



Всероссийская олимпиада по физике
имени Дж. К. Максвелла

Заключительный этап
Теоретический тур

2019

Комплект задач подготовлен Центральной предметно-методической комиссией по физике Всероссийской олимпиады школьников

Авторы задач

7 класс

1. Заяц А.Е.
2. Замятнин М.Ю.
3. Аполонский А.Н.
4. Замятнин М.Ю.

8 класс

1. Заяц А.Е.
2. Замятнин М.Ю.
3. Замятнин М.Ю.
4. Слободянин В.П.

Общая редакция — Замятнин М.Ю., Заяц А.Е., Сеитов А.И.,
Иголеви́ч И.А., Слободянин В.П..

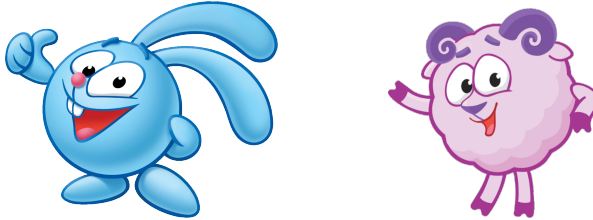
Иллюстрации — Замятнин М.Ю., Кутелев К.А., Заяц А.Е..

Верстка — Клепиков М.С.

7 класс

Задача 1. Крош и Бараш

Выйдя из дома, Крош и Бараш пустились наперегонки по тропинке к озеру. Бараш все время бежал с постоянной скоростью v , а Крош вначале решил дать фору Барашу и первую четверть пути двигался со скоростью $0,8v$, затем увеличил ее до $1,5v$, но в конце пути устал и побежал со скоростью $0,9v$, проиграв в результате Барашу. Какой могла быть длина второго участка, пройденного Крошем, если он догнал Бараша через время τ после старта, и на какое максимальное время t_0 Бараш мог опередить Кроша на финише?



Задача 2. Пена

В пустой горизонтальный цилиндр с подвижным поршнем через штуцер Ш поступает пена с постоянным массовым расходом $\mu = 0,1$ кг/с. График зависимости средней плотности $\rho_{\text{ср}}$ содержимого цилиндра от времени t приведен на рис. 1. С какой максимальной и минимальной скоростью двигался поршень в процессе заполнения, если его площадь равна $S = 1$ дм²? За какое время τ объем содержимого цилиндра увеличился до $V = 7$ дм³?

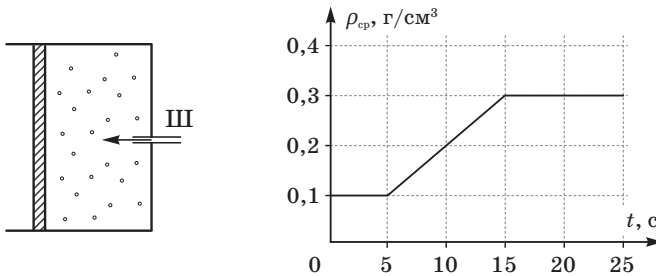


Рис. 1

Задача 3. Поршни

Цилиндрические части закрепленного между двумя стенками сосуда, изображенного на рис. 2, имеют длину l и площади сечения S и $2S$. В сосуде находятся два поршня, толщиной $l/4$ каждый, соединенные со стенками одинаковыми пружинами с коэффициентом жесткости k . Длина каждой пружины в недеформированном состоянии равна l . В зазор между поршнями через маленькую трубочку может закачиваться легкая жидкость, давление которой измеряется с помощью манометра.

Трения между поршнями и стенками сосуда нет. Силы давления газа в системе можно не учитывать. Соприкасающиеся поверхности поршней шероховатые, поэтому жидкость свободно проникает между ними. Какое давление будет показывать манометр в момент, когда поршни отделились друг от друга? Какой объем жидкости необходимо закачать через трубочку в сосуд, чтобы манометр показал давление: а) $p = p_0/10$; б) $p = p_0/3$ (здесь $p_0 = kl/S$)?

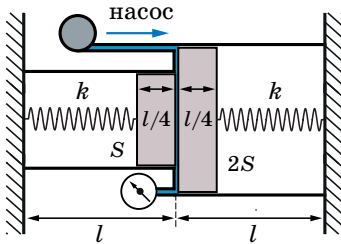


Рис. 2

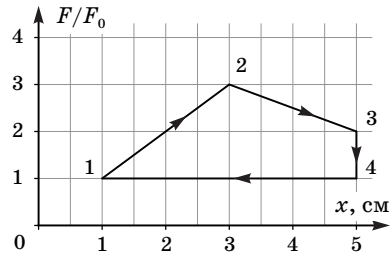


Рис. 3

Задача 4. Упругий цикл

К невесомой пружине прикладывается направленная вдоль ее оси растягивающая сила F . На графике (см. рис. 3) изображен циклический процесс 1–2–3–4–1, показывающий, как последовательно изменялась величина этой силы в зависимости от координаты x конца пружины, к которому она приложена. Известно, что абсолютное удлинение Δl пружины за цикл достигало максимального значения $\Delta l_{\max} = 12$ см, а работа силы F за цикл оказалась положительной и равной $A = 0,5$ Дж.

Определите минимальное абсолютное удлинение Δl_{\min} пружины за цикл. Найдите коэффициент жесткости k пружины и постройте качественный график зависимости координаты центра x_c пружины от координаты x конца, к которому приложена сила F . Длина пружины в недеформированном состоянии $l_0 = 20$ см.

8 класс

Задача 1. UnCl

Экспериментатор Глюк решил исследовать растворимость нового вещества — хлорида унобтания (UnCl). Для этого он стал добавлять с постоянным массовым расходом μ порошок UnCl в мерный сосуд с $V_0 = 100$ мл воды, постоянно помешивая раствор.

На рис. 4 изображен график зависимости плотности раствора UnCl от концентрации (массы растворенного вещества в литре воды), полученный британскими коллегами Глюка. При концентрации $n_0 = 750$ г/л хлорид унобтания перестает растворяться в воде. Плотность кристаллического UnCl $\rho_{\text{кр}} = 2,5$ г/см³, плотность воды $\rho_0 = 1,0$ г/см³.

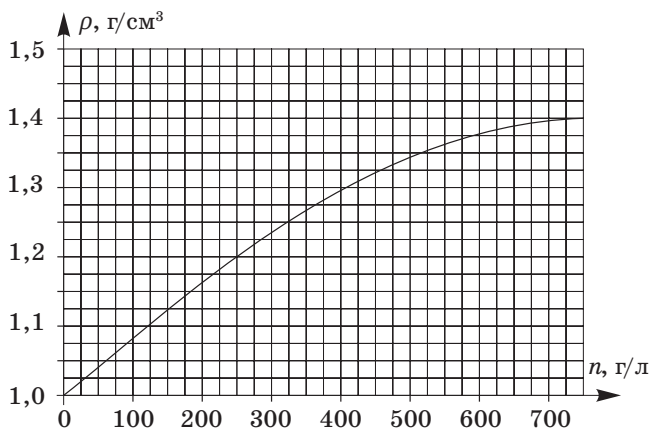


Рис. 4

1. Определите массу насыпанного порошка UnCl , когда объем содержащего мерного сосуда стал равен: а) 110 мл; б) 150 мл.
2. Определите массовый расход μ (выразив его в г/с), если в начале эксперимента объем содержащего мерного сосуда увеличивался со скоростью 0,10 мл/с.

Задача 2. Вторая ступень

На рис. 5 приведена схема очень длинной подвесной лестницы. Массы каждой из двух первых ступеней равны m , а в последующих парах массы ступеней уменьшаются в два раза по отношению к предыдущим ($m/2$, $m/4$, $m/8$, ...). Определите силы натяжения тросов T_1 , T_2 и T_3 , действующих на вторую ступень, считая все ступени однородными, а тросы легкими. На рис. 5 каждая ступень разделена на четыре одинаковые части.

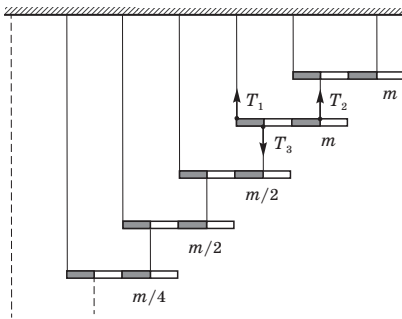


Рис. 5

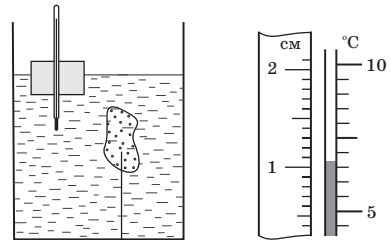


Рис. 6

Задача 3. Лед

На столе стоит высокий цилиндрический сосуд с водой, в котором с помощью закрепленной на дне нити удерживается полностью погруженная в воду льдинка. На поверхности воды плавает небольшой плотик с встроенным термометром (см. рис. 6 слева). Система находится в тепловом равновесии. В сосуд начинают добавлять горячую воду при температуре $t_1 = 99^\circ\text{C}$ с массовым расходом $\mu = 2,0$ г/с.

Считая процессы теплообмена быстрыми, постройте качественный график зависимости скорости подъема верхней границы столбика жидкости термометра относительно стола от времени, указав на нем характерные точки. Вода из сосуда не выливается. Потерями тепла, теплоемкостью термометра и плотика можно пренебречь. Площадь дна сосуда $S = 20$ см². Вначале в сосуде было $m = 400$ г воды, а сила натяжения нити равнялась $T = 0,07$ Н. Во время таяния лед не всплывал. На рис. 6 справа приведен укрупненный фрагмент шкалы термометра, к которой приложена линейка.

Удельная теплоемкость воды $c_0 = 4200$ Дж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг, плотность льда $\rho = 0,9$ г/см³, плотность воды $\rho_0 = 1,0$ г/см³, ускорение свободного падения $g = 10$ Н/кг.

Задача 4. Мост

В электрической цепи, содержащей источник постоянного тока I_0 (см. рис. 7) на двух одинаковых резисторах выделяется мощность $P = 0,5$ Вт, а на двух других — мощности $2P$ и P_x . При этом, через идеальный амперметр протекает ток силой $I_A = 25$ мА. Определите значение мощности P_x , сопротивления всех резисторов и напряжения на них. Найдите значение I_0 источника.

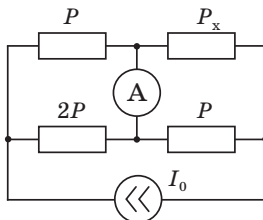


Рис. 7

Примечание: источником постоянного тока называют активный элемент электрической цепи, через который протекает ток силой I_0 , при подключении к нему резисторов с различными в широком диапазоне сопротивлениями.

7 класс. Возможные решения

7.1 Крош и Бараш

Ответ: $3v\tau/7 < s_2 < 3v\tau/4$; $t_0 = \tau/7$.

Пусть s — длина всей дистанции. Путь, пройденный смешариками до момента первого обгона, равен $v\tau$. Отрезок пути, равный $s/4$, Крош бежал со скоростью $0,8v$, а оставшийся участок — со скоростью $1,5v$, поэтому:

$$\frac{s}{4 \cdot 0,8v} + \frac{v\tau - \frac{1}{4}s}{1,5v} = \tau \Rightarrow s = \frac{16}{7}v\tau.$$

Общее время движения Бараша равно $T = 16\tau/7$, а время движения Кроша на первом участке:

$$t_1 = \frac{\frac{1}{4}s}{0,8v} = \frac{5\tau}{7}.$$

Длина второго участка будет максимальной, когда Бараш обгонит Кроша практически на самом финише. Пусть s_2 — длина второго участка. Тогда:

$$\frac{s_2}{1,5v} + \frac{\frac{3}{4}s - s_2}{0,9v} = \frac{11}{7}\tau \Rightarrow \frac{s_2}{1,5v} + \frac{\frac{12}{7}v\tau - s_2}{0,9v} = \frac{11}{7}\tau \Rightarrow s_2 = \frac{3v\tau}{4}.$$

Длина второго участка минимальна, когда Крош закончит движение со скоростью $1,5v$ в момент обгона Бараша (в момент времени τ). Поэтому минимальная длина второго участка равна: $v\tau - s/4 = 3v\tau/7$.

Отставание Кроша от Бараша будет максимальным, когда s_2 будет минимальным. Оставшийся путь до финиша составляет: $9v\tau/7$. Максимальное время t_0 равно:

$$t_0 = \frac{\frac{9}{7}v\tau}{0,9v} - \frac{\frac{9}{7}v\tau}{v} = \frac{10\tau}{7} - \frac{9\tau}{7} = \frac{\tau}{7}.$$

7.2 Пена

Ответ: $v_{\max} = 10$ см/с; $v_{\min} = 0$ см/с; $\tau = \frac{\rho_3 V}{\mu} = 21$ с.

Рассмотрим все три участка графика.

1. На первом плотность пены постоянна и равна $\rho_1 = 0,1$ г/см³. Объем пены в этом случае изменяется по закону:

$$V_1(t) = \frac{\mu t}{\rho_1} = 1000 \frac{\text{см}^3}{\text{с}} \cdot t.$$

Так как объем изменяется равномерно, скорость, с которой движется поршень, равна:

$$v_1 = \frac{\mu}{\rho_1 S} = 10 \text{ см/с.}$$

2. На втором участке плотность пены изменяется линейно по закону: $\rho_2(t) = 0,02 \frac{\text{г}}{\text{см}^3 \cdot \text{с}} \cdot t$. Для этого случая:

$$V_2(t) = \frac{\mu t}{\rho_2(t)} = 5000 \text{ см}^3.$$

Так как на этом участке объем постоянен, скорость движения поршня равна нулю.

3. На третьем участке плотность пены постоянна и равна $\rho_3 = 0,3 \text{ г/см}^3$. Рассматривая этот случай аналогично первому, находим, что скорость движения поршня составляет:

$$v_3 = \frac{\mu}{\rho_3 S} = 3,3 \text{ см/с.}$$

В результате, минимальная скорость поршня равна нулю, а максимальная 10 см/с. Объем пены $V = 7 \text{ дм}^3 = 7000 \text{ см}^3$ превышает объем V_2 на втором участке, поэтому в момент времени τ плотность пены равна $\rho_3 = 0,3 \text{ г/см}^3$. Отсюда:

$$\tau = \frac{m}{\mu} = \frac{\rho_3 V}{\mu} = 21 \text{ с.}$$

7.3 Поршни

Ответ: $p_1 = \frac{p_0}{6}$; $V_a = \frac{lS}{20}$; $V_6 = \frac{11lS}{12}$.

В исходном положении без жидкости обе пружины сжаты на $l/4$ и поршни упираются друг в друга. При закачивании первых порций жидкости оба поршня движутся вправо, по-прежнему сохраняя контакт. Пусть x — смещение поршней (см. рис. 8а). Запишем условие равновесия системы:

$$k \left(\frac{l}{4} - x \right) + p(2S - S) = k \left(\frac{l}{4} + x \right),$$

откуда $p = \frac{2kx}{S} = \frac{2p_0 V}{V_0}$, где $p_0 = \frac{kl}{S}$, $V_0 = lS$.

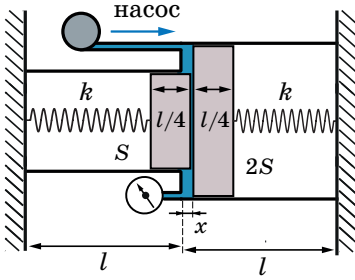


Рис. 8а

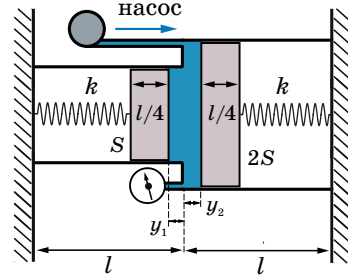


Рис. 8б

Контакт между поршнями исчезает, если сила давления жидкости на поршни равна силе упругости соответствующих пружин. Происходит это при смещении поршней вправо на некоторое расстояние x_1 при давлении p_1 . При этом

$$\begin{cases} p_1 S = k \left(\frac{l}{4} - x_1 \right) \\ p_1 2S = k \left(\frac{l}{4} + x_1 \right) \end{cases} \Rightarrow p_1 = \frac{kl}{6S} = \frac{p_0}{6}; \quad x_1 = \frac{l}{12}.$$

Объем, занятый жидкостью, при этом составляет:

$$V_1 = Sx_1 = \frac{Sl}{12} = \frac{V_0}{12}.$$

На следующем этапе поршни начинают разъезжаться в разные стороны. Пусть y_1 и y_2 — смещения левого и правого поршня соответственно (см. рис. 8б). Запишем условия равновесия поршней:

$$\begin{cases} pS = k \left(\frac{l}{4} + y_1 \right) \\ p2S = k \left(\frac{l}{4} + y_2 \right) \end{cases} \Rightarrow 2y_1 - y_2 = -\frac{kl}{4}.$$

Объем залитой воды при этом равен $V = Sy_1 + 2Sy_2$, поэтому:

$$\begin{cases} y_1 = l \left(\frac{V}{5V_0} - \frac{1}{10} \right) \\ y_2 = l \left(\frac{2V}{5V_0} + \frac{1}{20} \right) \end{cases}$$

Отсюда находим, что давление жидкости в сосуде равно:

$$p = \frac{k}{S} \left(\frac{l}{4} + y_1 \right) = p_0 \left(\frac{V}{5V_0} + \frac{3}{20} \right).$$

Используя полученные формулы, определим объемы закачанной жидкости, о которых спрашивается в задаче. Давление $\frac{p_0}{10} < p_1$ соответствует первому случаю:

$$\frac{p_0}{10} = \frac{2p_0 V_a}{V_0} \Rightarrow V_a = \frac{V_0}{20} = \frac{lS}{20}$$

Значение давления $\frac{p_0}{3} > p_1$ соответствует второму случаю:

$$\frac{p_0}{3} = p_0 \left(\frac{V_6}{5V_0} + \frac{3}{20} \right) \Rightarrow V_6 = \frac{11V_0}{12} = \frac{11lS}{12}$$

7.4 Упругий цикл

Ответ: $\Delta l_{\min} = 4$ см; $k = \frac{F_0}{\Delta l_{\min}} = 250$ Н/м.

Максимальная и минимальная силы упругости пружины отличаются в 3 раза, следовательно, минимальная деформация в 3 раза меньше максимальной и составляет $\Delta l_{\min} = 4$ см. При этом, на участке 1–2, конец пружины, к которому приложена сила F , смещается на 2 см. Из этого следует, что противоположный конец пружины на участке 1–2, так же смещается (на 6 см).

Работа A силы F за цикл пропорциональна площади внутри цикла и в условных единицах составляет $F_0 \cdot 5$ см. Это позволяет найти значение силы $F_0 = 10$ Н и коэффициента жесткости пружины $k = F_0 / \Delta l_{\min} = 250$ Н/м. Координаты середины пружины можно найти по формуле

$$x_c = x - 0,5(l + \Delta l), \text{ где удлинение } \Delta l = F/k$$

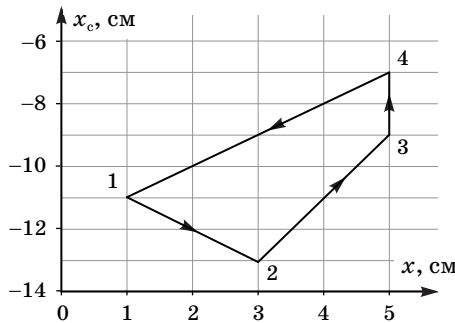


Рис. 9

8 класс. Возможные решения

8.1 UnCl

Ответ: 1. (46 ± 1) г; 2. 137,5 г; 3. 0,6 г/с.

Унобтаний (от англ. unobtainable – «недостижимый», «недоступный») – ироничное название любого крайне редкого, дорогого, либо физически невозможного материала или вещества, необходимого для исполнения какой-либо задачи. Употребляется, как правило, в художественной литературе. (Википедия)

1. Найдем объем насыщенного раствора (75 г UnCl в 100 мл воды):

$$V_{\text{нас}} = \frac{175 \text{ г}}{1,4 \text{ г/см}^3} = 125 \text{ см}^3.$$

В первом случае $V < V_{\text{нас}}$. Пусть m – масса засыпанного в воду порошка UnCl. Запишем выражение для плотности раствора

$$\rho = \frac{m_{\text{воды}} + m}{V} = \frac{100 \text{ г} + m}{110 \text{ см}^3} = \frac{100 \text{ г} + 0,1 \text{ л} \cdot n}{110 \text{ см}^3},$$

построим прямую, задаваемую этим уравнением (зеленая линия на рис. 10), и найдем точку ее пересечения с графиком $\rho(n)$. Эта точка соответствует $\rho = 1,325 \text{ г/см}^3$. Соответственно, масса UnCl в первом случае равна $m = (46 \pm 1)$ г.

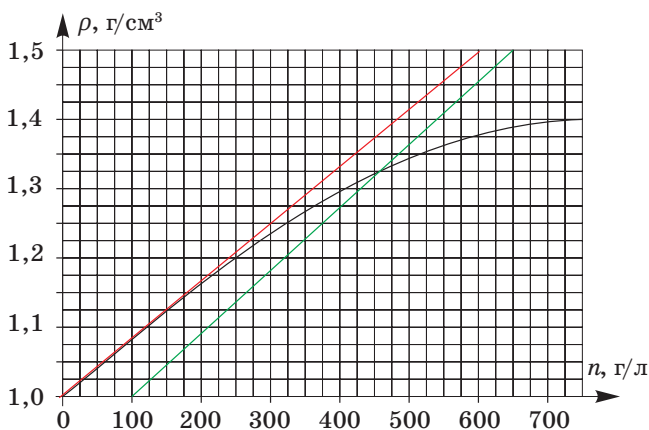


Рис. 10

2. Во втором случае $V > V_{\text{нас}}$, и 125 см^3 составляет насыщенный раствор, а остальные $V_{\text{осад}} = 25 \text{ см}^3$ — нерастворившиеся кристаллы U_2Cl . Их масса равна

$$m_{\text{осад}} = \rho_{\text{кр}} V_{\text{осад}} = 62,5 \text{ г.}$$

Итоговая масса U_2Cl , насыпанного в сосуд, равна

$$m = 75 \text{ г} + 62,5 \text{ г} = 137,5 \text{ г.}$$

3. Пусть v — скорость увеличения объема раствора. Масса порошка U_2Cl в момент времени t от начала эксперимента равна $m = \mu t$. Объем раствора $V = V_0 + vt$, где $V_0 = 100 \text{ см}^3$. Найдём разность плотностей раствора в момент времени t и чистой воды:

$$\rho - \rho_0 = \frac{\rho_0 V_0 + m}{V} - \rho_0 = \frac{m - \rho_0(V - V_0)}{V} = \frac{\mu t - \rho_0 vt}{V}.$$

При малом t объем в знаменателе не отличим от V_0 , поэтому

$$\rho - \rho_0 = \frac{(\mu - \rho_0 v)t}{V_0}.$$

В то же время при малой массе засыпанного порошка плотность раствора изменяется почти линейно, $\rho - \rho_0 = kn = k\mu t/V_0$. Коэффициент наклона k определим по графику. Для этого построим касательную к кривой $\rho(n)$ при $n = 0$ (красная прямая) и определим тангенс угла ее наклона. Получается $k = 5/6$ (в безразмерных единицах). В результате, приходим к следующему соотношению:

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{\mu t}{V_0} = \frac{(\mu - \rho_0 v)t}{V_0} \Rightarrow \frac{5}{6} \cdot \mu = \mu - \rho_0 v \Rightarrow \mu = 6\rho_0 v = 0,6 \text{ г/с.}$$

8.2 Вторая ступень

Ответ: $T_1 = \frac{11}{17} mg$; $T_2 = \frac{14}{17} mg$; $T_3 = \frac{8}{17} mg$.

Рассмотрим силы, действующие на первую (верхнюю) и вторую ступени лестницы (см. рис. 11).

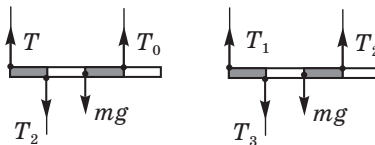


Рис. 11

Запишем в каждом случае правило моментов относительно левого края ступени:

$$\begin{cases} T_2 l + mg2l = T_0 3l, \\ T_3 l + mg2l = T_2 3l, \end{cases}$$

где l — длина одного деления ступени.

Так как оставшаяся часть лестницы эквивалентна исходной конструкции, но имеет в 2 раза меньшую массу, $T_0 = 2T_3$. В результате, имеем систему

$$\begin{cases} T_2 + 2mg = 6T_3, \\ T_3 + 2mg = 3T_2. \end{cases}$$

Решая ее, получаем, что

$$T_2 = \frac{14}{17}mg, \quad T_3 = \frac{8}{17}mg.$$

Величину силы T_1 найдем из условия равновесия второй ступени:

$$T_1 = T_3 + mg - T_2 = \frac{11}{17}mg.$$

8.3 Лед

Ответ: см. график.

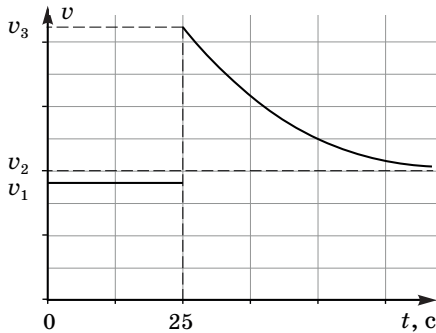


Рис. 12

1. Определим начальную массу льда m_0 . Для этого запишем условие равновесия

$$T + m_0 g = \rho_0 V g$$

и, учитывая, что $V = m_0/\rho$, получим

$$m_0 = \frac{T\rho}{(\rho_0 - \rho)g} = 63 \text{ г.}$$

2. Вначале все тепло, отводимое от горячей воды, идет на плавление льда, температура содержимого сосуда остается постоянной, и столбик термометра неподвижен относительно поверхности воды. Пусть τ — время, прошедшее с начала эксперимента. Запишем уравнение теплового баланса:

$$c\mu\tau(t_1 - 0^\circ\text{C}) = \lambda\Delta m_{\text{л}},$$

где $\Delta m_{\text{л}}$ — масса расплавившегося льда. Поскольку плотность воды больше плотности льда, объем превратившегося в воду льда станет меньше на величину

$$\Delta V = \Delta m_{\text{л}} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) = \frac{c\mu\tau t_1 (\rho_0 - \rho)}{\lambda\rho_0\rho}.$$

С другой стороны, объем воды, добавленной в сосуд за время τ , равен $\mu\tau/\rho_0$. Таким образом, общее изменение объема содержимого сосуда равно

$$\Delta V_{\text{общ}} = \frac{\mu\tau}{\rho_0} - \Delta V = \frac{\mu\tau}{\rho_0} \left(1 - \frac{ct_1(\rho_0 - \rho)}{\lambda\rho} \right).$$

Скорость, с которой движется верхняя граница столбика термометра, равна в этом случае скорости подъема уровня воды:

$$v_1 = \frac{\mu}{\rho_0 S} \left(1 - \frac{ct_1(\rho_0 - \rho)}{\lambda\rho} \right) = 0,86 \text{ мм/с.}$$

Этот процесс завершится, когда весь лед растает, то есть через время

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\lambda m_0}{c\mu t_1} = 25 \text{ с.}$$

Общая масса воды в сосуде к этому моменту будет равна

$$m_{\text{общ}} = m + m_0 + v\tau_{\text{max}} = 513 \text{ г.}$$

3. После того, как весь лед растает, уровень воды в сосуде будет расти только за счет добавления в него горячей воды. Скорость подъема уровня в этом случае равна

$$v_2 = \frac{\mu}{\rho_0 S} = 1 \text{ мм/с.}$$

Кроме этого, из-за повышения температуры содержимого сосуда, столбик термометра станет подниматься относительно поверхности воды. Скорость его движения зависит от разности температур горячей воды и воды в сосуде. Она будет максимальной в начале этого процесса и равной нулю при нагреве содержимого до температуры $t_1 = 99^\circ\text{C}$.

4. Найдем скорость движения столбика термометра относительно воды в самом начале ее нагрева. Пусть $t_{\text{уст}}$ — температура воды, установившаяся через малое время $\Delta\tau$. Запишем уравнение теплового баланса

$$c\mu\Delta\tau(t_1 - t_{\text{уст}}) = cm_{\text{общ}}(t_{\text{уст}} - 0^\circ\text{C}).$$

Так как $t_{\text{уст}}$ мало, $t_1 - t_{\text{уст}} \approx t_1$ и

$$t_{\text{уст}} = \frac{\mu\Delta\tau t_1}{m_{\text{общ}}}.$$

Из рисунка в условии следует, что увеличение температуры на 1°C приводит к повышению столбика на 3 мм. Поэтому скорость подъема столбика относительно поверхности воды составляет

$$v_{\text{ст}} = \frac{3 \text{ мм}/^\circ\text{C} \cdot \mu t_1}{m_{\text{общ}}} = 1,16 \text{ мм/с}.$$

5. Скорость подъёма верхней границы столбика относительно стола равна

А) в начале нагрева: $v_3 = v_2 + v_{\text{ст}} = 2,16 \text{ мм/с}$

Б) в конце нагрева: $v_2 = 1,0 \text{ мм/с}$.

8.4 Мост

Ответ: 1 Вт; 800 Ом; 400 Ом; 75 мА; 20 В.

Так как амперметр идеальный, и мощности, выделяющиеся на двух одинаковых резисторах равны, то через них текут одинаковые токи I_1 и падение напряжения на них равно половине разности потенциалов на источнике. Но тогда равны мощности и на двух оставшихся резисторах, так как через них текут тоже одинаковые токи $I_0 - I_1$.

Так как по условию мощности отличаются в 2 раза, то токи и сопротивления резисторов отличаются тоже в 2 раза. Откуда $I_1 = I_A = I_0/3$. Тогда $I_0 = 75 \text{ мА}$.

Напряжение на резисторах одинаковы и равны $U = P_1/I_1 = 20 \text{ В}$, а сопротивления резисторов $R_1 = U/I_1 = 800 \text{ Ом}$, $R_2 = 400 \text{ Ом}$.