9 класс

Задача 1. Два осколка. Небольшую петарду подвесили на нити на высоте H над горизонтальной поверхностью. В результате взрыва она распалась на два осколка, которые полетели в противоположные стороны с одинаковыми начальными скоростями υ_0, направленными вдоль одной прямой. Какое наибольшее расстояние L может оказаться между осколками после их падения? С места падения осколки не смещаются

Возможное решение (1). (Слободянин В.). Пусть первый осколок имел проекцию скорости на вертикальную ось $\upsilon_{y,0}$, а на горизонтальную ось $\upsilon_{x,0}=\sqrt{\upsilon_0^2-\upsilon_{y,0}^2}$ и летел до падения в течение времени t_1. Тогда второй осколок имел проекцию скорости на вертикальную ось $-\upsilon_{y,0}$, а на горизонтальную ось $-\upsilon_{x,0}=-\sqrt{\upsilon_0^2-\upsilon_{y,0}^2}$ и летел до падения в течение времени t_2.

Расстояние между упавшими осколками $L=\upsilon_{x,0}\left(t_1+t_2\right)$.

Из кинематических соотношений (в проекции на вертикальную ось) получим два квадратных (относительно времени) уравнения:

$$1)\ H+\upsilon_{y,0}t_1-\frac{gt_1^2}{2}=0; \qquad 2)\ H-\upsilon_{y,0}t_2-\frac{gt_2^2}{2}=0.$$

Их корни равны: $$3)\ t_1=\frac{\upsilon_{y,0}}{g}+\sqrt{\left(\frac{\upsilon_{y,0}}{g}\right)^2+\frac{2H}{g}};\quad 4)\ t_2=-\frac{\upsilon_{y,0}}{g}+\sqrt{\left(\frac{\upsilon_{y,0}}{g}\right)^2+\frac{2H}{g}}.$$

Отсюда

$$5)\ L=2\upsilon_{x,0}\sqrt{\left(\frac{\upsilon_{y,0}}{g}\right)^2+\frac{2H}{g}}=2\sqrt{\upsilon_0^2-\upsilon_{y,0}^2}\sqrt{\left(\frac{\upsilon_{y,0}}{g}\right)^2+\frac{2H}{g}}=\frac{2}{g}\sqrt{\upsilon_0^2-\upsilon_{y,0}^2}\sqrt{\upsilon_{y,0}^2+2gH}.$$

Возведём в квадрат это уравнение и приведём подобные:

$$6)\ \upsilon_{y,0}^4+\left(2gH-\upsilon_0^2\right)\upsilon_{y,0}^2+\left(\frac{gL}{2}\right)^2-2gH\upsilon_0^2=0.$$

Это биквадратное уравнение дискриминант которого

$$D=\left(gH-\frac{\upsilon_0^2}{2}\right)^2-\left(\frac{gL}{2}\right)^2+2gH\upsilon_0^2$$

равен нулю тогда, когда расстояние L достигнет максимума. Следовательно,

$$L_{\max}=2H+\frac{\upsilon_0^2}{g}.$$

Примечание. В уравнении (5): $L=\frac{2}{g}\sqrt{(V_0^2-V_{0y}^2)(V_{0y}^2+2gH)}$ выражение под корнем – перевёрнутая парабола, которая принимает наибольшее значение строго посредине между корнями V_0^2 и $\left(-2gH\right)$. При этом сомножители под радикалом равны. Отсюда

$$L=\frac{2}{g}0{,}5\cdot\left(V_0^2+2gH\right)=\frac{V_0^2}{g}+2H$$

Возможное решение (2). 1) Из закона сохранения механической энергии следует, что на землю осколки упадут с одинаковой скорость υ_1:

$$m\frac{\upsilon_1^2}{2}=mgH+m\frac{\upsilon_0^2}{2}.$$

При этом сумма траекторий их полёта будет представлять траекторию полёта тела, брошенного с начальной скоростью υ_1.

2) Дальность полёта тела, брошенного под углом 45^0 к горизонту максимальна и равна

$$L=\frac{\upsilon_1^2}{g}$$

(начальная и конечная точки траектории лежат на одной высоте).

Решая совместно полученные уравнения, найдём:

$$L_{\max}=2H+\frac{\upsilon_0^2}{g}.$$

Примечание!!! **Этот вариант решения реализуется, если** $\upsilon_0^2>2\mathrm{gH}$. **В противном случае тело не полетит по траектории «оптимальной» параболы. И ответом будет** $L=2\upsilon_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$.

Критерии оценивания (требует дополнительного согласования с учетом Примечания).

Для решения (1)

1)	Записано выражение для $\upsilon_{x,0}$ через $\upsilon_{y,0}^2$ обоих осколков	**1 балл**
2)	Дано выражение $L=\upsilon_{x,0}\left(t_1+t_2\right)$ для расстояния между упавшими осколками	**1 балл**
3)	Записаны уравнения (1) и (2) для нахождения времён	**2 балла**
4)	Решены уравнения (1) и (2) относительно времён t_1 и t_2	**2 балла**
5)	Получено уравнение (5)	**2 балла**
6)	Найдена максимальная дальность разлёта осколков	**2 балла**

Для решения (2)

1) Отмечено, что на землю осколки упадут с одинаковой скоростью **2 балла**
2) Отмечено, что сумма траекторий их полёта будет представлять траекторию полёта тела, брошенного с начальной скоростью υ_1. **2 балла**
3) Записан закон сохранений механической энергии **4 балла**
4) $L_{\max}$ выражена через υ_1 **2 балла**
5) Получено окончательное выражение для $L_{\max}$ **2 балла**

18 января, на портале **http://abitu.net/vseros** *будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.*
Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **http://abitu.net/vseros**

Задача 2. Шарик на нитях. Небольшой шарик массой m движется в горизонтальной плоскости по окружности радиуса R = 25,0 см вокруг вертикальной оси. Шарик удерживают две нити (рис. 1), составляющие с осью вращения углы $\alpha = 30^{\circ}$ и $\beta = 60^{\circ}$. Найдите значения угловой скорости ω при которых силы натяжения нитей отличаются в 2 раза. Ускорение свободного падения g = 9,81 м/с^2.

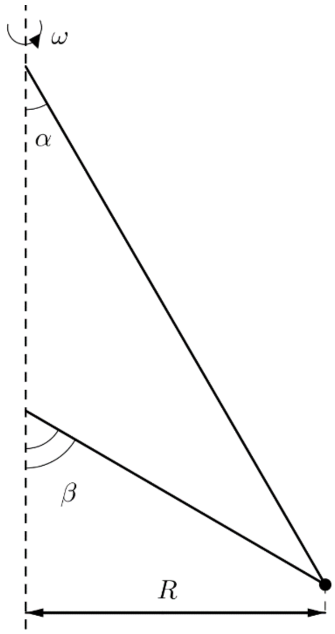


Рис. 1

Возможное решение (Варламов С.).

А) Пусть верхняя нить натянута сильнее. Тогда:

1) $m\omega^2 R = 2T\sin\alpha + T\sin\beta;$

2) $mg - 2T\cos\alpha - T\cos\beta = 0.$

Решая эту систему уравнений получим:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{R}\frac{2\sin\alpha + \sin\beta}{2\cos\alpha + \cos\beta}} \approx 0{,}914\sqrt{\frac{g}{R}} \approx 5{,}7\ \text{с}^{-1}.$$

Б) Пусть теперь нижняя нить натянута сильнее. Тогда:

1) $m\omega^2 R = T\sin\alpha + 2T\sin\beta;$

2) $mg - T\cos\alpha - 2T\cos\beta = 0.$

Решая эту систему уравнений получим:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{R}\frac{\sin\alpha + 2\sin\beta}{\cos\alpha + 2\cos\beta}} \approx 1{,}09\sqrt{\frac{g}{R}} \approx 6{,}8\ \text{с}^{-1}.$$

Критерии оценивания

1)	Записана система уравнений для случая (А) (по 1,5 балла)	**3 балла**
2)	Решена система уравнений	**1 балл**
3)	Получен численный ответ	**1 балл**
4)	Записана система уравнений для случая (Б) (по 1,5 балла)	**3 балла**
5)	Решена система уравнений	**1 балл**
6)	Получен численный ответ	**1 балл**

18 января, на портале **http://abitu.net/vseros** *будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.*
Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **http://abitu.net/vseros**

Задача 3. Два шарика на нитях. Легкий цилиндрический сосуд с жидкостью стоит на двух симметричных опорах. Над одной из них внутри сосуда привязан к дну полностью погруженный в жидкость поплавок объемом $V = 10$ см^3 и плотностью $\rho = 500$ кг/м^3. Над другой опорой висит привязанный снаружи шарик такого же объема V и плотностью 3ρ (рис. 1). Плотность жидкости в сосуде равна $\rho_0 = 1\,200$ кг/м^3. Найдите модуль разности сил реакции опор. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

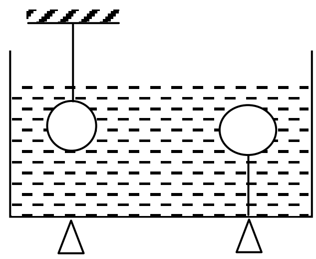


Рис. 1

Возможное решение (Замятнин М.). Расставим силы, действующие на сосуд: F – сила давления на дно, действующая со стороны воды, T – сила натяжения нити, N_1 и N_2 – силы реакций опор (рис. 2).

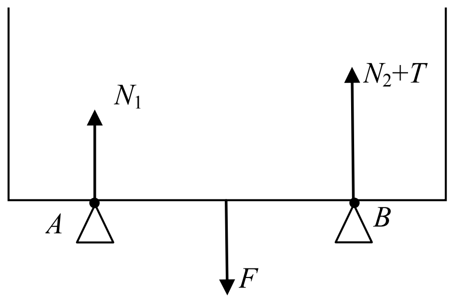


Рис. 2

Запишем правило моментов относительно полюса A:

$$(N_2 + T)2l = Fl.$$

Запишем правило моментов относительно полюса B:

$$N_1 2l = Fl.$$

$F = \rho_0 gHS = \rho_0 g\left(\dfrac{m}{\rho_0} + 2V\right)$, где H - уровень воды в сосуде, S – площадь дна сосуда, m – масса воды в сосуде.

Запишем условие равновесия для шарика: $T + \rho Vg = \rho_0 Vg$.

Решая систему, получим:

$$N_1 = \frac{mg + 2\rho_0 Vg}{2},$$

$$N_2 = \frac{mg + 2\rho Vg}{2}.$$

$$N_1 - N_2 = (\rho_0 - \rho)Vg = 70\ \text{мН}.$$

Критерии оценивания

1)	Записано правило моментов относительно полюса (A)	**1 балл**
2)	Записано правило моментов относительно полюса ($Б$)	**1 балл**
3)	Записано условие равновесия для правого шарика	**1 балла**
4)	Получено выражение для силы F	**2 балла**
5)	Найдена реакция опоры N_1	**2 балла**
6)	Найдена реакция опоры N_2	**2 балла**
7)	Получен ответ	**1 балл**

18 января, на портале **http://abitu.net/vseros** *будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.*
Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **http://abitu.net/vseros**

Задача 4. Архимед и температура. Плоская льдинка плавает в сосуде с водой, имеющей температуру $t_0 = 0\ ^\circ C$. Минимальная масса груза, который необходимо положить на льдинку, чтобы она полностью погрузилась в воду, равна m_1 = 100 г. Если эту льдинку охладить до температуры t_1 и снова положить в тот же сосуд с водой, по-прежнему имеющей температуру t_0, то после установления теплового равновесия для полного погружения льдинки в воду на неё необходимо будет положить груз минимальной массы m_2 = 110 г. Определите температуру t_1?

Примечание: удельная теплоемкость льда $c = 2\,100$ кД/(кг ^{o}С), удельная теплота плавления воды λ = 340 кДж/кг.

Возможное решение. (Кармазин С.). Пусть $M_о$ – начальная масса льдинки, а M_1 – масса льдинки после ее охлаждения и повторного погружения в жидкость. Охлажденная льдинка в сосуде с водой нагревается до $t = 0^o$С за счет теплоты, выделяющейся при намерзании на нее массы льда $\Delta M = M_1 - M_0$. Уравнение теплового баланса имеет вид:

$$C_л M_о(0 - (-t_1)) = \lambda\Delta M. \qquad (1)$$

Условие плавания льдинки в первом случае

$$M_о + m_1 = \rho_в(M_о/\rho_л) \qquad (3)$$

и во втором случае

$$M_1 + m_2 = \rho_в(M_1/\rho_л) \qquad (4)$$

где $\rho_в$ и $\rho_л$ – плотности воды и льда соответственно.

Из (3) получаем $$M_0 = m_1/(\rho_в/\rho_л - 1). \qquad (5)$$

Вычтем (3) из (4): $$\Delta M = (m_2 - m_1)/(\rho_в/\rho_л - 1). \qquad (6)$$

Подставим (5) и (6) в (1):

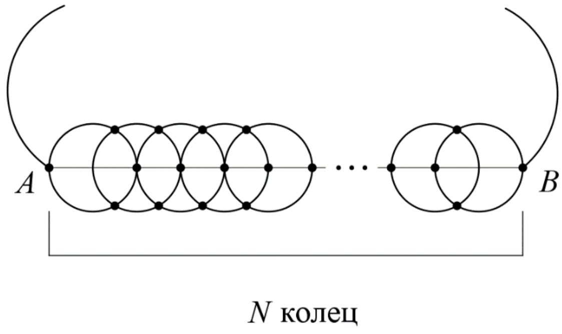
$$t_1 = -\lambda(m_2 - m_1)/(с_л\, m_1) = -16{,}2^0\text{C}$$

Критерии оценивания

1) Записано уравнение теплового баланса **3 балла**
2) Записаны условия плавания для 2 случаев (по 1 баллу) **2 балла**
3) Определена масса ΔM **2 балла**
4) Получен ответ в общем виде **2 балла**
5) Получен числовой ответ **1 балл**

(при отсутствии знака «–» балл не ставить!)

Задача 5. Кольца Ауди. N одинаковых колец соединены так, что между всеми точками их пересечения обеспечен электрический контакт (места контактов отмечены жирными точками). Центры всех колец лежат на одной прямой (рис. 3). Какое сопротивление $R_Э$ покажет омметр, подключенный к точкам A и B этой цепи, если при подключении к диаметрально противоположным точкам уединённого кольца он показывает сопротивление R_0? Считать $N > 3$.



Возможное решение (1)

Если сопротивление одного кольца R_0, то сопротивление проводника, имеющего длину равную длине кольца, будет равно $R = 4R_0$. Тогда сопротивление проводника длиной равной трети и шестой части кольца будет равно $R/3$ и $R/6$ соответственно.

В силу симметрии схемы относительно оси, проходящей через узлы A и B, в цепи не будет токов, идущих из верхней половины цепи в нижнюю (и наоборот). Следовательно, все центральные узлы можно разъединить вдоль оси, проходящей через A и B. Тогда схема может быть сведена к набору последовательных и параллельных участков, состоящих из резисторов сопротивлениями $R/3$ и $R/6$. Верхняя половина упрощенной схемы приведена на рис 4.

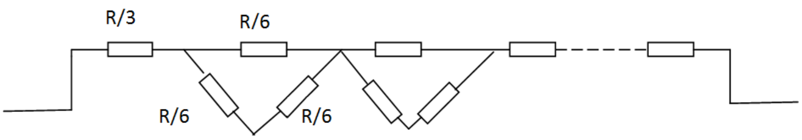


Рис. 4

Тогда сопротивление верхней/нижней части системы, состоящей из N колец, равно:

$$R_{Э_{верх}} = \frac{R}{3} + (N-2)\frac{\frac{R}{6}\frac{R}{3}}{\frac{R}{6}+\frac{R}{3}} + \frac{R}{3} = 4\left(\frac{N+4}{9}\right)R_0,$$

а эквивалентное сопротивление всей цепи

$$R_Э = \frac{R_{Э_{верх}}}{2} = 2\left(\frac{N+4}{9}\right)R_0.$$

Критерии оценивания

1)	Выражены сопротивления участков кольца	**2 балла**
2)	Обоснован разрыв центральных узлов	**2 балла**
3)	Приведена упрощенная эквивалентная схема	**2 балла**
4)	Найдено сопротивление элементарного треугольника цепи	**2 балла**
5)	Найдено эквивалентное сопротивление всей цепи	**2 балла**

18 января, на портале **http://abitu.net/vseros** *будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.*
Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **http://abitu.net/vseros**

Возможное решение (2)

Если сопротивление одного кольца R_0, то сопротивление проводника, имеющего длину равную длине кольца, будет равно $R = 4R_0$. Тогда сопротивление проводника длиной равной трети и шестой части кольца будет равно $R/3$ и $R/6$ соответственно. Обозначим минимальный ток, текущий в ветвях за I, тогда в силу симметрии схемы относительно оси, проходящей через узлы A и B, и с учетом закона Ома, можно расставить токи, текущие в остальных ветвях схемы, как указано на рис. 5.

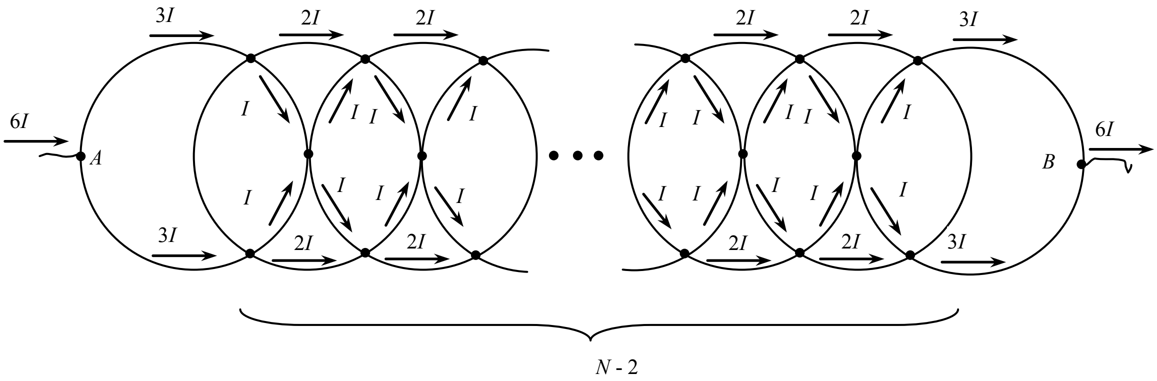


Рис. 5

Напряжение U между узлами A и B равно: $U = 3I\dfrac{R}{3} + (N-2)2I\dfrac{R}{6} + 3I\dfrac{R}{3} = IR\left(\dfrac{4+N}{3}\right)$,

а эквивалентное сопротивление всей цепи равно: $R_Э = \dfrac{U}{6I} = 2\left(\dfrac{4+N}{9}\right)R_0$.

Критерии оценивания

1)	Выражены сопротивления участков кольца	**2 балла**
2)	Расставлены токи с учетом симметрии и закона Ома	**4 балла**
3)	Выражено общее напряжение через токи и сопротивления ветвей	**2 балла**
4)	Найдено эквивалентное сопротивление	**2 балла**

10 класс

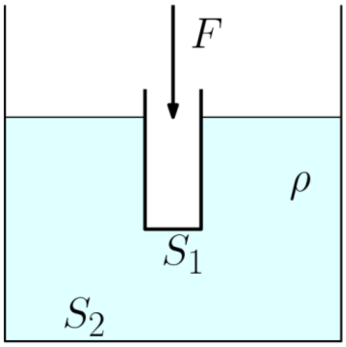


Рис. 1

Задача 1.Стакан-поплавок. В цилиндрическом сосуде площадь дна которого S_2плавает тонкостенный цилиндрический стакан с площадью дна S_1 и высотой h = 24 см. Стакан начинают медленно погружать в воду, измеряя зависимость приложенной силы F от перемещенияxстакана вниз относительно дна сосуда (рис. 1). Оказалось, что силе $F_1 = 1{,}0$ Н соответствуют два значения x: $x_{1,1} = 1{,}5$ см и $x_{1,2} = 7{,}5$ см, а силе $F_2 = 2{,}0$ Н значения x: $x_{2,1} = 3{,}0$ см и $x_{2,2} = 7{,}0$ см. Полагая, что плотность воды $\rho = 1{,}0$ г/см^3, а ускорениесвободного падения g = 10 м/с^2, вычислите:

а) массу стакана;

б) площадь S_1 дна стакана;

в) площадь S_2 дна сосуда.

Объемом стекла, из которого изготовлен стакан, можно пренебречь по сравнению с объемом воды, которой можно наполнить стакан.

Возможное решение.Пусть стакан сместился вниз относительно дна сосуда на расстояние x. При этом уровень воды в сосуде поднялсяна $xS_1/(S_2 - S_1)$, а глубина погружения стакана в воду увеличилась на $xS_2/(S_2 - S_1)$. При этом силаАрхимедаувеличивается на

$$F = \rho g x \frac{S_1 S_2}{S_2 - S_1} \qquad (1)$$

Связь между приложенной к стакану силой F (она в точности равна увеличению силы Архимеда) и его перемещением x является линейной (1) до момента, пока уровень воды не сравняется с верхним краем стакана. В этот момент величина силыF равна

$$F^* = (\rho S_1 h - m) g.$$

В отсутствие внешней силы F стакан выступал из воды на $h_1 = h - m/(\rho S_1)$, поэтому, для того, чтобы уровень воды сравнялся с верхним краем, его необходим переместить вниз на

$$x^* = \left(h - \frac{m}{\rho S_1}\right)\frac{S_2 - S_1}{S_2}$$

Далее, при перемещении стакана вниз на Δx более, чем x^* (то есть всего на $x^* + \Delta x$) приложенная сила уменьшается на величину ΔF веса воды, втекающей в стакан. При этом $\Delta F = \rho S_2 \Delta x g$, а приложенная к стакану сила

$$F = F^* - \Delta F = (\rho S_1 h - m) g - \rho S_2 g \Delta x. \qquad (2)$$

Таким образом, при $x > x^*$ сила линейно уменьшается до нуля при

$$x_{\max} = x^* + \Delta x_{\max} = h - \frac{m}{\rho S_1}.$$

Отметим, что максимальное смещение стакана до момента, когда он начинает “тонуть”, в точности равно расстоянию h_1 от верхнего края стакана до уровня воды в начальный момент.

На рисунке представлен график зависимости $F(x)$ согласно условию задачи. Легко видеть, что

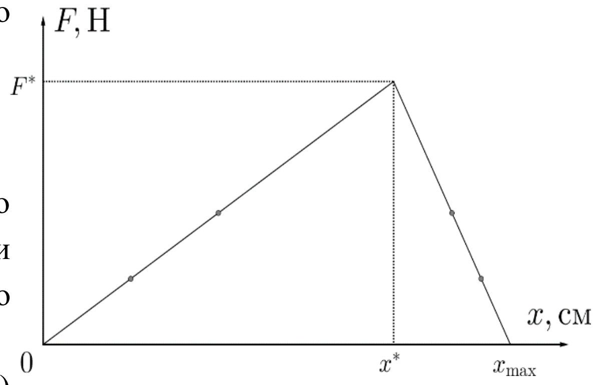


Рис.2

$$x_{\max} = h_1 = h - \frac{m}{\rho S_1} = 8 \text{ см}; \qquad (3)$$

$$x^* = h_1\left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right) = 6 \text{ см}; \qquad (4)$$

$$F^* = \rho S_1\left(h - \frac{m}{\rho S_1}\right) g = 4 \text{ Н}. \qquad (5)$$

Из (3) следует $\frac{m}{\rho S_1} = 16$ см; из (4) получим $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4}$. Подставляя $\frac{m}{\rho S_1}$ в (5) найдём

$S_1 = 50$ см^2, $S_2 = 200$ см^2, $m = 0{,}8$ кг.

Критерии оценивания

1)	Связь величины подъёма уровня воды в сосуде с перемещением стакана	**1 балл**
2)	Связь величины глубины погружения стакана с его перемещением	**1 балл**
3)	Уравнение (1)	**1 балл**
4)	Идея о втекании воды в стакан	**1 балл**
5)	Уравнение (2)	**1 балл**
6)	Нахождение F^*, x^*, $x_{\max}$	**3 балла**
7)	Ответ	**2 балла**

18 января, на портале **http://abitu.net/vseros** *будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.*

Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **http://abitu.net/vseros**

Задача 2. Вязкий валик. Однородный цилиндр массы m и радиуса R касается двух параллельных длинных вертикальных пластин, движущихся с постоянными скоростями v_1 и v_2 вверх (рис. 1). Между пластинами и поверхностью цилиндра существует вязкое трение, сила его пропорциональна относительнойскоростисоприкасающихсяповерхностей ($\vec{F}_{\text{тр}} = -\gamma\vec{v}_{\text{отн}}$). Коэффициенты вязкого трения для первой и второй пластин равны γ_1 иγ_2 соответственно.

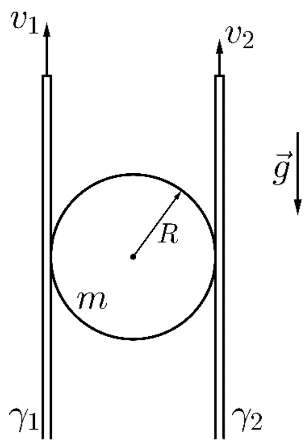


Рис. 1

1. Найдите установившуюся угловую скорость цилиндра, а также скорость его центра.

2. При каком условии цилиндр будет двигаться вверх?

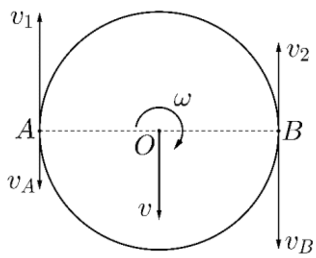


Рис. 2

Возможное решение (Семенин Н.).

Примем за положительное направление движения цилиндра – вниз, а за положительное направление вращения – по часовой стрелке. Тогда скорость точки A цилиндра, соприкасающейся с левой доской

$$v_A = v - \omega R.$$

Аналогично для точки B цилиндра, соприкасающейся с правой доской (рис. 2):

$$v_B = v + \omega R$$

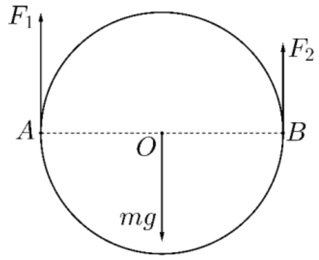


Рис. 3

При установившемся движении сумма сил, приложенных к цилиндру, равна нулю, а также равен нулю суммарный момент сил трения относительно оси Oцилиндра(рис. 3):

$$mg = F_1 + F_2$$
$$F_1 R = F_2 R$$

Подставив

$F_1 = \gamma_1(v_1 + v_A) = \gamma_1(v_1 + v - \omega R),\ F_2 = \gamma_2(v_2 + v_B) = \gamma_2(v_2 + v + \omega R),$

получаем систему уравнений

$$\begin{cases} mg = \gamma_1(v_1 + v - \omega R) + \gamma_2(v_2 + v + \omega R) \\ \gamma_1(v_1 + v - \omega R) = \gamma_2(v_2 + v + \omega R), \end{cases}$$

решая которую, находим

$$\omega = \frac{mg}{4R}\left(\frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_1}\right) + \frac{v_1 - v_2}{2R},$$
$$v = \frac{mg}{4}\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}\right) - \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Как видно из выражения для скорости, цилиндр движется вверх, если

$$v_1 + v_2 > \frac{mg}{2}\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}\right).$$

18 января, на портале **http://abitu.net/vseros** *будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.*
Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **http://abitu.net/vseros**

Критерии оценивания

Записаны выражения для скоростей точек A иB – по **1 баллу за точку**	**2 балла**
Записано равенство сил, действующих на цилиндр + правило моментов по **1 баллу за точку**	**2 балла**
Получена система, из которой определяется v и ω	**2 балла**
Проведены необходимые преобразования и найдены v и ω по **1,5 балла за каждую физическую величину**	**3 балла**
Найдено условие движения цилиндра вверх	**1 балл**

18 января, на портале **http://abitu.net/vseros** *будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.*
Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **http://abitu.net/vseros**

Задача 3. Два шарика на двух нитях. Легкий цилиндрический сосуд с жидкостью стоит на двух симметричных опорах. Над одной из них внутри сосуда привязан к дну полностью погруженный в жидкость поплавок объемом V=10 см^3 и плотностью ρ=500 кг/м^3. Над другой опорой висит привязанный к верху сосуда шарик такого же объема V и плотностью 3ρ (рис. 1). Найдите модуль разности сил реакции опор.

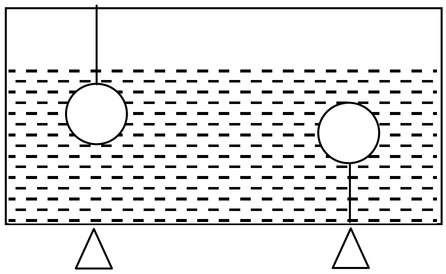


Рис. 1

Возможное решение (Замятнин М.). Расставим силы, действующие на сосуд: F-сила давления на дно, действующая со стороны воды, T_1 и T_2- силы натяжения нитей, N_1 и N_2-силы реакций опор (рис. 2).

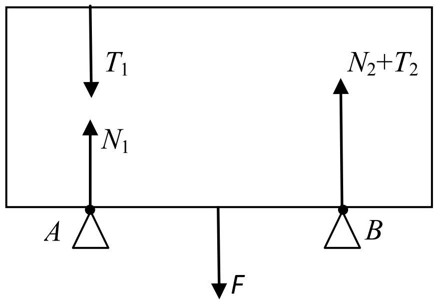


Рис. 2

Запишем правило моментов относительно точкиA:

$$(N_2+T_2)2l = Fl.$$

Запишем правило моментов относительно точкиB:

$$N_1 2l = T_1 2l + Fl.$$

Найдём силу с которой вода действует на дно сосуда:

$$F = \rho_0 gHS = \rho_0 g\left(\frac{m}{\rho_0}+2V\right),$$

где H - уровень воды в сосуде, S – площадь дна сосуда, m – масса воды в сосуде.

Запишем условие равновесия для шариков: $T_1 + \rho_0 Vg = 3\rho Vg$.

$$T_2 + \rho Vg = \rho_0 Vg.$$

Решая систему получим:

$$N_1 = \frac{mg+6\rho Vg}{2},$$

$$N_2 = \frac{mg+2\rho Vg}{2}.$$

$$N_1 - N_2 = 2\rho Vg = 0{,}1\ \text{Н}.$$

Критерии оценивания

1)	Записано правило моментов относительно полюса (A)	**1 балл**
2)	Записано правило моментов относительно полюса ($Б$)	**1 балл**
3)	Записано условие равновесия для шариков (для каждого по 1 баллу)	**2 балла**
4)	Получено выражение для силы F	**2 балла**
5)	Найдена реакция опоры N_1	**1 балл**
6)	Найдена реакция опоры N_2	**1 балл**
7)	Получен ответ	**2 балла**

18 января, на портале **http://abitu.net/vseros** *будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.*
Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **http://abitu.net/vseros**

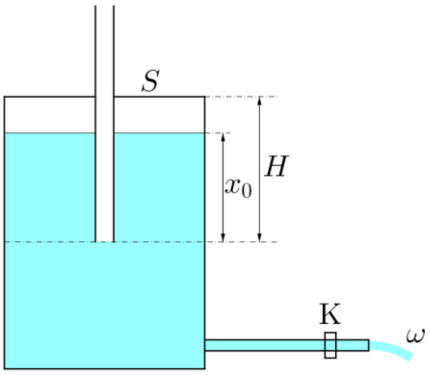


Рис. 1

Задача 4. Сосуд Мариотта Сосуд Мариотта представляет собой герметически закрытый цилиндрический сосуд с площадью днаS, в верхнюю крышку которого вставлена открытая с обоих концов тонкая трубка (рис. 1). Нижний конец трубки расположен на расстоянии H от верхней крышки сосуда. Около дна сосуда в его боковую стенку вставлена горизонтальная трубка с краном. Вначальный момент времени высота уровня воды относительно нижнего конца вертикальной трубки равна x_0, а сама эта трубка полностью заполнена воздухом. Кран закрыт. В момент времени $t = 0$ кран открывают, и вода начинает вытекать из сосуда, а пузырьки воздуха проникать в сосуд через вертикальную трубку.Расход вытекающей жидкости равенω (объем в единицу времени). Температура сосуда T, атмосферное давление p_0, молярная массаM воздуха известны и остаются постоянными. Давлением насыщенных паров воды пренебречь. Считайте, что в ходе всего эксперимента уровень жидкости в сосуде не опустился ниже конца вертикальной трубки. Плотность воды равна ρ.

1. Чему равна масса m_0 воздуха в сосуде над водой в начальный момент времени?
2. Чему равна скорость μизменения массывоздуха в сосуде в начальный момент времени?
3. С какой скоростьюβ изменяется μ (скорость изменения массы воздуха в сосуде) в процессе вытекания воды из него?

Возможное решение (Кармазин С.).Пусть ω – секундный расход воды, вытекающей из сосуда Мариотта (рис. 2). Скорость опускания уровня воды в сосуде $\upsilon = \omega / S$. Таким образом, объем воздуха над водой в сосуде изменяется со временем по закону:

$$V = S\left(H - x_0\right) + \omega t\,, \qquad (1)$$

а уровень воды x:

$$x = x_0 - \upsilon t = x_0 - \frac{\omega}{S} t\,.$$

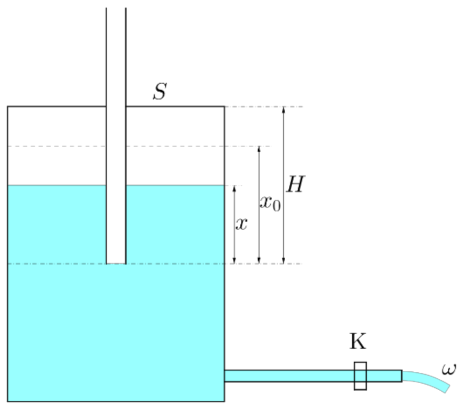


Рис. 2

Давление воздуха над поверхностью воды изменяется со временем по закону:

$$p = p_0 - \rho g x = p_0 - \rho g x_0 + \rho g \frac{\omega}{S} t\,. \qquad (2)$$

Найдём массу воздуха над водой:

$$m = \frac{M}{RT} pV = \frac{M}{RT}\left(p_0 - \rho g x_0 + \rho g \frac{\omega}{S} t\right)\left[S\left(H - x_0\right) + \omega t\right] =$$

$$\frac{M}{RT} S\left(H - x_0\right)\left(p_0 - \rho g x_0\right) + \frac{M}{RT}\omega\left[\left(p_0 - \rho g x_0\right) + \rho g\left(H - x_0\right)\right]t + \frac{M}{RT}\frac{\rho g\left(\omega t\right)^2}{S}.$$

Масса воздуха в сосуде над водой в начальный момент времени

$$m(0) = \frac{M}{RT} S\left(H - x_0\right)\left(p_0 - \rho g x_0\right).$$

Скорость изменения массы воздуха в сосуде в начальный момент времени

$$\mu(0) = \frac{dm}{dt} = \frac{M}{RT}\omega\left[p_0 + \rho g H - 2\rho g x_0\right].$$

Скорость βизмененияμ (скорости изменения массы воздуха в сосуде)

$$\beta = \frac{d\mu}{dt} = 2\frac{M}{RT}\frac{\rho g \omega^2}{S}.$$

Критерии оценивания

1)	Найден объем воздуха над водой в сосуде	**1 балл**
2)	Найден уровень воды в сосуде	**1 балл**
3)	Найдено давление воздуха над поверхностью воды	**2 балла**
4)	Найдена масса воздуха над водой	**3 балла**
5)	Найдена масса воздуха в сосуде над водой в начальный момент	**1 балл**
6)	Найдена скорость изменения массы воздуха в сосуде	**1 балл**
7)	Найдена скорость изменения скорости изменения массы воздуха	**1 балл**

18 января, на портале **http://abitu.net/vseros** *будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.*
Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **http://abitu.net/vseros**

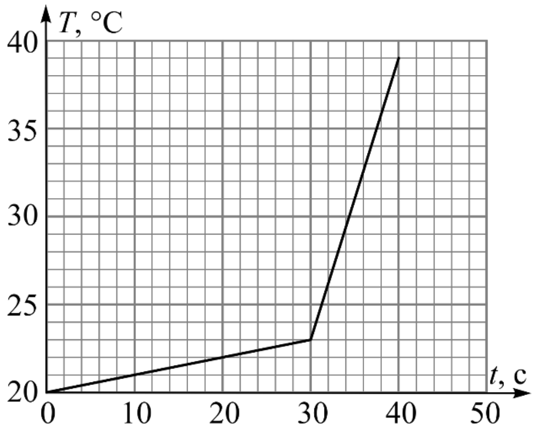


Рис. 1

Задача 5. Зацепился! На электродвигатель постоянного тока установили датчик температуры. На верхнем этаже стройки поставили лебедку, приводимую в движение этим двигателем. В начале рабочего дня лебедка стала поднимать груз массой $M = 67{,}5$ кг. Не доехав всего один этаж до лебёдки, груз зацепился. На каком этаже это произошло? Зависимость температуры двигателя от времени $T(t)$ изображена на рис. 1. Известно, что на двигатель всегда подается одно и то же напряжение; трением в подшипниках двигателя и лебёдки пренебречь. Принять $g = 10$ м/с^2, высоту одного этажа 3 м,теплоемкость электродвигателя$C = 4{,}5$ кДж/^{0}С.

Возможное решение (Юдин И.).Пусть двигатель подключен к сети с напряжением U_0; N_1 и N_2 – мощность тепловых потерь на первом и втором участке работы двигателя (с нагрузкой и с "заклиниванием"); I_0 – сила тока при работе двигателя, поднимающего груз; N_m – механическая мощность по поднятию груза, R – сопротивление обмотки двигателя, υ – скорость груза, поднимаемого на 1 участке.

Энергетический баланс на 1 участке:

$$U_0 I_0 = N_1 + N_m, \quad (1)$$

где

$$N_1 = RI_0^2. \quad (2)$$

На участке 2 мощность, потребляемая двигателем

$$N_2 = \frac{U_0^2}{R}. \quad (3)$$

Заметим, что

$$N_1 N_2 = (I_0 U_0)^2. \quad (4)$$

Тогда с учётом (2), (3), (4) выражение (1) примет вид:

$$\sqrt{N_1 N_2} = N_1 + N_m,$$

откуда следует:

$$N_m = \sqrt{N_1 N_2} - N_1.$$

Из графика, данного в условии, находим

$$N_1 = C\left(\frac{\Delta T}{\Delta t}\right)_1 = 4\,500\left(\frac{\text{Дж}}{^\circ\text{C}}\right)0{,}1\left(\frac{^\circ\text{C}}{\text{c}}\right) = 450 \text{ Вт}.$$

$$N_2 = C\left(\frac{\Delta T}{\Delta t}\right)_2 = 4\,500\left(\frac{\text{Дж}}{^\circ\text{C}}\right)1{,}6\left(\frac{^\circ\text{C}}{\text{c}}\right) = 7\,200 \text{ Вт}.$$

Механическая мощность $N_m = \sqrt{N_1 N_2} - N_1 = 1800 \text{ Вт} - 450 \text{ Вт} = 1\,350 \text{ Вт}.$

С другой стороны, $N_m = Mg\upsilon$.

Из двух последних уравнений получим

$$\upsilon = \frac{N_m}{Mg} = 2 \text{ м/с}.$$

Высота, на которой зацепился груз

$H = \upsilon t = 60$ м или на границе 20 и 21 этажей.

Критерии оценивания

1) Уравнения энергетического баланса для первого участка	**1 балл**
2) Уравнения энергетического баланса для второго участка	**1 балл**
3) Выражение для механической мощности через тепловые	**1 балл**
3) Вычисление тепловых мощностей из графика $T(t)$ (формула + число)	
на 1 участке (**1+ 0,5 балла)**	**1,5 балла**
на 2 участке (**1+ 0,5 балла)**	**1,5 балла**
4) Выражение для скорости поднятия груза	**2 балла**
численное значение	**1 балл**
5) Итоговый численный ответ	**1 балл**

11 класс

Задача 1. Сообщающиеся сосуды. В двух одинаковых сообщающихся вертикальных цилиндрических сосудах находится жидкость плотности ρ. Первоначальный уровень жидкости в сосудах $l = 10$ см от дна (рис. 1). Сосуды соединены через отверстия в их дне маленькой трубочкой пренебрежимо малого объема. В левом сосуде на высоте $2l$ от дна находится лёгкий поршень, который может свободно перемещаться без трения о стенки. Под поршнем находится воздух при атмосферном давлении $p_0 = 2\rho gl$. С момента времени $t = 0$ в левый сосуд в пространство над поршнем начинает поступать жидкость плотности ρ, причем скорость прироста её уровня над поршнем составляет υ = 0,2 мм/с.

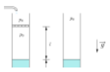


Рис. 1

1) С какой скоростью движется поверхность жидкости в правом сосуде в начале процесса?

2) С какой скоростью и в каком направлении (вверх или вниз) движется поверхность жидкости над поршнем в начале процесса?

3) На какой высоте z от дна сосуда будет находится поверхность жидкости над поршнем

а) через 600 с? б) через 1100 с?

Температуру в сосудах можно считать постоянной. Жидкость из сосудов не выливается.

Возможное решение (Аполонский А.). 1) Пусть через малое время Δt после начала поступления жидкости на поршень высота столба жидкости в правом цилиндре возросла на Δh. Из условия гидростатического равновесия в сосудах

$$p_0 + \rho g\left(l + \Delta h\right) = p_0 + \rho g\upsilon\Delta t + \rho g\left(l - \Delta h\right).$$

Из этого уравнения находим скорость поднятия жидкости в правой части сосуда в начале процесса:

$$\upsilon_П = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\upsilon}{2}.$$

2) Пусть S – площадь поршня. Из закона Бойля-Мариотта

$$\left(p_0 lS = \left(p_0 + \rho g\upsilon\Delta t\right)HS\right)$$

найдем высоту H столба воздуха в левом сосуде:

$$H = \frac{l}{1 + \dfrac{\rho g\upsilon t}{p_0}} = \frac{l}{1 + \dfrac{\upsilon t}{2l}}.$$

Здесь t – время поступления жидкости в левый сосуд. Тогда поверхность жидкости над поршнем находится на высоте z от дна сосуда.

$$z(t) = (l-h) + H + \upsilon t = l - \frac{\upsilon t}{2} + \frac{l}{1+\frac{\rho g \upsilon t}{p_0}} + \upsilon t = l + \frac{\upsilon t}{2} + \frac{l}{1+\frac{\upsilon t}{2l}}. \qquad (1)$$

При малых t высота

$$z(t) \approx \left(l + \frac{\upsilon t}{2}\right) + \left(l - \frac{\upsilon t}{2}\right) = 2l,$$

то есть в начале процесса скорость изменения высоты поверхности жидкости близка к нулю.

3а) Из формулы (1) следует. Что при t = 600 с искомая высота z = 22,25 см.

3б) Формальная подстановка даёт, что через t = 1 100 с в левом цилиндре под поршнем уровень жидкости опустится на $h = \frac{\upsilon t}{2} = 11$ см. Но, это больше l. Следовательно, к этому времени вся вода из под поршня перетечет в правую часть, а воздух под поршнем "пробулькнет" и поршень опустится на дно.

Тогда высота поверхности жидкости над поршнем окажется $z = \upsilon t = 22$ см.

Критерии оценивания

1) Условие гидростатического равновесия	**2 балл**
2) Дан ответ к пункту 1 – (формула + число) **0.5 + 0.5 балла**	**1 балл**
3) Записан закон Бойля-Мариотта	**1 балл**
4) Получено выражение для высоты поверхности жидкости от времени	**2 балла**
5) Дан ответ к пункту 2	**1 балл**
6) Дан ответ к пункту 3а)	**1 балл**
7) Указано, что воздух "пробулькивает" и поршень опускается на дно	**1 балл**
8) Дан ответ к пункту 3б)	**1 балл**

Задача 2. Стеклоподъёмники. При включении электродвигателя стеклоподъемника одной двери автомобиля стекло поднимается из нижнего в верхнее положение за время t_1. Если включить одновременно два стеклоподъемника, то стекла поднимутся за время t_2 $(t_2 > t_1)$.

1) За какое время t_3 поднимутся три стекла автомобиля при одновременной работе трёх стеклоподъёмников?

2) За какое время t_4 поднимутся все четыре стекла автомобиля при одновременной работе всех четырёх стеклоподъёмников.

Примечания. Считайте, что сила, необходимая для подъёма стекла, не зависит от скорости подъёма, а сила тяги F мотора стеклоподъёмника пропорциональна силе тока, идущего через него.

Решение (Гуденко А., Кармазин С.). Закон сохранения энергии при работе одного стеклоподъёмника:

$$IU = I^2(r+R) + sF/t_1.$$

Здесь U – ЭДС аккумулятора, r – его внутреннее сопротивление, R – сопротивление обмотки электродвигателя, I – сила тока, необходимая для равномерного подъёма стекла и создающая необходимую силу тяги $F = \beta I$, β – коэффициент пропорциональности, s – перемещение стекла при подъёме.

При работе двух стеклоподъёмников сила тока, текущего через аккумулятор, в два раза больше и закон сохранения энергии выглядит так:

$$2IU = (2I)^2(r+R/2) + 2sF/t_2.$$

Для трёх стеклоподъёмников:

$$3IU = (3I)^2(r+R/3) + 3sF/t_2.$$

Для четырёх стеклоподъемников:

$$4IU = (4I)^2(r+R/4) + 4sF/t_2.$$

Из первых трёх уравнений получаем: $\dfrac{1}{t_3} - \dfrac{1}{t_2} = \dfrac{1}{t_2} - \dfrac{1}{t_1}$,

Откуда получаем $t_3 = \dfrac{t_1 t_2}{2t_1 - t_2}$.

Аналогично: $t_4 = \dfrac{t_1 t_2}{3t_1 - 2t_2}$.

Из уравнений видно, что при идеальном аккумуляторе (r = 0), все четыре уравнения выглядят одинаково и, соответственно, все времена подъёма также одинаковы.

Критерии оценивания

1. Записано уравнение закона сохранения энергии при подъеме одного стекла	**2 балла**
2. Записано уравнение закона сохранения энергии при подъеме двух стекол	**1 балл**
3. Записано уравнение закона сохранения энергии при подъеме трёх стекол	**1 балл**
4. Записано уравнение закона сохранения энергии при подъеме четырёх стекол	**1 балл**
5. Получена связь на времена t_1, t_2, t_3	**1,5 балла**
6. Получена связь на времена t_1, t_2, t_4	**1,5 балла**
7. Найдено время t_3	**1 балл**
8. Найдено время t_4	**1 балл**

Задача 3. Зарядка-разрядка. В электрической цепи (рис. 1) все элементы можно считать идеальными. Конденсатор емкостью C не заряжен. ЭДС батареи задана. Ключ K замыкают, а затем размыкают в тот момент, когда скорость изменения энергии, запасённой в конденсаторе, составляет 75% от максимальной.

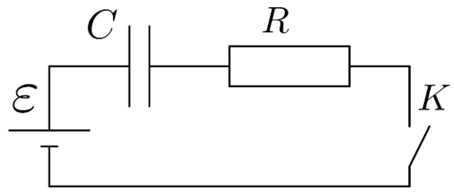


Рис. 1

Найдите количество теплоты, выделившееся в цепи при замкнутом ключе.

Возможное решение (Шеронов А.). Скорость изменения энергии конденсатора:

$$P = \frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right) = \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = \frac{q}{C}I. \qquad (1)$$

Здесь I – сила тока в цепи, q – заряд на конденсаторе.

Запишем закон Ома для цепи:

$$\mathcal{E} = IR + \frac{q}{C}. \qquad (2)$$

Работа батареи идёт на зарядку конденсатора и на тепловые потери на резисторе:

$$\mathcal{E}I = P + I^2R. \qquad (3)$$

Максимум мощности достигается при силе тока $I = \dfrac{\mathcal{E}}{2R}$.

Из уравнения (2) найдём заряд на емкости:

$$q = C\left(\mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{2R}R\right) = \frac{C\mathcal{E}}{2}.$$

Из (1) найдём максимальную скорость изменения энергии:

$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4R}. \qquad (4)$$

По условию в момент размыкания ключа $P = \dfrac{3}{16}\dfrac{\mathcal{E}^2}{R}$. (5)

Подставляя это выражение в уравнение (3) получим:

$$I^2 - \frac{\mathcal{E}}{R}I + \frac{3}{16}\left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)^2 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение найдём:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{2R} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)^2 - \frac{3}{16}\left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)^2} = \frac{\mathcal{E}}{2R} \pm \frac{\mathcal{E}}{4R}.$$

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{4R}; \quad I_2 = \frac{3\mathcal{E}}{4R}.$$

Из уравнения (2) найдём соответствующие заряды:

$$q_1 = \frac{3C\mathcal{E}}{4}; \quad q_1 = \frac{C\mathcal{E}}{4}.$$

Джоулево тепло, выделившееся на резисторе равно:

$$W = \left(q\mathcal{E} - \frac{q^2}{2C} \right).$$

Соответственно,

$$W_1 = \frac{24}{32}C\mathcal{E}^2 - \frac{9}{32}C\mathcal{E}^2 = \frac{15}{32}C\mathcal{E}^2; \quad W_1 = \frac{8}{32}C\mathcal{E}^2 - \frac{1}{32}C\mathcal{E}^2 = \frac{7}{32}C\mathcal{E}^2.$$

Таким образом, задача имеет два решения:

$$W_1 = \frac{15}{32}C\mathcal{E}^2; \quad W_2 = \frac{7}{32}C\mathcal{E}^2.$$

Критерии оценивания

1) Получена скорость изменения энергии конденсатора (1)	**1 балл**
2) Записан закон Ома для цепи (2)	**1 балл**
3) Найдена максимальная скорость изменения энергии конденсатора (4)	**1 балл**
4) Найдена мощность в момент размыкания ключа (5)	**1 балл**
5) Получено квадратное уравнение для соответствующей силы тока	**2 балла**
6) Найдены заряды на конденсаторе, при которых в цепи выделяется соответствующая теплота (по 1 баллу за каждый случай)	**2 балла**
7) Найдено соответствующее количество теплоты (по 1 баллу за каждый случай)	**2 балла**

Задача 4. Долго ли умеючи? В глубинах вселенной вдали от всех тяготеющих масс находится тонкий однородный стержень длины $L = 10$ м и массой $M = 1{,}0$ кг. По нему без трения может скользить бусинка массой $m = 0{,}1$ кг. В начальный момент бусинка слегка смещена относительно центра стержня и система неподвижна. Через какое время τ бусинка впервые достигнет середины стержня? Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

Решение (Плис В.). В процессе колебаний центр масс системы тел будет оставаться неподвижным. Начало лабораторной системы отсчета OX поместим в центр масс. Подвижную систему отсчета OX_1 свяжем со спицей. В ЛСО ускорение бусинки при малом ее смещении x_1 относительно спицы определяется силой притяжения концевого отрезка спицы длиной $2x_1$ и расположенного на расстоянии $\approx L/2$ от бусинки:

$$a_{m,C} = \frac{F_x}{m} = -\frac{Gm(M/L)2x_1}{m(L/2)^2} = -\frac{8GM}{L^3}x_1 .$$

Ускорение стержня при этом смещении бусинки

$$a_{M,C} = -\frac{F_x}{M} = \frac{Gm(M/L)2x_1}{M(L/2)^2} = \frac{8Gm}{L^3}x_1 .$$

Тогда ускорение a_m бусинки относительно стержня будет равно

$$a_m = a_{m,C} - a_{M,C} = -\frac{8G(M+m)}{L^3}x_1 .$$

Получено уравнение гармонических колебаний бусинки относительно спицы. Период этих колебаний

$$T = 2\pi/\omega = \pi L\sqrt{\frac{L}{2G(M+m)}} .$$

Искомое время равно четверти периода гармонических колебаний

$$\tau = T/4 \approx 2{,}0 \cdot 10^6 \text{ с} \approx 24 \text{ суток} .$$

Решение (Гуденко А.). Известно, что период колебаний двух грузов m и M, связанной пружинкой с жёсткостью k, определяется точно также, как для одного грузика на пружинке, но только вместо массы груза нужно взять приведённую массу $\mu = \dfrac{mM}{m+M}$ (это выражение можно получить из уравнений движения).

Период колебаний груза на пружине равен $\quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\mu}{k}}$.

В нашем случае «коэффициент жёсткости» $k = \dfrac{8GmM}{L^3}$.

Тогда период колебаний $T = \pi L\sqrt{\dfrac{L}{2G(M+m)}}$.

18 января, на портале **http://abitu.net/vseros** *будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.*
Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **http://abitu.net/vseros**

Критерии оценивания

1) Отмечено, что при смещении бусинки на x_1 сила притяжения определяется взаимодействием бусинки и части спицы длиной $2x_1$ **1 балл**
2) Применён вторые законы Ньютона (по 2 балла за каждый из случаев (для бусинки и для стержня) **4 балла**
3) Получено ускорение бусинки относительно стержня **1 балл**
4) Получено выражение для периода колебаний **2 балл**
5) Получен численный ответ **2 балла**

18 января, на портале **http://abitu.net/vseros** *будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.*
Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **http://abitu.net/vseros**

Задача 5. Толстая линза. Вся поверхность плоского экрана, представляющего собой матовое стекло, освещается параллельным пучком лучей, направленным перпендикулярно экрану. Толстую линзу в виде половинки стеклянного шара расположили **перед** экраном так, что плоская поверхность линзы параллельна плоскости экрана (рис. 1). Показатель преломления стекла линзы $n = 2{,}0$. Диаметр линзы, меньше размеров экрана.

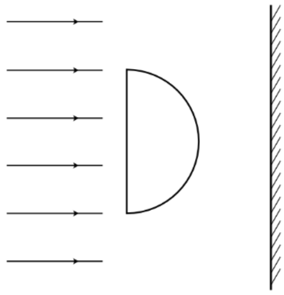


Рис. 1

1) Определите расстояние L_1 от плоской поверхности линзы до экрана, если на экране наблюдается картина (рис. 2). Здесь пунктирные линии касаются внешней границы области с переменной освещённостью.
2) Определите расстояние L_2 от плоской поверхности линзы до экрана, если на экране наблюдается картина (рис. 3).

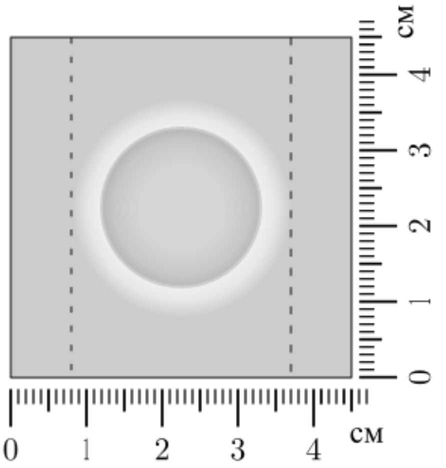


Рис. 2

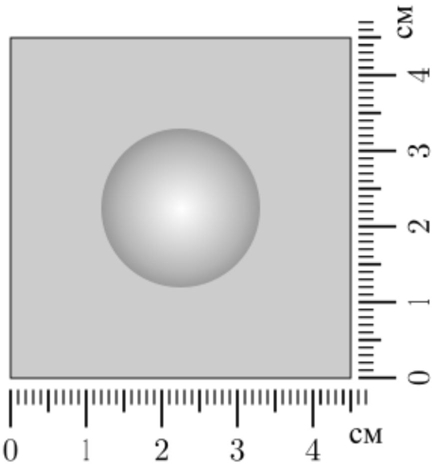


Рис. 3

Возможное решение (Варламов С., Карманов М.). Рассмотрим ход лучей в линзе. Плоскую границу линзы все лучи проходят без преломления. А вот из сферической поверхности выходят не все лучи. Часть из них испытывает полное отражение. Найдем предельный угол падения, при котором лучи перестают выходить за сферическую поверхность: $n \sin \alpha_{\text{пр}} = 1{,}0$. Отсюда $\alpha_{\text{пр}} = 30^\circ$.

Построим ход некоторых лучей. Из данной картинки (рис. 4) понятно, почему в первом случае мы наблюдаем на экране кольцо более яркое, чем вся поверхность экрана. Это кольцо создается как лучами, прошедшими мимо линзы, так и некоторыми лучами, прошедшими сквозь неё. При этом внешняя граница яркого кольца определяется как раз лучом, падающим на сферическую поверхность под предельным углом

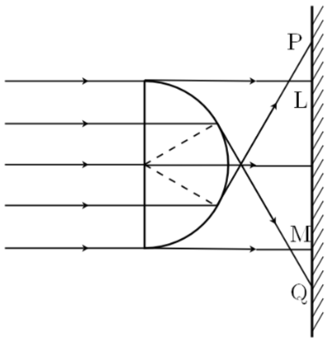


Рис. 4

в 30°.

Диаметр же темного центрального пятна равен диаметру линзы. Определим с помощью масштабной линейки внешний диаметр кольца D = 2,90 см и диаметр внутреннего темного круга d = 2,10 см.

Рассмотрим предельный луч.

Отмеченный угол равен 30°, $CD = \frac{d}{2} = R = 1{,}05$ см (рис. 5).

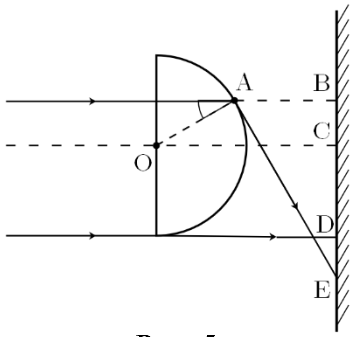


Рис. 5

$$CE = \frac{D}{2} = 1{,}45 \text{ см.}$$

Пусть L – искомое расстояние, тогда $AB = L - R\cos\alpha_{\text{пр}}$.

$$BE = \frac{D}{2} + R\sin\alpha_{\text{пр}}.$$

$$\frac{AB}{BE} = \operatorname{tg}\alpha_{\text{пр}}.$$

В результате преобразований получим $L_1 = \dfrac{\frac{D}{2}\sin\alpha_{\text{пр}} + R}{\cos\alpha_{\text{пр}}} = 2{,}05$ см.

Во втором случае точки D и E должны совпасть. Тогда $D = d = 1{,}05$ см.

$$L_2 = R\frac{\sin\alpha_{\text{пр}} + 1}{\cos\alpha_{\text{пр}}} = 1{,}82 \text{ см.}$$

Критерии оценивания

1)	Понимание наличия полного внутреннего отражения для части лучей	**1 балл**
2)	Определен предельный угол в 30 градусов	**1 балл**
3)	Рисунок с ходом лучей, поясняющий образование на экране первой картинки.	**2 балла**
4)	Показано, что диаметр темного пятна равен диаметру полушара.	**1 балл**
5)	Записаны геометрические связи, позволяющие получить ответ.	**1 балл**
6)	Получена формула для L в первом случае	**1 балл**
7)	Верный численный ответ в первом случае	**1 балл**
8)	Верный переход ко второму случаю	**1 балл**
9)	Верный численный ответ во втором случае	**1 балл**

18 января, на портале **http://abitu.net/vseros** *будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.*

Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **http://abitu.net/vseros**