q и $-q$ движутся без трения по пересекающимся под прямым углом узким прямым каналам, расположенным в горизонтальной плоскости (рис. 5). При этом оказалось, что в процессе дальнейшего движения расстояние R между частицами остаётся неизменным.

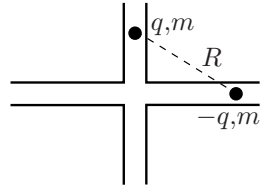


Рис. 5

Найдите суммарную кинетическую энергию частиц.

Задача 3. Архив лорда Кельвина

В архиве лорда Кельвина нашли график циклического процесса, совершенного над фиксированным количеством одноатомного идеального газа (рис. 6). От времени чернила выцвели, и информация про направления некоторых процессов была утрачена. Также была утрачена и информация про то, что отложено по оси абсцисс. Известно лишь, что на оси абсцисс отложена одна из следующих величин: объем, давление, температура или плотность, а шкала выполнена в условных единицах. По оси ординат отложена молярная теплоемкость газа C . Найдите максимально возможный КПД цикла.

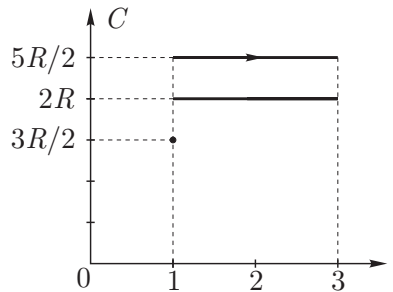


Рис. 6

Задача 4. Заряженная пластинка

Тонкая плоская пластинка из диэлектрика в форме ромба со стороной a и острым углом 60° заряжена однородно с поверхностной плотностью заряда σ . Потенциал в вершине острого угла ромба равен φ_1 , в вершине тупого — φ_2 (рис. 7). Из такого же диэлектрика вырезают тонкую пластинку в форме равностороннего треугольника ABC со стороной $2a$ и заряжают ее с такой же поверхностной плотностью заряда (рис. 8).

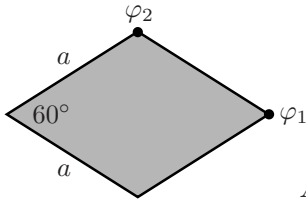


Рис. 7

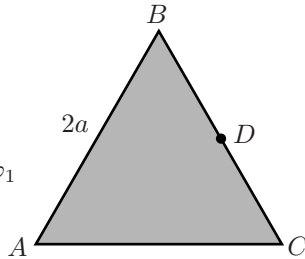


Рис. 8

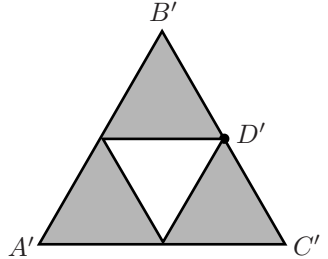


Рис. 9

1. Определите потенциал в точке C треугольной пластинки.
2. Определите потенциал в точке D , лежащей на середине стороны треугольной пластинки.

Теперь из треугольной пластинки ABC удаляют правильный треугольник со стороной a (рис. 9).

3. Определите потенциал в точке D' «дырявой» пластинки.
4. Определите потенциал в точке C' «дырявой» пластинки.

Примечание. Все пластины удалены друг от друга и других тел.

Задача 5. Оцени и докажи

Бесконечная сетка с квадратными ячейками собрана из одинаковых резисторов. В узел A извне втекает ток I (рис. 10). Оцените силу тока в звене BC с погрешностью не более 10%. Докажите, что погрешность вашей оценки не превышает 10%.

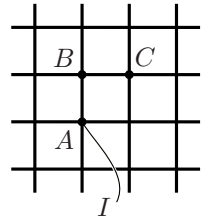


Рис. 10

11 класс

Задача 1. Два цилиндра

Внутри закреплённого цилиндра радиуса R , ось O которого горизонтальна, помещают легкий цилиндр вдвое меньшего радиуса. Ось C меньшего цилиндра также горизонтальна. На поверхности меньшего цилиндра закреплено маленькое тело массы m . Меньший цилиндр удерживают так, что тело находится на оси большего цилиндра, а плоскость OC (в которой лежат оси обоих цилиндров) составляет угол α с вертикалью (рис. 11).

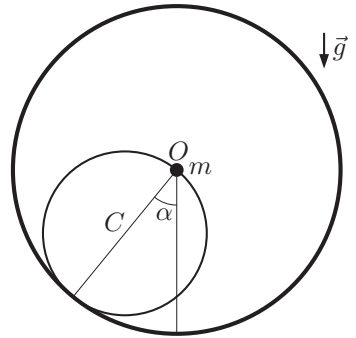


Рис. 11

1. Меньший цилиндр отпускают и он начинает катиться по внутренней поверхности большего без проскальзывания. Определите ускорение тела сразу после начала движения.
2. Определите ускорение и скорость тела в момент времени, когда плоскость OC вертикальна. Считайте, что до этого момента движение шло без проскальзывания.
3. Определите минимальное значение коэффициента трения между цилиндрами μ , при котором возможно движение без проскальзывания до момента, когда плоскость OC займёт положение симметричное начальному по отношению к вертикали.
4. Определите скорость тела в момент начала проскальзывания, если коэффициент трения между цилиндрами задан и равен μ .

Задача 2. Вещества X и Y

В двух одинаковых сосудах с поршнем при одинаковых давлении p_A и температуре T_A находятся одинаковые смеси равных масс m жидкой и твердой фазы вещества X. При этом плотность твердой фазы на 20% больше плотности жидкой фазы ρ_X . Не изменяя внешнего давления, к первому сосуду медленно подводят известное количество теплоты Q_1 . В этом процессе масса твердой фазы уменьшается вдвое. Затем, обеспечив надежную теплоизоляцию сосуда, немного увеличивают внешнее давление. Обозначим это состояние «В».

Внешние воздействия на второй сосуд проводят в обратном порядке: сначала увеличивают давление, а затем, поддерживая его постоянным, подводят необходимое для перевода в то же состояние В количество теплоты Q_2 .

1. Какое количество теплоты больше, Q_1 или Q_2 ?

2. Определите давление p_B в состоянии B .
3. Определите температуру T_B в состоянии B .

Этот же эксперимент с двумя сосудами был проведен со смесями равных масс m жидкой и твердой фаз другого вещества Y , у которого в начальном состоянии C плотность твердой фазы на 20% меньше плотности жидкой фазы ρ_Y . Оказалось, что для изобарического плавления половины твердой фазы Y при переходе из состояния (p_C, T_C) потребовалось подвести количество теплоты Q_3 , а для перехода в конечное состояние D во втором сосуде — количество Q_4 .

4. Какое количество теплоты больше, Q_3 или Q_4 ?
5. Определите давление p_D в состоянии D .
6. Определите температуру T_D в состоянии D .

Задача 3. Зачем нужны диоды

Электрическая схема состоит из трех конденсаторов C_1, C_2, C_3 одинаковой емкости C , катушки с индуктивностью L , двух идеальных диодов, источника постоянного напряжения U_0 , ключа K (рис. 12). Первоначально перед замыканием ключа конденсаторы не заряжены. Затем ключ переводят в положение 1, и, после установления равновесия, переключают в положение 2.

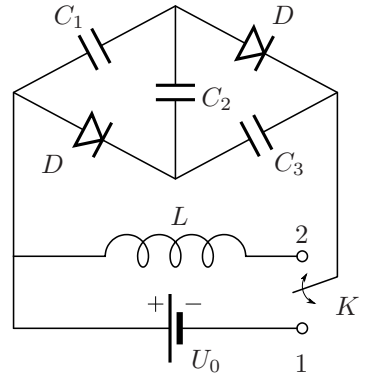


Рис. 12

1. Чему равны напряжения на конденсаторах U_1, U_2 и U_3 перед переключением ключа в положение 2?
2. Чему равно максимальное значение I_D тока через диоды после переключения ключа в положение 2?
3. В каких пределах ($[U_1^{\min}, U_1^{\max}]$, $[U_2^{\min}, U_2^{\max}]$ и $[U_3^{\min}, U_3^{\max}]$) изменяются напряжения на конденсаторах после переключения ключа в положение 2?
4. Качественно изобразите график зависимости сила тока I , протекающего через индуктивность, от времени.
5. Чему равен период колебаний T тока I ?

Активным сопротивлением индуктивности и проводов можно пренебречь.

Задача 4. Магнитный шнур

Тонкий, однородный нерастяжимый гибкий шнур длины l изготовлен из ферромагнетика, причем магнитный момент каждого его маленького элемента направлен вдоль шнура.

Один конец шнура удерживают на расстоянии l_1 ($l_1 > l$) от бесконечного прямого провода, по которому течет электрический ток силой I (рис. 13). Пренебрегая силой тяжести и собственным магнитным полем шнура

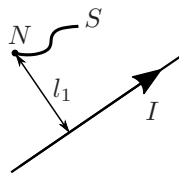


Рис. 13

1. найдите расстояние между концами шнура в состоянии равновесия;
2. на каком расстоянии от провода окажется свободный конец шнура?

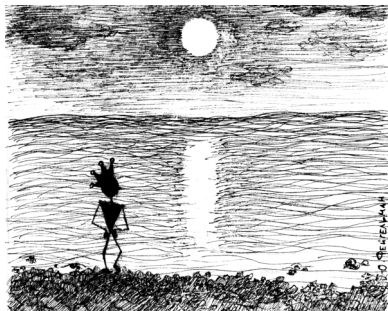
Указание. Энергия маленького элемента шнура длиной Δl во внешнем магнитном поле с индукцией \vec{B} определяется выражением

$$\Delta W = -k B \Delta l \cos \varphi,$$

где φ — угол между \vec{B} и направлением шнура, а k — постоянный коэффициент.

Задача 5. Русалочка

В открытом море вода совсем синяя, как лепестки самых красивых васильков, и прозрачная, как чистое стекло, — но зато и глубоко там! Ни один якорь не достанет до дна; на дно моря пришлось бы поставить одну на другую много-много колоколен, только тогда бы они могли высунуться из воды. На самом дне живут русалки.



Г.Х. Андерсен.

Рис. 14

Ясной ночью принц, ростом $H = 1,8$ м, мечтал на берегу спокойного Тихого океана и смотрел на лунную дорожку, которая начиналась от него на расстоянии $D_{\Pi} = 5$ м по горизонтали и имела длину $L_{\Pi} = 50$ м. В это же самое время у берега под водой на глубине H лежала Русалочка, тоже о чем-то мечтающая.

1. На каком расстоянии D_R от себя (тоже по горизонтали) лунную дорожку будет видеть Русалочка?
2. Какой длины L_R будет эта дорожка?

Считайте, что легкий бриз создает мелкую одинаковую рябь по всей поверхности океана. Показатель преломления морской воды $n = 1,35$. Угловым размером Луны можно пренебречь.

Указание.

- Бриз, -а, м. Слабый береговой ветер, дующий днём с моря на сушу, а ночью с суши на море.
- Рябь, -и, ж.
 1. Мелкое волнение водной поверхности. *Озеро подёрнулось рябью.*
 2. Ощущение в глазах пестроты, множества разноцветных точек. *В глазах р.*

С.И. Ожегов и Н.Ю. Шведова
Толковый словарь русского языка

Возможные решения

Теоретический тур

9 класс

Задача 1. Навигация (Е. А. Подольяко)

1. В момент встречи катеров корабль вновь оказался на расстоянии L от пристани. Проведем окружность радиусом AB с центром в точке B (окружность 1). Через время 2τ корабль должен находиться где-то на этой окружности.
2. Учет соотношения скоростей корабля и катеров дает, что расстояния, пройденные за время τ кораблем и вместе двумя катерами, относятся как 4 к 3.
3. Так как времена движения корабля до начала движения катеров и после равны, линия, вдоль которой двигались катера, является высотой в равнобедренном треугольнике с вершинами в точках начального положения корабля A , пристани B и конечного положения корабля. Следовательно, треугольник с вершинами в точках начального положения корабля A , пристани B и в месте отправления катера от корабля — прямоугольный.
4. Применяя теорему Пифагора, получим, что катера до встречи прошли расстояние 3 км, а корабль за это время — 4 км.
5. Найдем место старта катера, отправившегося от корабля, построив окружности радиусом 3 км с центром в точке B (окружность 2) и радиусом 4 км с центром в точке A (окружность 3) до их пересечения (точка C) (рис. 16).

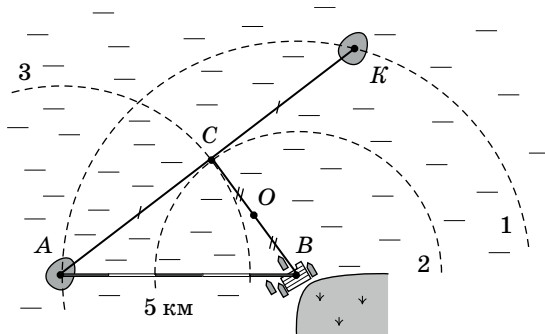


Рис. 16

6. Продлив прямую AC до пересечения с окружностью 1, получим искомое положение корабля (точка K) в момент встречи катеров.

7. Так как катера встретились на середине отрезка CB (точка O), то каждый из них прошел расстояние 1,5 км.

Задача 2. Безопасная дистанция (М. Ю. Замятнин)

Если машины не встречаются до полной остановки, то безопасное расстояние между ними складывается из разности тормозных путей до полной остановки и длины участка, на котором задний автомобиль движется с постоянной скоростью. Такой сценарий однозначно реализуется, если сзади едет машина, тормозящая с меньшим ускорением a_1 (см. график зависимости мгновенной скорости u машин от времени t (рис. 17)). Безопасная дистанция, при этом принимает большее значение (L_2).

$$L_2 = v\tau + \frac{v^2}{2a_2} - \frac{v^2}{2a_1} \quad \text{или} \quad L_2 = v\tau + \frac{v^2}{2} \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2}$$

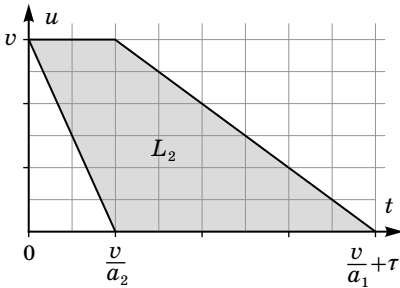


Рис. 17

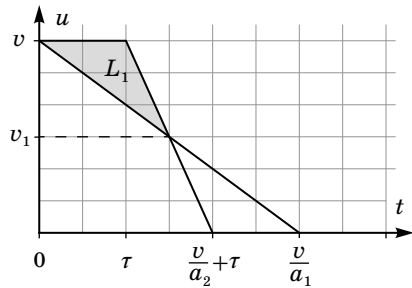


Рис. 18

Возможна ситуация, при которой задняя машина, начинающая торможение позже, но движущаяся затем с большим ускорением, догоняет переднюю, когда та еще не остановилась (рис. 18).

Для реализации этого случая, необходимо выполнение условия:

$$\tau + \frac{v}{a_2} < \frac{v}{a_1}, \quad \text{или} \quad v > \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} \tau \quad (1)$$

Тогда безопасная дистанция рассчитывается по формуле $L_1 = \frac{1}{2}\tau(v - v_1)$, и с учетом соотношений: $v - v_1 = a_1 t$ и $v - v_1 = a_2(t - \tau)$

$$L_1 = \frac{1}{2}\tau^2 \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1}, \quad \text{откуда} \quad L_2 = v\tau + \frac{v^2}{4} \frac{\tau^2}{L_1}.$$

Решая квадратное уравнение $v^2\tau^2 + 4L_1v\tau - 4L_1L_2 = 0$ относительно v , получим:

$$v = \frac{2L_1}{\tau} \left(\sqrt{1 + \frac{L_2}{L_1}} - 1 \right) = 20 \text{ м/с.} \quad (2)$$

В предположении встречи после остановки первой машины получается ответ: $v = \frac{L_1 + L_2}{2\tau} = 22,5$ м/с, что принципиально неверно для заданных в условии расстояний.

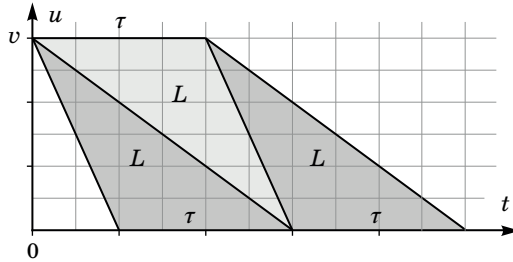


Рис. 19

Отметим, что так как $\frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} = \frac{2L_1}{\tau^2}$, условие (1) может быть записано так $v > 2L_1/\tau$. Сравнение этого неравенства с формулой (2) дает простое выражение для условия реализации встречи машин до остановки ($L_2/L_1 > 3$). На (рис. 19) представлена графическая интерпретация этого неравенства.

Задача 3. Стремянка (М. Ю. Замятин)

Рассмотрим внешние силы, действующие на всю лестницу (рис. 20). Из правила моментов относительно правой нижней точки, с учетом соотношения $\tan \gamma = 2 \tan \beta$, получим $3N_1 = mg$. Откуда $N_1 = \frac{1}{3}mg$, а $N_2 = \frac{2}{3}mg$.

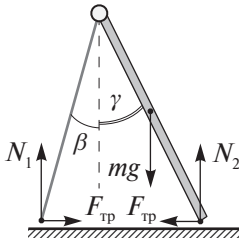


Рис. 20

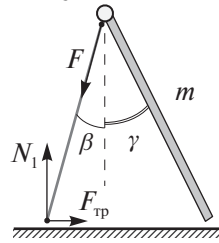


Рис. 21

Сила, действующая на опору со стороны шарнира может быть направлена только вдоль нее (рис. 21). В противном случае возникнет некомпенсированный момент относительно нижней точки опоры. Таким образом

$$F = \frac{N_1}{\cos \beta} = \frac{1}{3} \frac{mg}{\cos \beta} = 71 \text{ Н.}$$

Из равенства нулю суммы горизонтальных сил следует, что силы трения равны. Но, первой проскользнет легкая опора, так как на нее действует меньшая

сила нормальной реакции. Минимальное значение коэффициента трения:

$$\mu = \operatorname{tg} \beta = 0,36.$$

Задача 4. Четырёхцилиндровый нагрев (А. Н. Аполонский)

Пусть M — масса цилиндра. В случае, если после погружения цилиндра в калориметр жидкость не вытекает, уравнение теплового баланса выглядит так: $cM(T - t) = c_0 m_0 t$, где t — установившаяся в калориметре температура, отсюда:

$$t = \frac{cMT}{cM + c_0 m_0} \quad \text{и} \quad \frac{1}{t} = \frac{1}{T} + \frac{c_0}{c} \frac{m_0}{T} \frac{1}{M} \quad (3)$$

Зависимость $y = \frac{1}{t}$ от $x = \frac{1}{M}$ будет линейной с угловым коэффициентом $k_1 = \frac{c_0 m_0}{cT}$ и свободным членом $b_1 = \frac{1}{T}$.

Рассмотрим случай, когда при погружении часть жидкости вытекает, то есть объем цилиндра больше объема части калориметра, незанятого жидкостью ΔV . Тогда уравнение теплового баланса имеет вид:

$$cM(T - t) = c_0 \left(m_0 - \frac{M}{\rho} \rho_0 + \rho_0 \Delta V \right) t,$$

$$t = \frac{cMT}{cM + c_0 m_0 + c_0 \rho_0 \Delta V - \frac{M}{\rho} \rho_0 c_0}$$

Для обратных величин:

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{T} \left(1 - \frac{c_0 \rho_0}{c\rho} \right) + \frac{c_0}{c} \frac{m_0 + \Delta m}{T} \frac{1}{M}, \quad (4)$$

здесь $\Delta m = \rho_0 \Delta V$.

Нанесем на координатную плоскость (y, x) , где $y = \frac{1}{t}$, $x = \frac{m}{M}$ данные условия задачи. Соответствующий масштаб выбран для удобства (рис. 22). Видно, что точки, соответствующие данным в условии, принадлежат двум разным зависимостям, т. 1 и т. 2 зависимости (3) (объем цилиндра меньше объема ΔV), т. 3 и т. 4 зависимости (4) (объем цилиндра больше объема ΔV).

Применяя дважды уравнение (3) для первого и второго цилиндра, получим, что их начальная температура $T = 90^\circ\text{C}$.

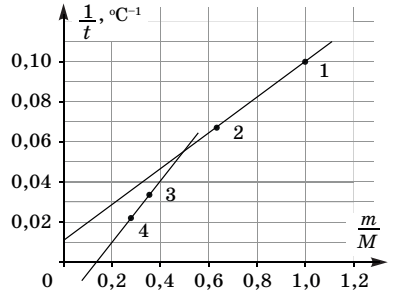


Рис. 22

Из сравнения угловых коэффициентов наклона зависимостей

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{m_0 + \Delta m}{m_0} = \frac{3}{2},$$

следует, что доля объема стакана, заполненная жидкостью $\gamma = \frac{2}{3}$.

Пересечение графиков при $m/M = 0,5$ соответствует моменту начала вытекания жидкости. При этом масса цилиндра равна $2m = 6\rho_0 V/3$. Но масса жидкости $m_0 = \rho_0 2V/3$, следовательно, $m = \frac{3}{2}m_0 = 300$ г. Подставив, значения T и m в уравнение (3) для первого цилиндра, получим: $c_0/c = 12$.

Задача 5. Треугольная призма (В. П. Слободянин)

1) При подключении к узлам A и A_1 эквивалентная схема имеет вид (рис. 23)

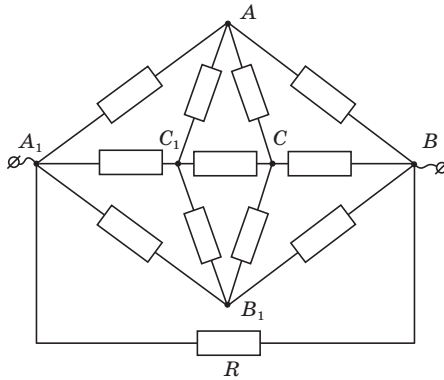


Рис. 23

Разорвав узлы A и B_1 , получим схему (рис. 24), которая сводится к системе элементарных параллельных и последовательных соединений резисторов.

$$\frac{1}{R_{AB_1}} = \frac{1}{R} + \frac{2}{2R} + \frac{1}{2R + \frac{R}{2}}$$

Откуда $R_{AA_1} = \frac{5}{12}R = 5$ Ом.

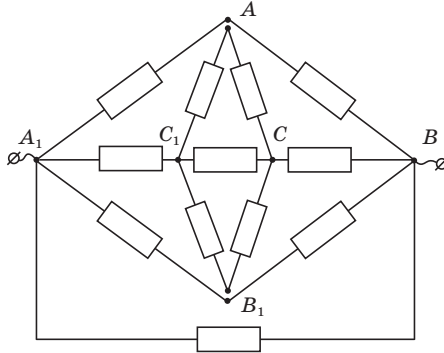


Рис. 24

2) При подключении к узлам C и A_1 эквивалентная схема представляет собой сбалансированный мост (рис. 25). Токи через резисторы, подсоединенные между узлами A , B , C_1 , B_1 не идут, и $R_{CA_1} = \frac{1}{2}R = 6 \text{ Ом}$.

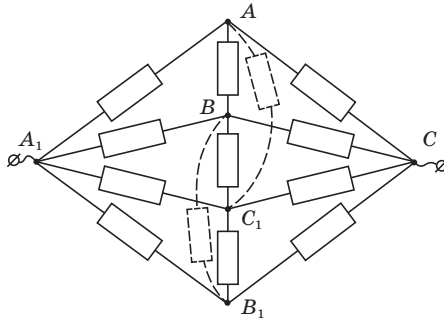


Рис. 25

10 класс

Задача 1. Гантель (С. Д. Варламов)

Рассмотрим момент времени τ . Так как стержень не напряжен, то ускорение груза с массой m_2 равно нулю. Если выбрать инерциальную систему отсчета, в которой эта шайба (m_2) в данный момент времени имеет нулевую скорость, то шайба с массой m_1 в этот момент движется по траектории, радиус кривизны которой равен L . Проекция ускорения шайбы m_1 на стержень в этот момент равна $\frac{F \cos \alpha}{m_1}$, и эта же проекция равна $\omega^2 L$. Значит угловая скорость вращения стержня в этот момент времени равна: $\omega = \sqrt{\frac{F \cos \alpha}{L m_1}}$.

Найдем угловое ускорение. За небольшой промежуток времени после начала действия силы шайба, к которой приложена сила, сместится в направлении перпендикулярном к первоначальному направлению расположения стержня на малое расстояние

$$dL_{\text{попер}} = \frac{F \sin \alpha}{m_1} \frac{t^2}{2}.$$

Следовательно, стержень повернется на малый угол, равный

$$d\varphi = \frac{dL_{\text{попер}}}{L} = \frac{F \sin \alpha}{m_1 L} \frac{t^2}{2}.$$

Так как в условии сказано, что угловое ускорение стержня является постоянным, то $d\varphi = \beta \frac{t^2}{2}$, отсюда получаем угловое ускорение $\beta = \frac{F \sin \alpha}{L m_1}$. Так как угловое ускорение постоянно, то $\omega = \beta \tau$, откуда $\tau = \sqrt{\frac{L m_1 \cos \alpha}{F \sin^2 \alpha}}$. Угол поворота к моменту времени τ равен $\varphi = \frac{\beta \tau^2}{2} = \frac{\text{ctg } \alpha}{2}$.

Задача 2. Поканальное движение (И. И. Воробьев)

Введём оси координат XU с началом в точке пересечения каналов O , направленные вдоль них (рис. 26). Если x и y координаты частиц, то при неизменности расстояния между ними имеем:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

При неизменности расстояния, а значит и потенциальной энергии, из закона сохранения энергии следует, что сумма квадратов скоростей шариков неизменна

$$v_x^2 + v_y^2 = \text{const}$$

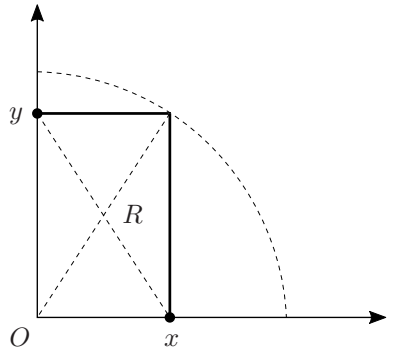


Рис. 26

Для ускорений шариков из 2-го закона Ньютона и закона Кулона:

$$a_x = -kq^2x/(mR^3) \quad \text{и} \quad a_y = -kq^2y/(mR^3)$$

поскольку поперечные каналам проекции кулоновской силы уравновешиваются силами нормальной реакции опоры, а сил трения нет.

Рассмотрим воображаемую «квазичастицу» массой m , движущуюся в плоскости XU . Пусть координаты частицы равны координатам x и y наших шариков. Пусть на частицу действует сила равная kq^2/R^2 и направленная к точке O . Заметим, что проекции ускорения «квазичастицы» на оси X и Y в точности равны ускорениям исходных частиц a_x и a_y . Учитывая, что и координаты «квазичастицы» равны координатам исходных частиц, получим, что движение «квазичастицы» по окружности радиуса R эквивалентно движению исходных частиц. Заметим, что скорость движения квазичастицы по окружности v постоянна, так как $v^2 = v_x^2 + v_y^2$.

Для центростремительного ускорения квазичастицы из выражений для проекций ускорения имеем:

$$v^2/R = kq^2/(mR^2),$$

откуда для искомой кинетической энергии

$$m(v_x^2 + v_y^2)/2 = mv^2/2 = kq^2/(2R).$$

Задача 3. Архив лорда Кельвина (*Л. М. Колдунов, А. Н. Жигар*)

Заметим, что цикл состоит из трех процессов, с теплоемкостями $\frac{5}{2}R$, $\frac{3}{2}R$ и $2R$, значит первые два процесса это соответственно — изохорический, изобарический. Выясним какой процесс имеет теплоемкость $2R$.

$$C = \frac{dQ}{dT} = \frac{\frac{3}{2}(PdV + VdP) + PdV}{\frac{1}{R}(PdV + VdP)} = 2R,$$

откуда получим $PdV = VdP$ или $\frac{P}{V} = \frac{dP}{dV}$, что соответствует процессу в котором давление пропорционально объему.

Заметим, что изохорический процесс на графике в условии представлен в виде точки, что означает, что по оси абсцисс отложен объем или плотность. Рассмотрим вариант, где по оси абсцисс отложен объем. Тогда используя тот факт, что один из процессов — это изобарическое расширение и что изохорический процесс происходит при наименьшем значении объема на изобаре, получаем следующий вид цикла (рис. 27).

Найдем его КПД, обозначив минимальные давления и объем за P_0 и V_0 .

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{пол}}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2P_0 \cdot 2V_0}{\frac{3}{2}(3P_0 \cdot 3V_0 - P_0V_0) + 3P_0 \cdot 2V_0} = \frac{2P_0V_0}{18P_0V_0} = 1/9$$

Если по оси абсцисс графика из условия отложено ρ или $\frac{1}{V}$, то соответствующий график процесса представлен на рисунке (рис. 28).

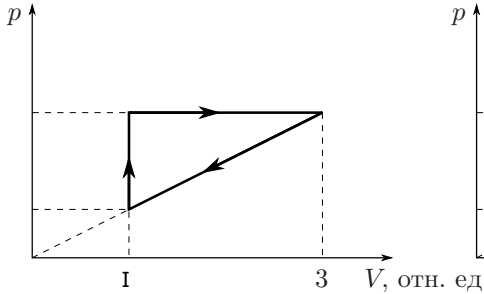


Рис. 27

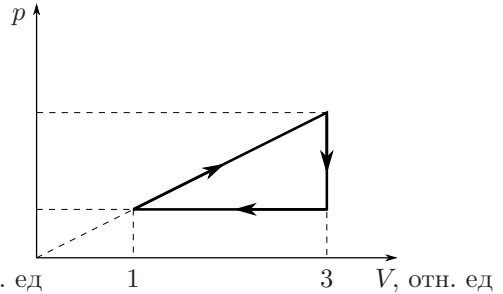


Рис. 28

Рассчитаем КПД цикла в этом случае:

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{пол}}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2P_0 \cdot 2V_0}{\frac{3}{2}(3P_0 \cdot 3V_0 - P_0V_0) + \frac{P_0+3P_0}{2} \cdot 2V_0} = \frac{2P_0V_0}{16P_0V_0} = 1/8.$$

Таким образом максимальный КПД цикла равен $1/8$.

Задача 4. Заряженная пластинка (А. М. Аполонский)

По принципу суперпозиций потенциал φ_2 равен удвоенному потенциалу вершины равносторонней треугольной пластины со стороной a и поверхностной плотностью заряда σ .

Если размеры пластины увеличить в 2 раза, сохранив поверхностную плотность заряда, то потенциал каждой точки тоже увеличится в 2 раза. Для доказательства этого факта можно разбить исходную пластинку на маленькие части, которые можно считать точечными зарядами. В результате масштабирования площадь каждой части увеличится в 4 раза, а значит и заряд вырастет в 4 раза, а расстояние до каждой части увеличится в 2 раза. Учитывая, что потенциал точечного заряда равен $\frac{kq}{r}$, получим, что потенциал, создаваемый каждой маленькой частью, увеличится в 2 раза, значит и общий потенциал вырастет вдвое. Значит потенциал точки C в 2 раза больше потенциала вершины пластины со стороной a , $\varphi_C = \varphi_2$.

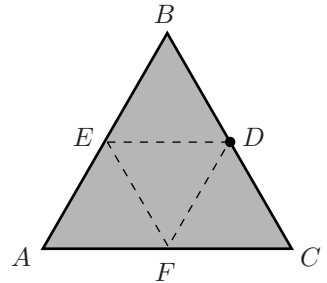


Рис. 29

Найдём потенциал точки D . Для этого мысленно разобьём треугольник на 4 треугольника со сторонами a . Заметим, что $AEDF$ — это исходный ромб, который создает в точке D потенциал φ_1 . К нему нужно добавить потенциалы создаваемые треугольниками BDE и DFC (рис. 29). Потенциал каждого из них в вершине равен $\varphi_2/2$. Отсюда $\varphi_D = \varphi_1 + \varphi_2$.

После удаления центрального треугольника потенциал в точке D уменьшился на $\varphi_2/2$ и стал равен $\varphi'_D = \varphi_1 + \varphi_2/2$.

Для нахождения потенциала точки C «дырявой» пластины нужно узнать, какой потенциал создавал в ней треугольник DEF . Рассмотрим ромб $CFED$. Его потенциал в точке C равен φ_1 и складывается из потенциала создаваемого треугольником DEF и потенциала создаваемого треугольником FDC и равного $\varphi_2/2$. Тогда треугольник DEF создает в точке C потенциал $\varphi_1 - \varphi_2/2$. Значит после удаления центрального треугольника потенциал точки C станет равным $\varphi'_C = \varphi_2 - (\varphi_1 - \frac{\varphi_2}{2}) = \frac{3}{2}\varphi_2 - \varphi_1$.

Задача 5. Оцени и докажи (Р. Ю. Компанеец)

Из соображений симметрии очевидно, что из узла A ток разбежится поровну по 4 возможным направлениям (рис. 30). Значит, $I_1 = I/4$. В узле B ток делится на 3 части. Из соображений симметрии понятно, что ток, бегущий вправо, будет равен току, бегущему влево. Обозначим эти токи I_2 , а оставшийся ток I_3 . Из соображений симметрии относительно прямой AC следует, что по звену FC тоже течет ток I_2 . Также из симметрии следует, что токи, вытекающие из узла C вверх и вправо равны друг другу. Учитывая, что в узел C втекает ток $2I_2$, получаем, что вытекающие из него токи тоже равны I_2 .

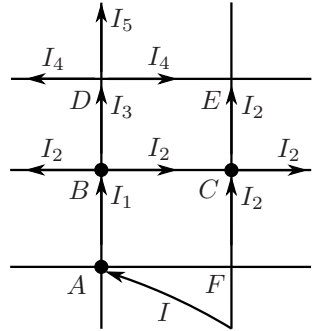


Рис. 30

Для узла B : $I_1 = \frac{I}{4} = 2I_2 + I_3 \Rightarrow I_3 = \frac{I}{4} - 2I_2$.

Напряжение между узлами B и E можно посчитать двумя способами: $I_3R + I_4R = I_2R + I_2R \Rightarrow I_4 = 2I_2 - I_3$.

Для узла D : $I_3 = 2I_4 + I_5$. Так как $I_5 > 0$, то $I_3 > 2I_4$.

Преобразуем $I_3 > 2(2I_2 - I_3) \Rightarrow 3I_3 > 4I_2 \Rightarrow 3(\frac{I}{4} - 2I_2) > 4I_2 \Rightarrow 3I - 24I_2 > > 16I_2 \Rightarrow I_2 < \frac{3}{40}I$.

С другой стороны $I_4 > 0 \Rightarrow 2I_2 - I_3 > 0 \Rightarrow 2I_2 - \frac{I}{4} + 2I_2 > 0 \Rightarrow I_2 > \frac{I}{16}$.

Значит $\frac{1}{16}I < I_2 < \frac{3}{40}I$ или $\frac{10}{160}I < I_2 < \frac{12}{160}I$.

Окончательно получаем $I_2 = (\frac{11}{160} \pm \frac{1}{160})I$. Погрешность оценки составляет $1/11=9\%$.

11 класс

Задача 1. Два цилиндра (А. И. Уймин)

Если проскальзывания нет, то длина дуги AB равна длине дуги BD (и OE). Так как радиусы цилиндров различаются в два раза, то $\angle OCE = 2 \cdot \angle AOB$.

Треугольник OCE — равнобедренный, значит $\angle COE = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle OCE = 90^\circ - \angle AOB$, а значит $\angle AOE = 90^\circ$.

Таким образом тело всегда находится на перпендикуляре к OA , то есть движется по прямой, составляющей угол α с горизонтом.

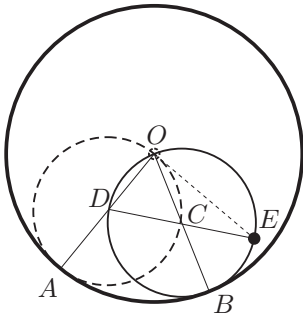


Рис. 31

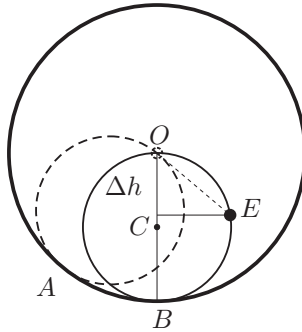


Рис. 32

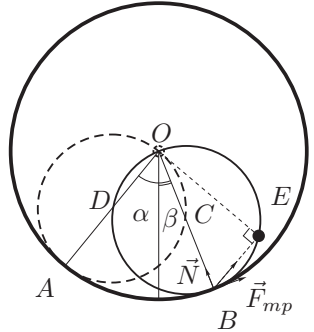


Рис. 33

1. Запишем закон сохранения энергии для тела, которое движется по прямой линии. Пусть оно сместилось на расстояние l вдоль прямой OE . Тогда изменение высоты равно $\Delta h = -l \sin \alpha$.

В итоге получаем: $0 = -mgl \sin \alpha + \frac{mv^2}{2}$, а ускорение постоянно и равно:

$$a = g \sin \alpha$$

2. Найдём изменение высоты тела, когда плоскость OC вертикальна (рис. 32). $\Delta h = -R(1 - \cos(2\alpha))/2$. Тогда по закону сохранения энергии:

$$v = \sqrt{2gR} \sin \alpha.$$

3. На систему «тело-меньший цилиндр» действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции \vec{N} и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис. 33). Сумма векторов сил реакции и трения направлена перпендикулярно OE (прямо на тело, т.к. на меньший цилиндр не может действовать ненулевой момент сил, потому что массой цилиндра и размером тела мы пренебрегаем) и равна по модулю $mg \cos \alpha$. Тогда:

$$N = mg \cos \alpha \cos(\alpha + \beta)$$

$$F_{\text{тр}} = mg \cos \alpha \sin(\alpha + \beta),$$

где β — угол отклонения плоскости OC от вертикали, отсчитываемый в направлении качения.

Условие $F_{\text{тр}} \leq \mu N$ даёт условие для отсутствия проскальзывания:

$$\mu \geq \text{tg}(\alpha + \beta)$$

Для того, чтобы плоскость OC заняла симметричное начальному положению должно быть выполнено $\beta = \alpha$:

$$\mu_{\min} = \text{tg}(2\alpha)$$

4. Проскальзывание начнётся при $\text{tg}(\alpha + \beta) = \mu$. А к этому моменту тело вдоль прямой OE пройдёт расстояние $l = R \sin(\alpha + \beta) = R \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}$.

В таком случае из закона сохранения энергии получаем:

$$v = \sqrt{\frac{2gR\mu \sin \alpha}{\sqrt{1 + \mu^2}}}$$

Отметим, что при любом μ $l < R$, то есть проскальзывание всегда начинается раньше, чем тело ударится о поверхность большого цилиндра.

Задача 2. Вещества X и Y (А. Н. Аполонский)

При изобарическом плавлении температура определяется условием равновесия фаз и не меняется. Изменение давления в теплоизолированном сосуде является адиабатическим процессом. Следовательно, если процесс, проведенный в первом сосуде, объединить с обращенным процессом, проведенном во втором сосуде, мы получим цикл Карно. В этом цикле, Q_1 — это теплота, подведенная от нагревателя,

$$Q_1 - Q_2 = -(p_B - p_A)\Delta V_X < 0$$

— совершенная работа, T_A — температура нагревателя, а T_B — температура холодильника. Здесь ΔV_X — увеличение объема при плавлении

$$\Delta V_X = m \left(\frac{3}{2\rho_X} + \frac{5}{12\rho_X} \right) - m \left(\frac{1}{\rho_X} + \frac{5}{6\rho_X} \right) = \frac{m}{12\rho_X}.$$

Отсюда,

$$p_B = p_A + \frac{Q_2 - Q_1}{\Delta V_X} = p_A + \frac{12\rho_X(Q_2 - Q_1)}{m}.$$

Из коэффициента полезного действия цикла Карно, определяемого известной формулой

$$\eta = \frac{T_A - T_B}{T_A} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

можно вычислить T_B :

$$T_B = T_A \frac{Q_2}{Q_1} > T_A.$$

Аналогично для вещества Y получаем:

$$Q_3 - Q_4 = -(p_D - p_C)\Delta V_X > 0,$$

$$\Delta V_Y = m \left(\frac{3}{2\rho_Y} + \frac{5}{8\rho_Y} \right) - m \left(\frac{1}{\rho_Y} + \frac{5}{4\rho_Y} \right) = -\frac{m}{8\rho_Y},$$

$$p_D = p_C + \frac{8\rho_Y(Q_3 - Q_4)}{m},$$

$$T_D = T_C \frac{Q_4}{Q_3} < T_C.$$

Задача 3. Зачем нужны диоды (А. Н. Аполонский)

При замыкании ключа в положение 1, конденсаторы подключены к источнику параллельно и заряжаются до напряжения U_0 каждый (рис. 34). Заряд конденсаторов при этом $q_0 = CU_0$.

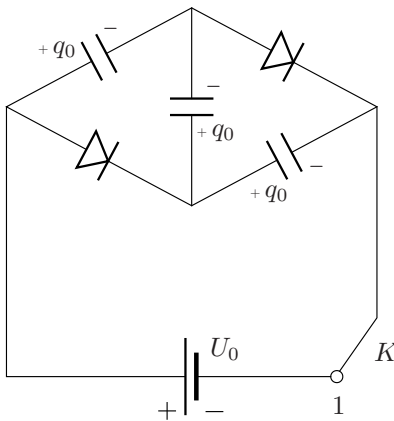


Рис. 34

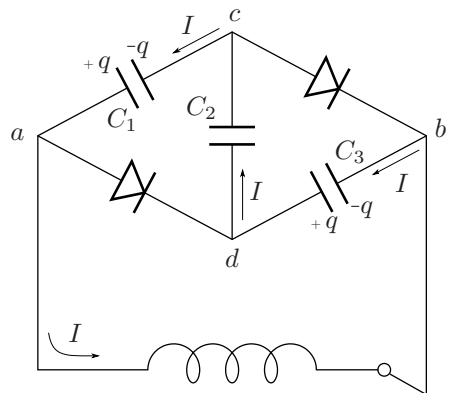


Рис. 35

Рассмотрим начальный этап колебаний. Ток при этом течёт в направлениях, указанных на (рис. 35), напряжения на C_1 и C_3 уменьшаются, на C_2 —

увеличивается. Потенциал φ_d точки d больше потенциала φ_a точки a , φ_b больше, чем φ_c , ток через диоды не течет.

Пусть в момент времени t заряд конденсаторов C_1 и C_3 равен $q(t)$ ($t = 0$ при переключении ключа в положение 2), $q(0) = q_0$. Тогда протекший через индуктивность заряд $\Delta q = q_0 - q$, а на конденсаторе C_2 заряд $q_2 = 2q_0 - q$. Для контура $abdca$

$$L\dot{I} = \frac{q}{C} - \frac{2q_0 - q}{C} + \frac{q}{C}$$

Учитывая, что $I = -\dot{q}$, получаем

$$-L\ddot{q} = \frac{3q}{C} - \frac{2q_0}{C} \Rightarrow L\ddot{q} + \frac{3}{C} \left(q - \frac{2}{3}q_0 \right) = 0$$

Заменив $q - \frac{2}{3}q_0 = q_1$, учитывая, что $\ddot{q} = \ddot{q}_1$, получим

$$L\ddot{q}_1 + \frac{3}{C}q_1 = 0.$$

Это уравнение гармонических колебаний, причём при $t = 0$ $q_1(0) = q_0/3$. Решение этого уравнения $q_1(t) = q_1(0) \cos \omega t = \frac{q_0}{3} \cos \omega t$, где $\omega = \sqrt{3/LC}$.

Для заряда $q(t)$ имеем

$$q(t) = q_1(t) + \frac{2}{3}q_0 = q_0 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos \omega t \right).$$

Качественный график $I(t)$ — синусоида симметричная относительно оси времени и выходящая из начала координат.

Ток через индуктивность при этом меняется по гармоническому закону

$$I(t) = -\dot{q} = \frac{\omega q_0}{3} \sin \omega t$$

Для заряда $q_2(t)$ конденсатора C_2 имеем

$$q_2(t) = 2q_0 - q(t) = q_0 \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cos \omega t \right). \quad (5)$$

При $t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{LC}{3}}$ ток через индуктивность становится равен 0, затем течёт в обратном направлении. Однако диоды по-прежнему «закрыты», так как $\varphi_d > \varphi_a$ и $\varphi_b > \varphi_c$, поэтому в колебаниях участвует всё та же последовательная цепочка и все ранее выписанные уравнения для колебаний остаются справедливыми. По истечении полного периода колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{LC}{3}}$

ток прекращается, конденсаторы возвращаются в исходное состояние и процесс повторяется вновь. Таким образом, в процессе колебаний ток через диоды не течет и колебания тока являются гармоническими с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{LC}{3}}$. Напряжение на конденсаторах C_1 и C_3 в соответствии с (3) меняется в пределах от $\frac{U_0}{3}$ до U_0 , на конденсаторе C_2 в соответствии с (5) в пределах от U_0 до $\frac{5U_0}{3}$, знаки зарядов на пластинах всех трех конденсаторов не меняются.

Задача 4. Магнитный шнур (*В. В. Маринюк, С. Е. Муравьев, А. С. Чернов*)

Решение 1.

Шнур расположится в магнитном поле провода так, чтобы энергия его взаимодействия с полем постоянного тока была минимальна. Просуммируем энергии взаимодействия маленьких элементов шнура с полем, получаем

$$W = -kB_1\Delta l_1 \cos \varphi_1 - kB_2\Delta l_2 \cos \varphi_2 - kB_3\Delta l_3 \cos \varphi_3 - \dots, \quad (6)$$

где $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3, \dots$ — длины малых элементов, на которые мы разбиваем шнур, B_1, B_2, B_3, \dots — индукции магнитного поля провода в тех точках, где находятся соответствующие малые элементы шнура, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ — углы между векторами индукции магнитного поля и соответствующими малыми элементами шнура, k — коэффициент пропорциональности, зависящий от «силы» магнитов, и потому одинаковый для всех элементов шнура, поскольку он однороден.

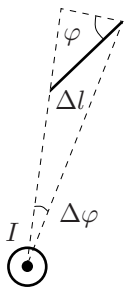


Рис. 36

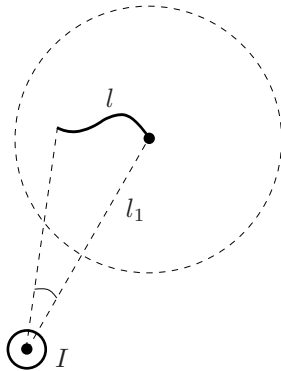


Рис. 37

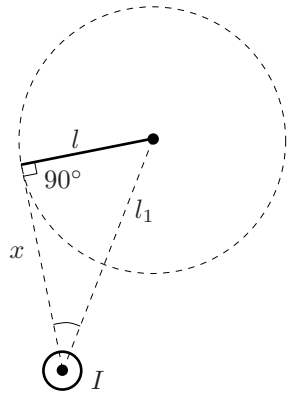


Рис. 38

Для индукции магнитного поля, создаваемого прямым током, имеем

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (7)$$

где μ_0 — магнитная постоянная, I — сила тока в проводе, r — расстояние от провода до точки наблюдения. Причем вектор \vec{B} , модуль которого определен формулой (7), в каждой точке направлен по касательной к окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной проводу. Отсюда сразу следует, что весь шнур должен лежать в одной плоскости, перпендикулярной проводу. Действительно, «выход» шнура из этой плоскости увеличит углы между его элементами и вектором индукции, и потому энергетически невыгоден. Подставляя индукцию (7) в формулу (6), получаем

$$W = -\frac{k\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{\Delta l_1 \cos \varphi_1}{r_1} + \frac{\Delta l_2 \cos \varphi_2}{r_2} + \frac{\Delta l_3 \cos \varphi_3}{r_3} + \dots \right), \quad (8)$$

где r_1, r_2, r_3, \dots — расстояние от провода в тех точках, где находятся соответствующие малые элементы шнура. Минимуму энергии (8) отвечает максимум выражения в скобках.

Каждое слагаемое в скобках выражения (8) соответствует углу $\Delta\alpha_i = \frac{\Delta l_1 \cos(\varphi_i)}{r_i}$, под которым виден элемент шнура из точки провода. А, следовательно, сумма в скобках — это угол α , под которым из точки провода виден весь шнур. Таким образом, минимуму энергии шнура отвечает такое его расположение, когда угол α , под которым виден весь шнур из точки провода, лежащей в той же плоскости, что и шнур, максимален. Найдем это положение.

Угол α максимален, когда шнур прямой (рис. 37) и (рис. 38), следовательно расстояние между его концами равно длине провода l . Угол α максимален, когда сам шнур и отрезок, соединяющий его свободный конец перпендикулярны. При этом расстояние от провода до этого конца шнура равно $\sqrt{l_1^2 - l^2}$.

Решение 2.

Шнур расположится в магнитном поле провода так, чтобы энергия его взаимодействия с полем была минимальна. Энергия малого элемента шнура в магнитном поле описывается в точности такой же формулой, что и энергия электрического диполя (системы двух зарядов $+q$ и $-q$, расположенных на малом расстоянии Δl друг от друга) в электрическом поле \vec{E} . Поэтому при определении равновесного положения шнура во внешнем поле \vec{B} можно заменить его на «цепочку» из диполей в поле \vec{E} такой же конфигурации, что и \vec{B} . В этой «цепочке» диполи ориентированы вдоль неё, и противоположные заряды соседних диполей компенсируются. Поэтому «цепочка» из диполей эквивалентна гибкой цепочке с зарядами $+q$ и $-q$ на концах.

Если пренебречь взаимодействием этих зарядов и силой тяжести, то очевидно, что вектор \vec{E} в точке расположения свободного конца цепочки должен быть направлен вдоль цепочки (сила $q\vec{E}$ уравнивается силой натяжения цепочки). Также ясно, что в состоянии равновесия цепочка, растягиваемая за свобод-

ный конец, будет отрезком, проходящим через закреплённый конец и \vec{E} . Значит расстояние между его концами равно длине шнура l .

Возвращаясь к шнуру в поле провода, приходим к выводу: шнур будет растянут по прямой в плоскости перпендикулярной проводу и перпендикулярен радиусу, проведённому от оси провода к свободному концу шнура (рис. 38). Значит $x = \sqrt{l_1^2 - l^2}$.

Задача 5. Русалочка (Л. А. Мельниковский)

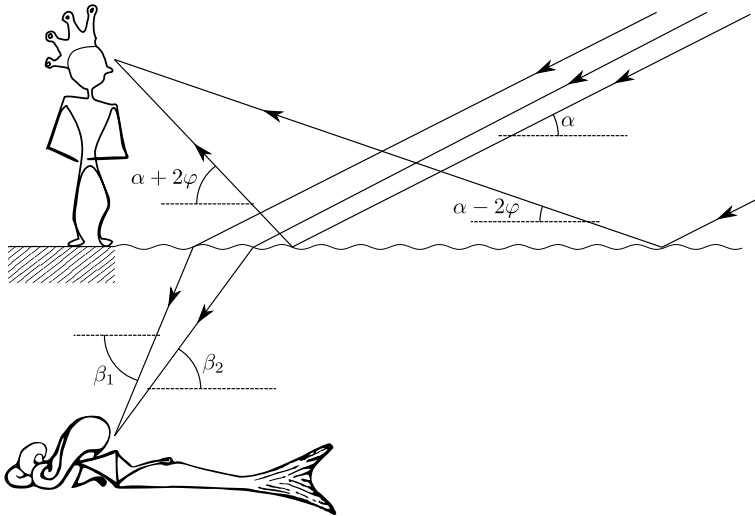


Рис. 39

Обозначим высоту Луны над горизонтом α , а амплитуду наклона поверхности воды φ . Направление лучей, ограничивающих видимую принцем лунную дорожку, определяется углами $\alpha + 2\varphi$ и $\alpha - 2\varphi$ (рис. 39):

$$\operatorname{tg}(\alpha + 2\varphi) = \frac{H}{D_{\Pi}}, \quad \operatorname{tg}(\alpha - 2\varphi) = \frac{H}{D_{\Pi} + L_{\Pi}}$$

Отсюда,

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{H}{D_{\Pi}} + \operatorname{arctg} \frac{H}{D_{\Pi} + L_{\Pi}} \right) \approx 0,189$$

$$\varphi = \frac{1}{4} \left(\operatorname{arctg} \frac{H}{D_{\Pi}} - \operatorname{arctg} \frac{H}{D_{\Pi} + L_{\Pi}} \right) \approx 0,078$$

Из закона преломления

$$n \cos(\beta_1 - \varphi) = \cos(\alpha - \varphi) \quad \text{и} \quad n \cos(\beta_2 + \varphi) = \cos(\alpha + \varphi)$$

Таким образом

$$\beta_1 = \arccos\left(\frac{\alpha - \varphi}{n}\right) + \varphi$$

$$\beta_2 = \arccos\left(\frac{\alpha - \varphi}{n}\right) - \varphi$$

Учитывая, что

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{H}{D_P}, \quad \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{H}{D_P + L_P}.$$

получим

$$D_P = H \operatorname{ctg} \beta_1 = 1,67 \text{ м}, \quad L_P = H \operatorname{ctg} \beta_2 - D_P = 0,48 \text{ м}.$$