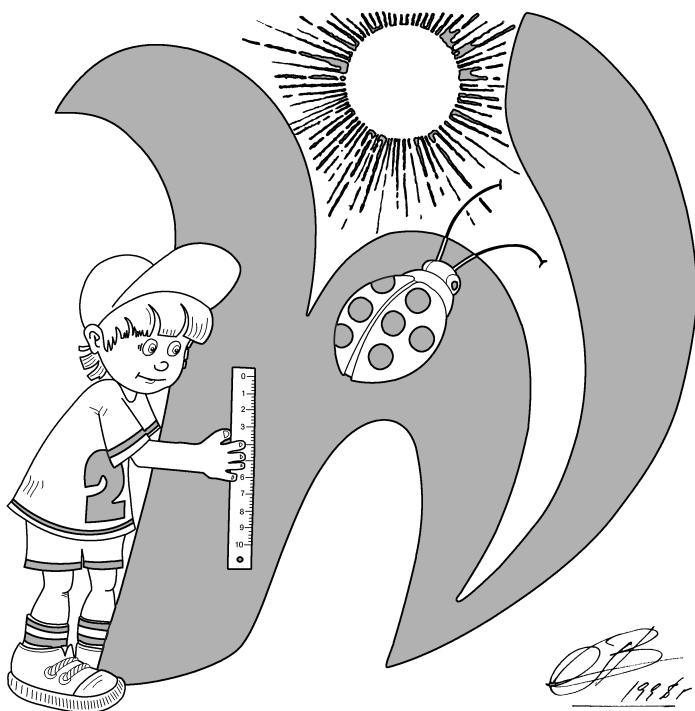


Центральная предметно-методическая комиссия
Всероссийской олимпиады школьников по физике

LI Всероссийская олимпиада школьников по физике

Заключительный этап
Теоретический тур

Методическое пособие



Казань – 2017

Комплект задач подготовлен
Центральной предметно-методической комиссией
Всероссийской олимпиады школьников по физике

Телефоны: (495) 408-80-77, 408-86-95

E-mail: physolymp@gmail.com

Сайт: physolymp.ru

Собрано в \LaTeX by И. А. Утешев.

При подготовке оригинал-макета

использовалась издательская система \LaTeX 2 ϵ .

© Авторский коллектив

141700, Московская область, г. Долгопрудный

Московский физико-технический институт

9 класс

Задание 1. Тише едешь... В безветренную погоду на озере была проведена серия испытаний радиоуправляемой модели катера с бензиновым двигателем, в ходе которых выяснилось, что при скорости $v_1 = 5,00$ км/ч путевой расход топлива составляет $\lambda_1 = 20,0$ г/км, а при скорости $v_2 = 15,0$ км/ч расход равен $\lambda_2 = 40,0$ г/км. Запас топлива на борту модели $M = 100$ г.

- Выведите зависимость путевого расхода топлива λ от скорости v .
- Какое максимальное время τ_x может работать двигатель у неподвижной модели?
- При какой скорости модели v_0 путевой расход топлива минимален и каково его значение λ_0 ? Полученные результаты должны быть найдены с погрешностью, не превышающей 1%.
- На какое максимальное расстояние L_0 и за какое время τ_0 сможет уплыть модель?
- Какие значения τ_1 может принимать время прохождения моделью расстояния $L_1 = 3$ км?

Примечание. Считайте, что при работе двигателя массовый расход топлива μ (г/с) **линейно** зависит от мощности силы сопротивления, а сила сопротивления **пропорциональна** скорости модели относительно воды. Модель движется равномерно и при любой скорости ее осадка не меняется.

Задание 2. С дымком При проведении аэрофотосъёмки была получена фотография, на которой видны два шлейфа дыма от паровозов (рис. 9.1). Одной клетке на фотографии соответствует 50 м на местности. Известно, что один паровоз двигался равномерно по кольцевой ветке железной дороги, а другой с такой же скоростью по прямой. Определите:

- направление скорости ветра;
- радиус R кольцевой железной дороги;
- отношение скорости паровоза v к скорости ветра u ;
- направление прямой железнодорожной ветки (выполнить построения с помощью циркуля и линейки).

Задание 3. Нелинейная спираль Сопротивление R спирали зависит от температуры по закону $R = R_0 + \alpha(t - t_0)$, где t – температура спирали, $R_0 = 10$ Ом, $\alpha = 40,0 \cdot 10^{-3}$ Ом/°C, $t_0 = 20^\circ\text{C}$. На спираль подаётся напряжение $U = 220$ В, и за время $\tau_1 = 100$ мкс она нагревается от t_0 до $t_1 = 80^\circ\text{C}$.

- До какой температуры t_2 нагреется спираль за время $\tau_2 = 334$ мкс от момента включения?
- Определите теплоёмкость спирали.

При данных температурах и временах излучением и теплоотдачей можно пренебречь.

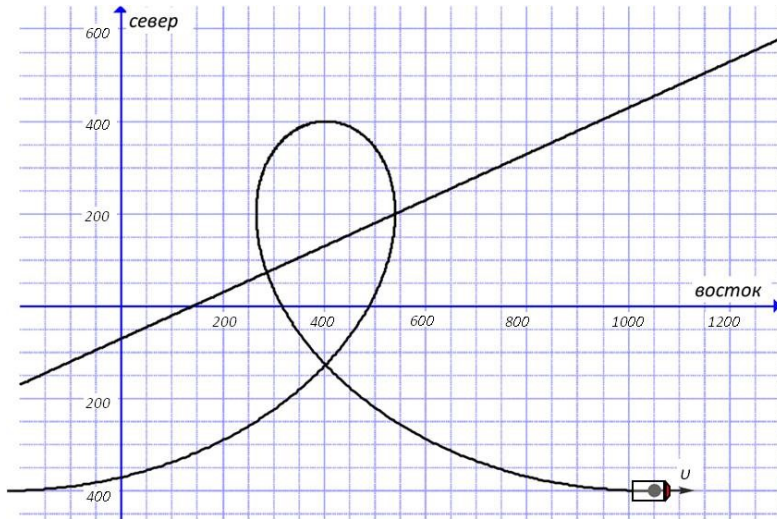


Рис. 9.1

Задание 4. Два нелинейных элемента Электрическая цепь состоит из двух одинаковых нелинейных элементов X , потенциометра, сопротивление между неподвижными контактами которого $R = 100$ Ом, и идеальной батарейки с напряжением $U_0 = 10$ В (рис. 9.2). Вольтамперная характеристика элемента X приведена на рис. 9.3. Определите:

1. Суммарную мощность, выделяющуюся на двух нелинейных элементах, при крайних положениях движка потенциометра.
2. Суммарную мощность, выделяющуюся на двух нелинейных элементах, при положении движка потенциометра в центре.
3. Минимальную суммарную мощность, выделяющуюся на двух нелинейных элементах. При каких положениях движка потенциометра эта мощность достигается? Ответ обоснуйте.
4. Суммарную мощность, выделяющуюся на двух нелинейных элементах, при положении движка потенциометра, в котором сопротивление его левого плеча равно 25 Ом.

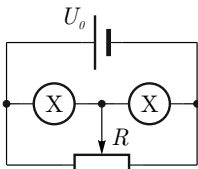


Рис. 9.2

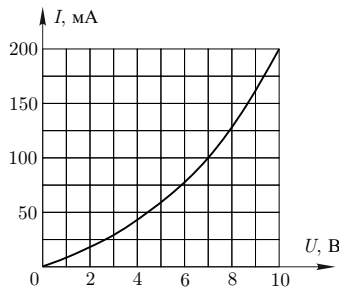


Рис. 9.3

Задание 5. Лазер в сосуде Внутри стеклянного тонкостенного цилиндрического сосуда радиуса R вблизи его стенки в точке A расположен микролазер, размеры которого гораздо меньше R . Сосуд заполнен водой, а снаружи находится воздух. Половина внутренней поверхности сосуда, соответствующая дуге ACB , зачернена и поглощает свет. Изначально луч лазера направлен в точку B .

Лазер начинает вращаться с постоянной угловой скоростью ω против часовой стрелки в плоскости рисунка вокруг оси, проходящей через точку A (рис. 9.4). Показатель преломления воды $n = 4/3$.

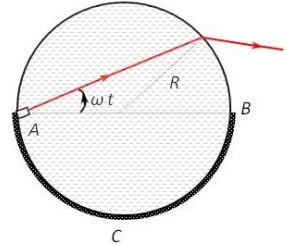


Рис. 9.4

- Через какое время τ луч перестанет выходить из сосуда?
- Чему будет равна скорость «зайчика» на зачернённой поверхности цилиндра в момент времени $1,5\tau$ от начала его движения?

Примечание. Вам может потребоваться закон Снелла: $n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2$, где n_1 и n_2 – показатели преломления света в первой и второй среде, φ_1 и φ_2 углы падения и преломления.

Возможное решение Т-9-1

При движении со скоростью v расстояние L катер преодолевает за время $\tau = \frac{L}{v}$. При этом мощность сил сопротивления равна $N = Fv = kv^2$, где k – размерный коэффициент. Так как по условию массовый расход топлива линейно зависит от мощности сил сопротивления $\mu = \mu_0 + \alpha N$, где μ_0 и α – размерные коэффициенты, то линейный расход топлива равен $\lambda = \frac{\mu\tau}{L} = \alpha v + \frac{\mu_0}{v}$.

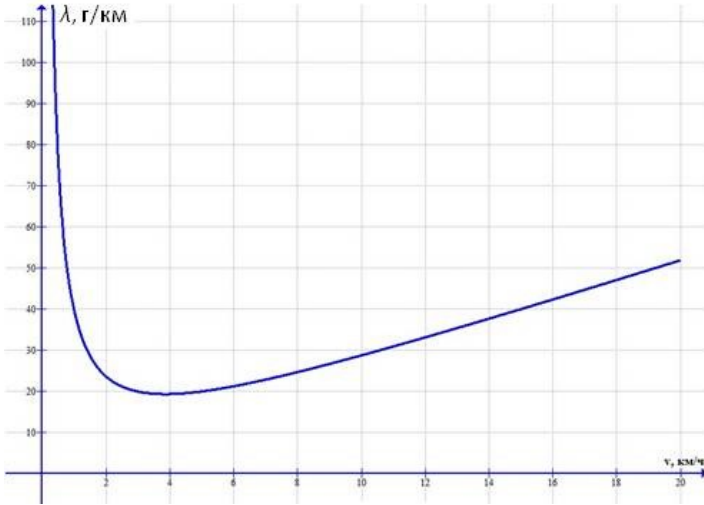


Рис. 9.10

Найдем константы α и μ_0 по известным значениям v_1 , λ_1 , v_2 и λ_2 . Для этого запишем уравнения для линейного расхода $\lambda_1 = \alpha v_1 + \frac{\mu_0}{v_1}$ и $\lambda_2 = \alpha v_2 + \frac{\mu_0}{v_2}$. Решая систему, получим: $\alpha = \frac{\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2}{v_1^2 - v_2^2} = 2,5 \frac{\text{г} \cdot \text{ч}}{\text{км}^2}$ и $\mu_0 = \frac{v_1 v_2 (v_1 \lambda_2 - v_2 \lambda_1)}{v_1^2 - v_2^2} = 37,5 \frac{\text{г}}{\text{ч}}$. С учетом найденных размерных коэффициентов уравнение для линейного расхода приобретает вид: $\lambda = 2,5v + \frac{37,5}{v}$. График этой зависимости представлен на рисунке 9.10.

В режиме холостого хода двигатель неподвижной модели сможет проработать $\tau_x = \frac{M}{\mu_0} = 160$ мин. Умножив полученное выражение для λ на v , получим квадратное уравнение (с размерными коэффициентами, полученными ранее)

$$2,5v^2 - \lambda v + 37,5 = 0, \tag{9.1}$$

дискриминант которого обращается в ноль при $\lambda_0 = 19,4$ г/км, что соответствует $v_0 = 3,87$ км/ч.

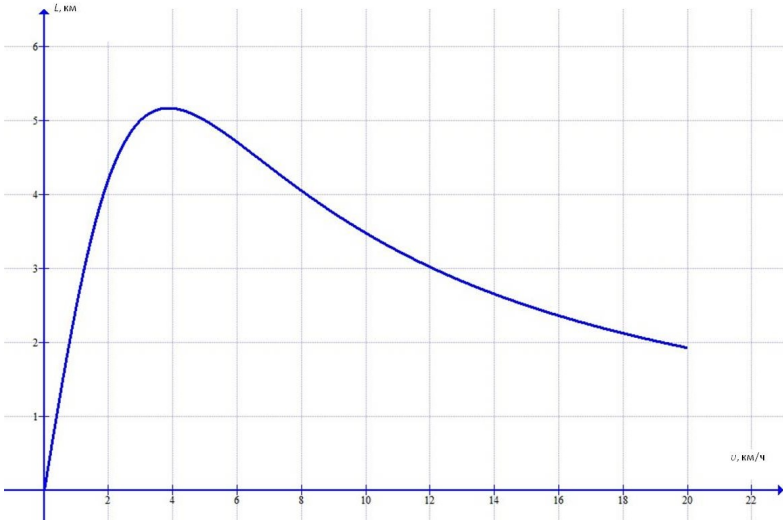


Рис. 9.11

Максимальное расстояние, на которое может уплыть модель, двигаясь с оптимальной скоростью, $L_0 = \frac{M}{\lambda_0} = 5,2$ км, и на его преодоление требуется время $\tau_0 = \frac{L_0}{v_0} = 80$ мин. Зависимость предельной дальности движения от скорости приведена на рисунке 9.11.

Так как требуемое расстояние $L_1 = 3$ км меньше предельной дальности L_0 , то модель не обязана придерживаться оптимальной стратегии и может плыть быстрее или медленнее. Из ранее полученного квадратного уравнения $2,5v^2 - \lambda v + 37,5 = 0$ с учетом $\lambda = \frac{M}{L_1} = \frac{100}{3}$ г/км. Выбирая при решении больший корень, находим максимально допустимую скорость $v_{11} = 12,1$ км/ч, при которой еще хватает топлива на заданной дистанции L_1 , и получаем соответствующее ей минимально возможное время движения 15 мин. Большему корню $v_{12} = 1,24$ км/ч соответствует максимально возможное время движения 145 мин. Окончательно получаем $\tau_1 \in [15 \text{ мин}; 145 \text{ мин}]$.

Возможное решение Т-9-2

Так как паровоз находится в точке B и шлейф расположен западнее, можно сделать вывод, что дует восточный ветер (на запад).

Следовательно, расстояние между точками A и B в направлении с севера на юг (16 клеток = 800 м) определяет диаметр кольцевой линии (радиус $R = 400$ м).

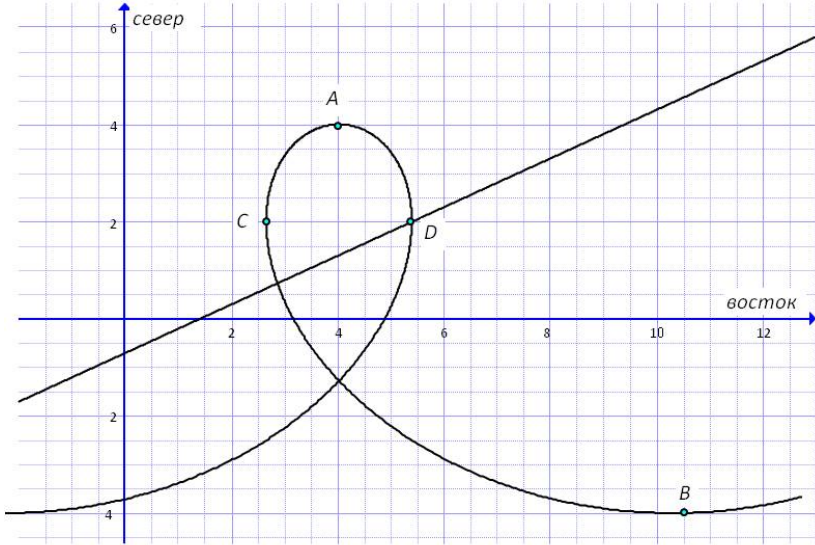


Рис. 9.12

Касательная к шлейфу в точке D направлена с севера на юг. По закону сложения скоростей такое возможно, если в системе отсчета паровоза скорость ветра w направлена вдоль меридиана. Так как точка D расположена южнее точки A на $R/2$, угол $\alpha = 30^\circ$ и $v = 2u$.

Применим закон сложения скоростей. Шлейф дыма от паровоза, движущегося по прямолинейному пути, направлен вдоль скорости ветра относительно паровоза. Но сам паровоз может двигаться в двух разных направлениях.

Из произвольной точки проведем отрезок в западном направлении до пересечения со шлейфом (точка L). Это будет вектор скорости ветра u . Построим окружность вдвое большего радиуса с центром в точке O , точка пересечения которой со шлейфом K задаст направление KO вектора

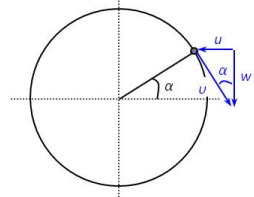


Рис. 9.13

скорости поезда относительно земли $v = 2u$. Скорость ветра в системе отсчета паровоза направлена вдоль шлейфа.

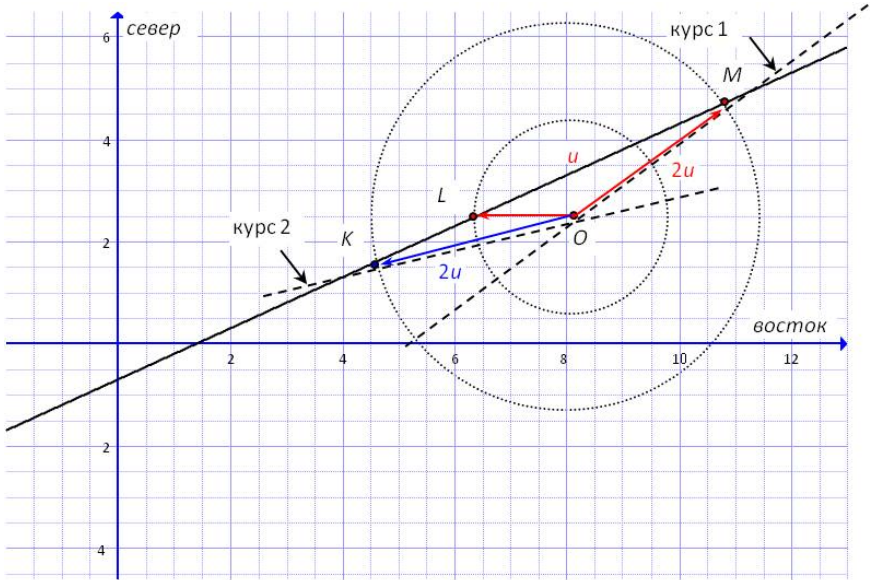


Рис. 9.14

Возможное решение Т-9-3

По закону Джоуля-Ленца тепловая мощность, выделяющаяся на спирали, равна

$$N = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2}{R_0 + \alpha(t - t_0)} \quad (9.2)$$

Поскольку излучение и теплоотдача не учитывается, то количество теплоты, выделившееся за малое время $\Delta\tau$, идет на увеличение температуры спирали на Δt градусов:

$$N\Delta\tau = C\Delta t \quad (9.3)$$

Поэтому

$$\frac{U^2}{C}\Delta\tau = R(t)\Delta t \quad (9.4)$$

С помощью графика зависимости $R(t) = R_0 + \alpha(t - t_0)$ найдем время нагревания до t_1 , так как согласно (9.4) оно пропорционально площади под этим графиком:

$$\frac{U^2}{C}\tau_1 = \frac{R_0 + (R_0 + \alpha(t_1 - t_0))}{2} \cdot (t_1 - t_0) \quad (9.5)$$

Аналогично для нагревания до t_2 :

$$\frac{U^2}{C} \tau_2 = \frac{R_0 + (R_0 + \alpha(t_2 - t_0))}{2} \cdot (t_2 - t_0) \quad (9.6)$$

Из (9.5) получаем:

$$C = \frac{2U^2 \tau_1}{2R_0(t_1 - t_0) + \alpha(t_1 - t_0)^2} = 7,2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Дж}}{^\circ\text{C}} \quad (9.7)$$

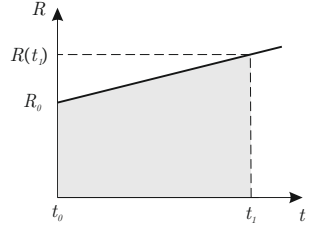


Рис. 9.15

Исключая C из (9.5) и (9.6), получаем квадратное уравнение:

$$\frac{\alpha}{2}(t_2 - t_0)^2 + R_0(t_2 - t_0) - \frac{\tau_2}{\tau_1} \left(\frac{\alpha}{2}(t_1 - t_0)^2 + R_0(t_1 - t_0) \right) = 0 \quad (9.8)$$

Откуда

$$t_2 = 188 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (9.9)$$

(отрицательный корень не имеет физического смысла)

Возможное решение Т-9-4

1. При крайних положениях движка реостата напряжение на одном из элементов X равно нулю, а на втором 10 В. Из графика видно, что через второй элемент при этом течет ток (200 ± 2) мА, значит, суммарная мощность $W_1 = (0 + 10 \cdot 0,2)$ Вт = $(2,00 \pm 0,02)$ Вт.

2. При центральном положении реостата получаем симметричную цепь, следовательно, напряжение на каждом из элементов X будет 5 В. По графику ток равен (60 ± 3) мА, и суммарная мощность $W_2 = (2 \cdot 5 \cdot 0,06)$ Вт = $(0,60 \pm 0,03)$ Вт.

3. Исходя из 1 и 2 пунктов, логично предположить, что минимальная мощность достигается при центральном положении движка реостата. Сдвинем движок реостата из центрального положения в левую сторону. Пусть при этом напряжение на левом элементе уменьшилось на U' и стало $\frac{U_0}{2} - U'$, тогда на правом элементе напряжение стало равным $\frac{U_0}{2} + U'$. На левом элементе ток стал равен $I_0 + \Delta I_{\text{л}}$, а на правом $I_0 + \Delta I_{\text{п}}$, где I_0 – ток через элементы X при центральном положении движка реостата.

Выразим изменение мощности по сравнению с центральным положением движка реостата:

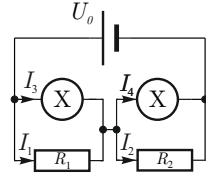
$$\Delta P = \left(\frac{U_0}{2} - U' \right) (I_0 + \Delta I_{\text{л}}) + \left(\frac{U_0}{2} + U' \right) (I_0 + \Delta I_{\text{п}}) - U_0 \cdot I_0 = \frac{U_0}{2} (\Delta I_{\text{л}} + \Delta I_{\text{п}}) + U' (\Delta I_{\text{п}} - \Delta I_{\text{л}}).$$

Заметим, что $\Delta I_{\text{п}} > 0$, а $\Delta I_{\text{л}} < 0$. Кроме того, так как график ВАХ по мере увеличения напряжения растет все быстрее, то $|\Delta I_{\text{п}}| > |\Delta I_{\text{л}}|$, поэтому $\Delta P > 0$ при любых U' , значит, центральное положение движка реостата соответствует минимальной мощности. То есть $W_{\text{min}} = W_2$.

4. Нарисуем эквивалентную схему.

Сопротивление левого резистора $R_1 = 25 \text{ Ом}$, а правого $R_2 = 75 \text{ Ом}$. Пусть напряжение на левом резисторе равно U , токи через резисторы равны I_1 и I_2 , а через элементы $X - I_3$ и I_4 . Тогда можем записать:

$$\begin{cases} I_1 = \frac{U}{R_1} \\ I_2 = \frac{U_0 - U}{R_2} \\ I_1 + I_3 = I_2 + I_4 \end{cases}$$



Откуда получим $I_4 - I_3 = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{U_0}{R_2} = U \cdot 0,053 \text{ Ом}^{-1} - 133 \text{ мА}$.

Из полученного выражения видно, что по мере роста U от 0 до $\frac{U_0}{2}$ разность токов будет монотонно возрастать. Если же искать разность токов исходя из ВАХ, то по мере увеличения U разность токов будет монотонно убывать.

Последовательными приближениями подберем значение U , удовлетворяющее нашему выражению и ВАХ. Получим $U = (3,5 \pm 0,2) \text{ В}$. Тогда из графика находим токи через элементы X , примерно равные соответственно $I_3 = (35 \pm 4) \text{ мА}$ и $I_4 = (87 \pm 5) \text{ мА}$. Суммарная выделяющаяся мощность

$$W = I_3 \cdot U + I_4(U_0 - U) = (0,035 \cdot 3,5 + 0,087 \cdot (10 - 3,5)) \text{ Вт} = (0,7 \pm 0,1) \text{ Вт}.$$

Возможное решение Т-9-5

1. Воспользуемся законом Снелла для преломления луча лазера:

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2 \tag{9.10}$$

С учетом того, что коэффициент преломления воздуха равен 1, найдем условие полного внутреннего отражения:

$$\sin \alpha_{\text{крит}} = \frac{1}{n} \tag{9.11}$$

$$\alpha_{\text{крит}} = \omega\tau = \arcsin \frac{1}{n} \approx 49^\circ \tag{9.12}$$

$$\tau = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{1}{n} \tag{9.13}$$

2. Через время $1,5\tau$ угол будет:

$$\beta = 1,5\omega\tau \approx 73^\circ \tag{9.14}$$

$$\gamma = 180^\circ - 2\beta \approx 34^\circ \tag{9.15}$$

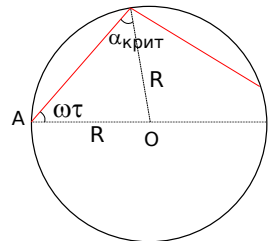


Рис. 9.16

Так как $\gamma < 180^\circ$, то лазерный луч несколько раз отразится, прежде чем попадет на зачерненную половину поверхности сосуда. Посчитаем количество отражений n . Рассмотрим треугольники $\triangle AA_1O$, $\triangle AA_2O$, ..., $\triangle AA_nO$. Углы $\angle A_{k-1}A_kO$ и $\angle A_kA_{k+1}O$ ($k = 1, \dots, n$) равны из условия отражения. Отсюда следует, что рассматриваемые треугольники равны, так как они равнобедренные, и углы при основании равны. Условие на количество отражений будет иметь вид:

$$n \cdot \gamma < 180^\circ < (n + 1) \cdot \gamma \quad (9.16)$$

$$n < 5.3 < n + 1 \quad (9.17)$$

Следовательно количество отражений $n = 5$. Тогда зависимость угловой координаты зайчика от времени $\varphi(t)$ в окрестности $t = 1.5\tau$ будет иметь вид:

$$\varphi(t) = (n + 1)\gamma(t) = (n + 1)(180^\circ - 2\beta(t)) = (n + 1)(180^\circ - 2\omega t) = 1080^\circ - 12\omega t \quad (9.18)$$

Отсюда видно, что зависимость координаты от времени линейная, поэтому находим модуль угловой и линейной скоростей:

$$\omega_3 = 12\omega \quad (9.19)$$

$$v_3 = 12\omega R \quad (9.20)$$

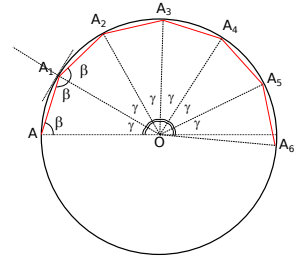


Рис. 9.17

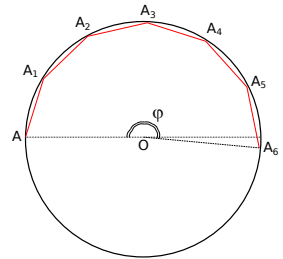


Рис. 9.18

10 класс

Задание 1. На льдине Рядом с мальчиком, стоящим на берегу реки, проплывает со скоростью v_0 тяжёлая льдина прямоугольной формы с ровной горизонтальной поверхностью. Мальчик пускает камень массы m скользить по поверхности льдины от её края. Начальная скорость камня равна скорости льдины и направлена под углом $\alpha = 60^\circ$ к берегу (рис. 10.1).

Мальчик заметил, что когда камень оказался на расстоянии h от ближнего к нему края льдины, скорость камня была минимальной.

- Какое количество теплоты Q выделится за время скольжения камня по поверхности льдины?
- На каком расстоянии s от мальчика, стоящего на берегу реки, будет находиться камень в момент окончания его скольжения по льдине?

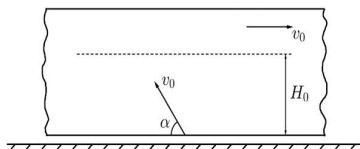


Рис. 10.1

Задание 2. Раздельный вылет Двум одинаковым соприкасающимся шарикам радиуса $r = 5$ см сообщают горизонтальную скорость u . Шарик движется по нижнему колену закреплённой стоящей на боку U-образной трубки (рис. 10.2). Расстояние между осями колен $h = 1,00$ м, они сопряжены по полуокружности, трения в системе нет, зазор между стенками и шариками мал.

При каких значениях скорости u один шарик вылетит из верхнего колена, а другой из нижнего? Ускорение свободного падения g .

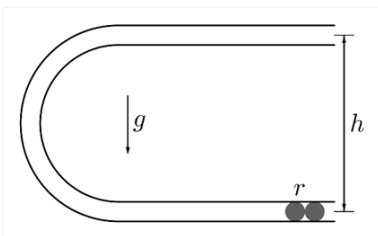


Рис. 10.2

Задание 3. В архиве лорда Кельвина Однажды, разбирая архив лорда Кельвина, теоретик Баг обнаружил график (рис. 10.3) и пояснительную записку из которой следовало, что Кельвин изучал изохорные процессы. От времени чернила выцвели, и координатные оси с графика исчезли, но осталась пометка о последней точке графика, соответствующей давлению $p = 2000$ мм рт. ст. и температуре 127°C . стенками и шариками мал.

Баг понял, что на графике была приведена зависимость давления содержимого сосуда от температуры и что в сосуде кроме воздуха находится ещё какое-то вещество, которое претерпевало фазовый переход. Для выяснения, что же это было за вещество, Баг решил вычислить давление насыщенного пара этого веществ в точке, которую обозначил знаком вопроса.

- Что это было за вещество?
- Чему равно давление и температура в точке, помеченной знаком вопроса. Ответ обоснуйте. Найдите температуру содержимого сосуда в состоянии, когда 30 % всей жидкости, попавшей в сосуд, испарилось.

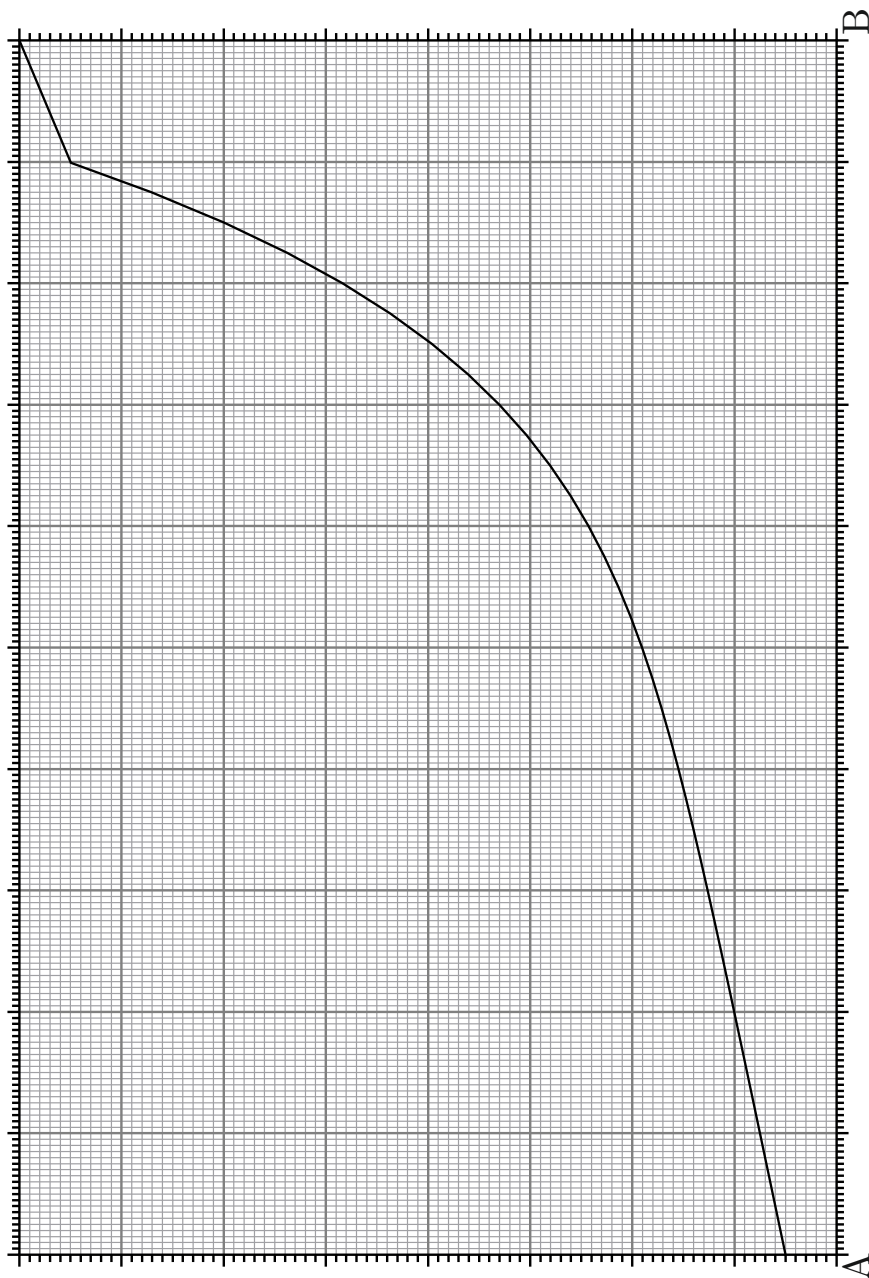


Рис. 10.3

Задание 4. Мостик с диодами и конденсаторами Электрическая цепь (рис. 10.4) составлена из трёх одинаковых конденсаторов ёмкостью $C_1 = C_2 = C_3 = C$, двух одинаковых диодов, двух идеальных амперметров, ключа и регулируемого источника напряжения. Зависимость силы тока через диод от напряжения на нём представлена на рис. 10.5.

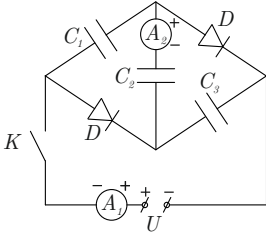


Рис. 10.4

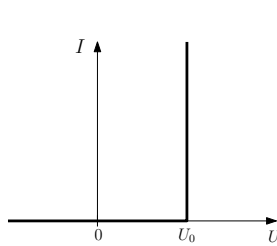


Рис. 10.5

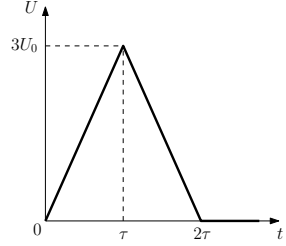


Рис. 10.6

- Пусть напряжение источника постоянно и равно $3U_0$. Сколько теплоты выделится в цепи при замыкании ключа K ?
- Пусть напряжение источника зависит от времени $U = U(t)$ так, как показано на рис. 10.6. Ключ K постоянно замкнут. Определите зависимости от времени $I_1(t)$ и $I_2(t)$ показаний амперметров A_1 и A_2 . Нарисуйте графики зависимости $I_1(t)$ и $I_2(t)$ с указанием значений характерных точек на графике. Полярность источника и полярность подключения амперметров указаны на рис. 10.4. Во всех случаях в начальный момент времени конденсаторы не заряжены.

Задание 5. Ом-м-м... Электрическая цепь (рис. 10.7) собрана из одинаковых омметров и резистора, сопротивление которого $R = 1$ кОм.

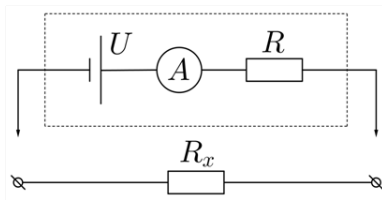


Рис. 10.7

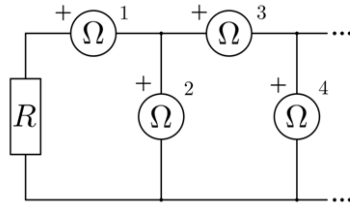


Рис. 10.8

Все омметры включены в цепь так, что у приборов с нечётным номером клемма, помеченная знаком плюс, находится слева, а у чётных — сверху. Определите показания первого, четвёртого и тринадцатого омметров. **Указание:** считайте, что омметр состоит из соединённых последовательно идеального источника постоянного напряжения U , резистора сопротивлением $R = 1$ кОм и идеального амперметра (рис. 10.8). При подключении к омметру исследуемого резистора показания амперметра, встроенного в омметр, автоматически пересчитываются (например, с помощью встроенного микропроцессора) так, что на цифровом табло прибора отображается значение сопротивления исследуемого резистора R_x , подключённого к омметру.

Возможное решение Т-10-1

Перейдём в инерциальную систему отсчёта, в которой льдина неподвижна. В этой системе отсчёта скорость камня $\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_{\text{камя}} - \vec{v}_{\text{льдины}}$. В начальный момент скорость камня относительно льдины $\sqrt{3}v_0$.

Когда скольжение прекратится, скорость камня относительно льдины будет равна нулю. В этой системе отсчёта вся кинетическая энергия камня перейдёт в теплоугу:

$$Q = \frac{3mv_0^2}{2}.$$

Движение камня в системе отсчёта льдины равноускоренное: на камень действует постоянная сила трения скольжения, направленная против относительной скорости. Так как льдина движется равномерно, движение камня равноускоренное и в исходной системе отсчёта. Из треугольника скоростей ($\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$) видим, что скорость минимальна в момент, когда относительная скорость уменьшилась в два раза, так как минимальная скорость перпендикулярна относительной скорости, а треугольник равнобедренный. Таким образом, скорость камня относительно мальчика минимальна через время $t/2$, где t – время движения до остановки.

Для равноускоренного торможения до остановки верно, что за первую половину времени тело проходит $\frac{3}{4}$ пути, поэтому максимальное удаление камня от края льдины $y = \frac{4}{3}h$. Относительно льдины тело переместилось на $L = \frac{y}{\sin 30^\circ} = 2y = \frac{8}{3}h$ в направлении $v_{\text{отн}}$.

Время равноускоренного торможения до остановки можно найти из условия $\frac{4}{3}h = \frac{1}{2}v_0 \cos 30^\circ \cdot t$, получается $t = \frac{16}{3\sqrt{3}} \frac{h}{v_0}$.

Смещение камня по горизонтали составляет $S_x = v_0 t - L_x = \frac{4}{3\sqrt{3}}h$. Смещение относительно мальчика

$$s = \sqrt{S_x^2 + y^2} = \frac{8}{3\sqrt{3}}h.$$

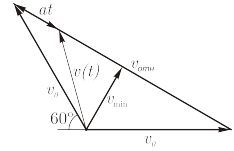


Рис. 10.10

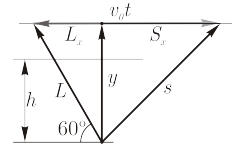


Рис. 10.11

Возможное решение Т-10-2

На изогнутом участке центры шариков движутся по окружности радиуса $R = h/2$. Точка O на рисунке – её центр.

Скатывающая сила – проекция силы тяжести на касательную к траектории центра шарика – в нижней части скругления для переднего шарика больше, чем для заднего. Поэтому шарики не расходятся и давят друг на друга. В верхней части скругления скатывающая сила больше для заднего шарика, он отстаёт от переднего.

Критическое положение, где сила давления шарика на шарик уменьшается до 0, а их контакт исчезает, отвечает равенству скатывающих сил. Это случай, когда точка соприкосновения шариков находится на одной горизонтали с точкой O (правая часть рис.).

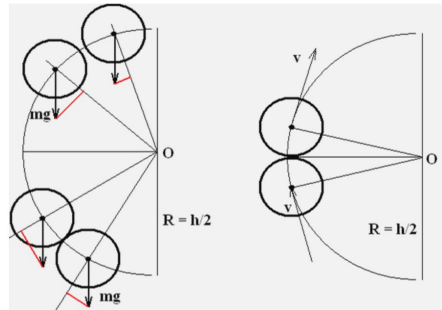


Рис. 10.12

Из сохранения энергии для скорости шариков v в критическом положении получаем: $v^2 = u^2 - 2gR = u^2 - gh$, где u начальная скорость.

Далее шарики движутся раздельно. Центр переднего шарика в критическом положении выше точки O . Передний окажется в верхнем колене, поднявшись на $h/2 - r$ от его положения в критический момент. Из сохранения энергии для его скорости вылета имеем:

$$v_1^2 = v^2 - 2g\left(\frac{h}{2} - r\right) = u^2 - 2g(h - r).$$

Условие, что передний шарик доберётся до верхнего колена и вылетит

$$v_1^2 > 0, \text{ то есть } u^2 > 2g(h - r).$$

Задний шарик не доберётся до верхнего колена и вылетит из нижнего, если его скорость обратится в 0 ещё на участке скругления. Граничный случай нулевая скорость заднего шарика в верхнем колене. Тогда из закона сохранения энергии получим:

$$\frac{2mu_{\max}^2}{2} = 2mgh + \frac{mv_1^2}{2}, \text{ и } u_{\max}^2 = 2g(h + r).$$

Тогда диапазон u задан неравенствами:

$$\begin{aligned} 2g(h + r) > u^2 > 2g(h - r) \\ \text{или} \\ \sqrt{2g(h + r)} > u > \sqrt{2g(h - r)}, \\ 4,58 \text{ м/с} > u > 4,36 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Здесь числа посчитаны для $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Возможное решение Т-10-3

1. Анализируя график выделяем участки кривой:

(0-1) – давление насыщенных паров много меньше давления воздуха, смесь ведёт себя, как идеальный газ;

(1-2) – активный процесс испарения воды;

(2-3) – испарение всей жидкости, и увеличение давления, как у идеального газа.

При изохорическом нагреве давление идеального газа зависит от температуры по следующему закону:

$$P = \frac{\nu RT}{V},$$

следовательно, коэффициент наклона прямой $p(T)$ для идеального пропорционален количеству вещества в единице объема. На участке (2 – 3) коэффициент наклона в два раза больше коэффициента наклона (0 – 1), т. е. при полном испарении количество вещества удвоилось.

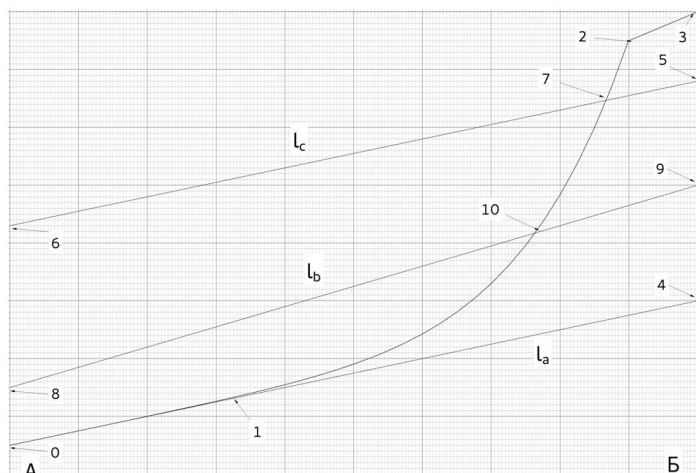


Рис. 10.13

Строим касательную к участку (0 – 1) и она пересекает вертикальную ось в точке (4). Эта касательная l_a показывает зависимость парциального давления воздуха в смеси, и так как при испарении количество вещества удвоилось, то в точке (3) давление в два раза выше, чем в точке (4). С другой стороны между точками (3) и (4) 50 вертикальных делений по 20 торр, т. е. Их разница 1000 торр, и точка (3) имеет значение давления 2000 торр, (4) – 1000 торр, а точка (0) имеет значение 500 торр. Давление в точках *A* и *B* равно 400 торр.

Так как давление в точке (4) в два раза больше давления в точке (0), то температура в точке (4) больше в два раза, чем в точке (0). Это значит, что их разница составляет $T_0 = T_4/2$, а количество маленьких делений по горизонтальной оси 200 дел.

Заметим, что разность между кривой смеси и прямой l_a дает давление насыщенных паров воды. Для воды мы знаем, что давление насыщенных паров при 100°C (373 K) равно атмосферному, т. е. по условию задачи 760 торр, таким образом, необходимо найти, в какой точке давление смеси превышает давление воздуха на 760 торр. Для этого проводим прямую l_c , параллельную прямой l_a и смещенную на 760 торр вверх, т. е. на 38 делений по вертикальной оси, т. е. проходящую через точки (5) и (6). Эта прямая пересечёт кривую смеси в точке (7), температура которой будет составлять 100°C (373 K), и будет отстоять по горизонтальной оси на расстоянии 173 клеточки от точки (0). Таким образом

$$\frac{T_4 - T_0}{200} = \frac{T_0}{200} = \frac{373 - T_0}{173} \Rightarrow T_0 = 200\text{ K} \Rightarrow T_4 = 400\text{ K}.$$

2. Заметим, что нам необходимо найти такую температуру, при которой давление превышает давление воздуха l_a на 40% от давления паров воды, если бы она вся испарилась, но это равно 40% давления самого воздуха. Т.к. в точке (0) давление воздуха равно 500 торр, то 40% - это 200 торр. Смещаемся на 10 делений вверх в точку (8), аналогично находим точку (9). Прямая l_b , проходящая через эти точки, пересечёт кривую смеси в точке (10), температура которой составляет $(80 \pm 1)^\circ\text{C} = (353 \pm 1)\text{ K}$.

Возможное решение Т-10-4

При малых напряжениях источника U диоды закрыты, конденсаторы соединены последовательно и напряжение на каждом из них $\frac{U}{3}$. Напряжения на диодах при этом равны $2\frac{U}{3}$. Если они достигают значения U_0 (т.е. при $U = 3\frac{U_0}{2}$), диоды становятся открытыми, и конденсаторы уже нельзя считать соединенными последовательно.

Пусть U_1, U_2 и U_3 – напряжения на конденсаторах при полярности, указанной на 10.14 (источник не показан).

Тогда справедливы уравнения:

$$\begin{cases} U_1 + U_2 + U_3 = U \\ U_1 + U_2 = U_0 \\ U_2 + U_3 = U_0 \end{cases}$$

Откуда получаем:

$$\begin{cases} U_1 = U_3 = U - U_0 \\ U_2 = 2U_0 - U \end{cases}$$

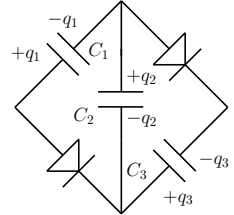


Рис. 10.14

Рассмотрим пункт 1) задачи. При $U = 3U_0$ имеем:

$$\begin{cases} U_1 = U_3 = 2U_0 \\ U_2 = -U_0 \end{cases}$$

(полярность 2 противоположна указанной на рисунке). Через диоды прошли заряды

$$q_D = -q_2 + q_3 = CU_0 + 2CU_0 = 3CU_0,$$

при этом

$$q_1 = CU_1 = 2CU_0.$$

Значит, через источник прошел заряд

$$q_{ист} = q_1 + q_D = 5CU_0,$$

работа источника

$$A_{ист} = q_{ист}U = 15CU_0^2.$$

Энергия W_C конденсаторов при этом

$$W_C = 2\frac{C(2U_0)^2}{2} + \frac{CU_0^2}{2} = 4,5CU_0^2.$$

Тогда количество выделившегося тепла

$$Q = A_{ист} - W_C = 10,5CU_0^2.$$

Перейдем к пункту 2). До момента времени $t = \tau/2$, пока $U \leq 3U_0/2$, напряжение на диодах меньше U_0 , а напряжения на конденсаторах равны $U/3$. При этом токи через амперметры

$$I_1 = I_2 = \frac{\Delta q_1}{\Delta t} = C \frac{\Delta U_1}{\Delta t} = \frac{CU_0}{\tau}$$

При $t = \tau/2$ через диоды начинает течь ток, а напряжения на конденсаторах

$$\begin{cases} U_1 = U_3 = U - U_0 \\ U_2 = 2U_0 - U \end{cases}$$

При этом токи через амперметры

$$I_2 = \frac{\Delta q_2}{\Delta t} = C \frac{\Delta(2U_0 - U)}{\Delta t} = -CC \frac{\Delta U}{\Delta t} = -\frac{3CU_0}{\tau},$$

$$I_1 = \frac{\Delta q_2}{\Delta t} + \frac{\Delta q_D}{\Delta t} = \frac{\Delta q_3}{\Delta t} - \frac{\Delta q_2}{\Delta t} = 2C \frac{\Delta U}{\Delta t} + C \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{9CU_0}{\tau}.$$

При уменьшении напряжения в интервале времени от τ до 2τ ток через диоды не течет, напряжение на конденсаторах изменяется на одну и ту же величину

$$\Delta U_1 = \Delta U_2 = \Delta U_3 = -\frac{\Delta U}{3}.$$

При этом, с учетом знака напряжения U_2 , модуль U_2 возрастает. Ток тогда

$$I_1 = I_2 = \frac{\Delta q_1}{\Delta t} = C \frac{\Delta U_1}{\Delta t} = \frac{C \Delta U}{3 \Delta t} = -\frac{CU_0}{\tau}.$$

Графики зависимостей $I_1(t)$, $I_2(t)$ выглядят так:

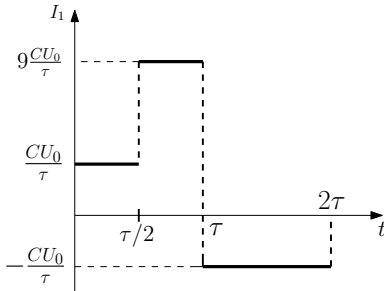


Рис. 10.15

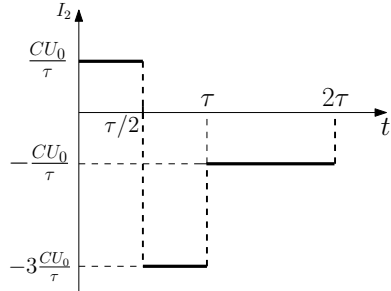


Рис. 10.16

Возможное решение Т-10-5

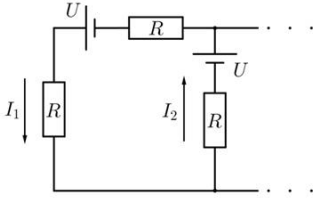


Рис. 10.17

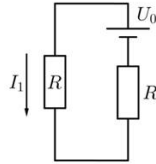


Рис. 10.18

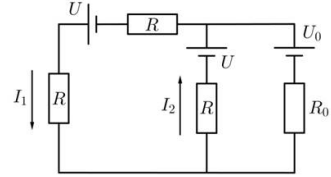


Рис. 10.19

Всю цепь омметров (рис. 10.17) можно эквивалентно (без изменения тока через резистор R) заменить идеальным источником напряжения U_0 и резистором сопротивления R_0 (рис. 10.18). Поскольку число звеньев бесконечно, то значения U_0 и R_0 не зависят от номера звена, начиная с которого производится замена. Тогда эта же схема эквивалентна приведенной на рис. 10.19. Для нахождения U_0 и R_0 воспользуемся формулами последовательного и параллельного соединения источников:

$$U_0 = U + \left(\frac{U}{R} + \frac{U_0}{R_0} \right) \frac{RR_0}{R + R_0},$$

$$R_0 = \frac{RR_0}{R + R_0} + R.$$

Отсюда находим:

$$U_0 = \frac{(3 + \sqrt{5})U}{2}, \quad R_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}R.$$

Тогда сила тока, протекающего через внешний резистор,

$$I_1 = \frac{U_0}{R_0 + R} - \frac{U(3 + \sqrt{5})}{2(R + R\frac{1+\sqrt{5}}{2})} = \frac{U}{R}.$$

Показание первого омметра

$$R_1 = \frac{U}{I_1} - R = 0.$$

Показание второго омметра находим, применив закон Кирхгофа для контура с внешним резистором и первыми двумя омметрами

$$2U = 2I_1R + I_2R.$$

Тогда

$$I_2R = 2(U - I_1R) = 0.$$

Оказывается, что сила тока I_2 , текущего через второй омметр равна нулю. Следовательно,

$$R_2 = \frac{U}{0} - R = \infty.$$

В следующих ветвях все повторяется. Нечетные омметры показывают ноль, четные – бесконечность, поэтому $R_1 = R_{13} = 0, R_4 = \infty$.

11 класс

Задача 1. Слинки Пружину «слинки» удерживают за верхний виток так, что ее нижний виток находится на высоте $h = 1$ м над уровнем пола, а длина самой пружины, растянутой силой собственного веса, равна $l = 1,5$ м. Пружину отпускают. Через какое время τ она упадет на пол? В нерастянутом состоянии витки пружины плотно прилегают друг к другу, не оказывая при этом давления друг на друга, а длина пружины составляет $l_0 = 6$ см. Витки тонкие. При схлопывании пружины витки между собой соударяются неупруго, и к моменту падения она успевает схлопнуться. Ответ дать с точностью 0,02 с.



Задача 2. Я тучка, тучка, тучка... В приближении адиабатической атмосферы оцените:

1. высоту H атмосферы Земли;
2. высоту h_0 нижней кромки облаков;

Температура на поверхности Земли $t_0 = 27^\circ\text{C}$, а относительная влажность воздуха $\varphi = 80\%$. Считайте, что $h_0 \ll H$.

Указание: Адиабатической называется атмосфера, в которой порции газа, перемещаясь по вертикали без теплообмена, все время остаются в механическом равновесии. Рис. 11.1

Таблица 11.1

Зависимость давления насыщенного водяного пара от температуры

$t, ^\circ\text{C}$	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
P_H , мм.рт.ст.	7,01	8,05	9,21	10,5	12,0	13,6	15,5	17,5	19,8	22,4	25,2	28,4	31,8

Примечание: Воздух считать идеальным двухатомным газом с молярной массой $\mu = 29$ г/моль

Задача 3. Бусинка Заряд Q равномерно распределен по поверхности диэлектрической тонкостенной закрепленной трубы радиуса R и длиной H . Бусинка с тем же по знаку зарядом может свободно скользить по тонкой непроводящей спице, совпадающей с диаметром серединного (равноудаленного от торцов) сечения.

Найдите период T малых колебаний бусинки относительно положения равновесия. Удельный заряд бусинки $\gamma = q/m$ считайте известным.

Задача 4. И снова МГД Модель морского магнитогидродинамического двигателя, установленного под днищем катера (рис. 11.2) представляет собой прямоугольный канал ($a = 1,0$ м, $l = 2$ м, $h = 10$ см). К хорошо проводящим плоскостям hl подключен идеальный источник постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E} = 100$ В. Магнитное поле $B = 1$ Тл пронизывает канал перпендикулярно непроводящим плоскостям al . При движении катера с таким двигателем с постоянной скоростью u скорость вытекающей относительно катера воды $v = 10$ м/с.

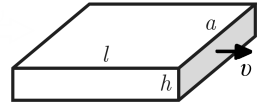


Рис. 11.2

Удельное сопротивление морской воды $\rho = 1,0 \cdot 10^{-2}$ Ом · м, ее плотность $\rho_{\text{в}} = 1000$ кг/м³.

Найдите скорость движения катера, силу тяги, полезную мощность и КПД двигателя.

Задача 5. Лунное затмение Как известно, Солнце не является точечным источником света, а имеет малый угловой диаметр (при наблюдении с Земли) $2\delta = 0,52^\circ$. Этот факт приводит к тому, что область полной тени за Землей оказывается конечной.

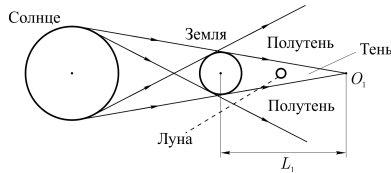


Рис. 11.3

1. Пусть рефракция (явление преломления солнечных лучей в земной атмосфере) отсутствует. На каком расстоянии L_1 от Земли еще будет наблюдаться полная тень? Найдите продолжительность полного лунного затмения в этом случае.
2. В действительности рефракция оказывает существенное влияние на размер области полной тени. Пусть атмосфера Земли имеет приведенную высоту $h = 8$ км и средний показатель преломления $n = 1,00028$.

Полагая, что границу тени образуют лучи, идущие по касательной к поверхности Земли, определите на каком максимальном расстоянии L_2 теперь будет наблюдаться полная тень? Какая часть площади лунного диска окажется затенена?

Радиус Земли $R = 6400$ км, ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с², угловой диаметр Луны равен угловому диаметру Солнца 2δ , период обращения Луны вокруг Земли $T_0 = 27,3$ сут.

Возможное решение Т-11-1

По теореме о движении центра масс время падения пружинки - это время падения тела с высоты $H = h + h_c$, где h_c - высота центра масс относительно положения нижнего витка висящей пружины. Найдем эту высоту. Пусть жесткость одного витка пружины k , его масса m , число витков в пружине N . Тогда из условия равновесия для i -ого витка получаем:

$$k\Delta x_i = (i - 1)mg \quad (11.1)$$

Координата i -ого витка равна

$$x_i = \sum_1^i \Delta x_i = \frac{mgi(i-1)}{2k} \quad (11.2)$$

Тогда, с учетом того, что число витков $N \gg 1$, получаем:

$$l = x_N = \frac{mgN(N-1)}{2k} \approx \frac{mgN^2}{2k} \quad (11.3)$$

Вычислим координату центра масс:

$$h_c = \frac{1}{mN} \sum_1^N mx_i = \frac{1}{N} \sum_1^N \frac{mgi(i-1)}{2k} = \frac{1}{N} \left(\frac{mgN^3}{6k} + O(N^2) \right) \approx \frac{mgN^2}{6k} = \frac{l}{3} \quad (11.4)$$

Время падения пружины

$$\tau = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2(h + \frac{l}{3})}{g}} \approx 0.55c \quad (11.5)$$

Если учесть длину пружины в сжатом состоянии, то поправка на положение центра масс не превысит l_0 , а поправка на время падения, соответственно, составит

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} \approx \frac{1}{2} \frac{\Delta H}{H} \approx \frac{l_0}{2(h + \frac{l}{3})} \approx 2\% \Rightarrow \Delta\tau = 0.01c \quad (11.6)$$

Возможное решение Т-11-2

Рассмотрим перемещение порции одного моля воздуха в атмосфере. В адиабатическом приближении по закону сохранения энергии работа внешнего по отношению к выделенной порции воздуха давления расходуется на изменение внутренней U и потенциальной μgz . Тогда:

$$P_1V_1 - P_2V_2 = U_2 - U_1 + \mu g(z_2 - z_1) \quad (11.1)$$

Перегруппировав слагаемые, получаем:

$$c_p \Delta T = -\mu g \Delta z \quad (11.2)$$

Отсюда получаем зависимость температуры от высоты

$$T = T_0 - \frac{\mu g}{c_p} z = T_0 - \frac{2\mu g}{7R} z \quad (11.3)$$

Высоту атмосферы можно оценить по высоте, при которой температура воздуха обращается в абсолютный ноль:

$$H \approx \frac{7RT_0}{2\mu g} \approx 30 \text{ км} \quad (11.4)$$

Нижняя кромка облаков образуется в точке росы, то есть на такой высоте h_0 , при которой парциальное давление водяного пара сравнивается с давлением насыщенного пара $P(z)$, учитывая, что на поверхности Земли давление пара $P_0 = \varphi P_H(T_0)$.

По законам гидростатики парциальное давление водяного пара с высотой изменяется по закону:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (11.5)$$

Так как $h_0 \ll H$, то можно считать изменения температуры и давления воздуха малыми, поэтому его плотность практически постоянна и равна $\rho \approx P_0 \mu_{H_2O} / RT_0$. Тогда давление изменяется по линейному закону:

$$\frac{P(z)}{P_H(T_0)} \approx \frac{P_0}{P_H(T_0)} - \frac{\rho g z}{P_H(T_0)} = \varphi \left(1 - \frac{\mu_{H_2O} g z}{RT_0} \right) \quad (11.6)$$

Используя таблицу зависимости давления насыщенного пара от температуры и зная зависимость температуры от высоты, построим график зависимости давления насыщенного пара от высоты $P_H(z)/P_H(T_0)$. На этой же координатной плоскости построим график зависимости парциального давления водяного пара $P(z)/P_H(T_0)$. Абсцисса точки пересечения этих графиков и будет искомой высотой.

Из графиков получаем, что $h_0 \approx 0.43$ км. Заметим, что на этой высоте парциальное давление паров понизилось примерно на 6% по сравнению с давлением у поверхности Земли, а температура - менее, чем на 2%, что вполне оправдывает наши приближения.

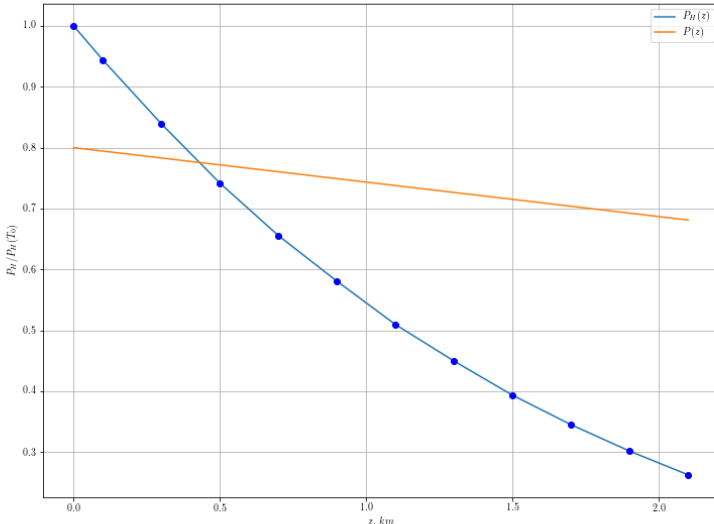


Рис. 11.4
Зависимость давления от высоты

Альтернативное решение Выделим полубесконечный цилиндр воздуха сечением S . Рассмотрим небольшую порцию на высоте от z до $z + dz$. Запишем условие равновесия для этой порции:

$$P(z)S = P(z + dz)S + g\rho Sdz \Rightarrow dP = -\rho g dz \quad (11.1)$$

Из уравнения Менделеева-Клапейрона, уравнения Пуассона в форме $\rho^{1-\gamma}T = const$ и с учетом (1) получаем:

$$\frac{7}{2}RdT = -\mu g dz \quad (11.2)$$

Проинтегрировав, получаем зависимость температуры воздуха от высоты:

$$T = T_0 - \frac{2\mu g}{7R}z \quad (11.3)$$

Дальнейшее решение полностью совпадает с основным

Примечание: Можно находить зависимость давления от высоты так же через уравнение Пуассона, а затем делать оценку, приравнивая нулю давление на высоте H . Зависимость $P(z)$ при этом получается следующая:

$$P(z) = P(0) \left(1 - \frac{2\mu g}{7RT_0}z\right)^{\frac{7}{\gamma-1}}$$

Возможное решение Т-11-3

Для определения зависимости $E_r(r)$ вблизи положения равновесия воспользуемся теоремой Гаусса: поток вектора \vec{E} через поверхность соосного с заряженным небольшим цилиндра (радиус основания r , высота $2x$ ($x \ll r \ll R, H$)) равен нулю. Для начала найдем $E_x(x)$. Это поле однородно заряженного кольца высотой $2x$, лежащего на дальнем от текущей точки крае цилиндра. Заряд кольца $2xQ/H$. Расстояние до точки наблюдения $L \approx \sqrt{R^2 + H^2/4}$. Тогда поле кольца на оси:

$$E_x(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{H} 2x \cdot \frac{1}{L^2} \cdot \frac{H}{2L} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L^3} x.$$

Вычислим величины потоков: $\Phi_{\text{осн}}$ через основание и $\Phi_{\text{бок}}$ через боковую поверхность гауссова цилиндра:

$$\Phi_{\text{осн}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L^3} x \cdot \pi r^2, \quad \Phi_{\text{бок}} = 2\pi r \cdot 2x \cdot E_r(r).$$

По теореме Гаусса $2\Phi_{\text{осн}} + \Phi_{\text{бок}} = 0$, значит

$$2\pi r \cdot 2x \cdot E_r(r) = -2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L^3} x \cdot \pi r^2.$$

Отсюда получаем, что в плоскости кольца при смещении r из центра величина вектора напряженности пропорциональна смещению

$$E_r(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2L^3} r.$$

Уравнение движения бусинки:

$$m\ddot{r} = qE_r(r) = -q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2L^3} r.$$

Частота гармонических колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{m} \frac{Q}{2L^3}} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma Q}{2L}},$$

Период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\sqrt{2}\pi L \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 L}{\gamma Q}}.$$

Возможное решение Т-11-4

Возможное решение 1. Энергетический метод. Перейдем в систему отсчета, в которой катер покоится. В этой системе отсчета скорость движения воды, которая находится далеко от катера равна u , а скорость вытекающей из двигателя воды v . Запишем закон сохранения энергии для воды, которая прошла через канал:

$$\frac{\rho_B u^2}{2} + jBl = \frac{\rho_B v^2}{2}, \quad (11.1)$$

где $j = I/(hl)$ - плотность тока, текущего поперек канала.

В канале возникает ЭДС индукции, направленная против ЭДС источника, поэтому полный поперечный ток равен

$$I = \frac{\mathcal{E} - vBa}{R} = \frac{lh}{\rho a} (\mathcal{E} - vBa) \quad (11.2)$$

Подставляя (2) в (1) получим:

$$u = \sqrt{v^2 - \frac{2Bl}{\rho\rho_B a} (\mathcal{E} - vBa)} = 8 \text{ м/с.}$$

Сила тяги двигателя равна изменению импульса воды, прошедшей через канал:

$$T = \frac{\Delta m}{\Delta t} (v - u) = \rho_B a h v (v - u) = 2 \text{ кН.}$$

Полезная мощность:

$$P_{\text{пол}} = Tu = 16 \text{ кВт.}$$

Коэффициент полезного действия:

$$\eta = \frac{P_{\text{пол}}}{\mathcal{E}I} = \frac{\rho T u a}{lh\mathcal{E}(\mathcal{E} - vBa)} \approx 9\%.$$

Возможное решение 2. Динамический метод. В канале возникает ЭДС индукции, направленная против ЭДС источника. Полный поперечный ток равен

$$I = \frac{\mathcal{E} - vBa}{R} = \frac{lh}{\rho a}(\mathcal{E} - vBa)$$

Сила тяги равна действующей на этот ток силе Ампера:

$$T = F_A = I Ba = \frac{lhB}{\rho}(\mathcal{E} - vBa) = 1.8 \text{ кН.} \quad (11.3)$$

С другой стороны, сила тяги двигателя равна изменению импульса воды, прошедшей через канал за единицу времени:

$$T = \frac{\Delta m}{\Delta t}(v - u) = \rho_B a h v (v - u). \quad (11.4)$$

Приравнивая (1) и (2) получим:

$$u = v - \frac{T}{\rho_B a h v} = \frac{lB}{\rho \rho_B a v}(\mathcal{E} - vBa) = 8,2 \text{ м/с.}$$

Полезная мощность:

$$P_{\text{пол}} = Tu = 14,76 \text{ кВт.}$$

Коэффициент полезного действия:

$$\eta = \frac{P_{\text{пол}}}{\mathcal{E}I} = \frac{\rho T u a}{lh \mathcal{E}(\mathcal{E} - vBa)} \approx 8,2\%.$$

Примечание к динамическому методу. Использованное в этом решении положение $T = F_A$ в действительности равносильно не вполне корректному использованию закона сохранения импульса. В самом деле, если поток воды через канал с расходом $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho a h v$ на большом расстоянии от катера (в СО, связанной с катером) имеет эффективную площадь сечения S такую, что $u \cdot S = v a h$, т.е. $S = a h \frac{v}{u}$. Тогда импульс, проходящий за время Δt через S ($\rho u S \Delta t$) $\cdot u$, увеличивается за счет импульса силы Ампера $I B a \Delta t$, и конечный импульс $\rho a h v \Delta t v = (\rho u \frac{v}{u} a h \Delta t) u + I B a \Delta t$, и $v^2 = v u + \frac{I B}{\rho h} \Rightarrow u = v - \frac{I B}{\rho h v}$, — ровно то же значение, что получено при $T = F_A$. Но в таком рассуждении не учитывается изменение импульса тех масс воды, которые не проходят через канал, а в них из-за увеличения площади сечения скорость становится меньше u , т.е. часть импульса «теряется» (ясно, что есть градиент давления в потоке и система, к которой мы в альтернативном решении применяем закон сохранения импульса, незамкнута).

Возможное решение Т-11-5

1. В отсутствие рефракции лучи сходятся под тем же углом, под которым Солнце видно с Земли, то есть 2δ , поэтому $L_1 = R/\delta \approx 1,4 \cdot 10^6$ км. Из второго закона Ньютона для движения Луны по орбите радиуса R_0 с угловой скоростью ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{GM_3}{R_0^3}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R_0^3}}, \quad \text{откуда} \quad R_0 = \sqrt[3]{\frac{gT_0^2 R^2}{4\pi^2}} \approx 384 \text{ тыс. км.}$$

Отсюда находим диаметр Луны $D = 2\delta R_0 \approx 3,45 \cdot 10^3$ км, а также диаметр темного пятна на уровне Луны (Рис. 2):

$$D_1 = 2R \left(1 - \frac{R_0}{L_1}\right) \approx 9,3 \cdot 10^3.$$

Тогда продолжительность полного лунного затмения:

$$T = \frac{D_1 - D_2}{\omega_0 R_0} = T_0 \frac{D_1 - D_2}{2\pi R_0} \approx 1,6 \text{ ч}$$

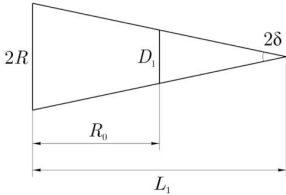


Рис. 11.5

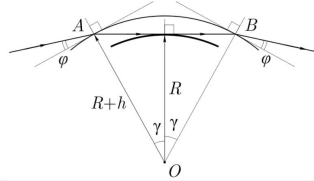


Рис. 11.6

2. Запишем закон Снелла при преломлении луча на границе с атмосферой:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = n \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right).$$

Учитывая, что $n = 1 + \Delta n$, где $\Delta n = 2,8 \cdot 10^{-4} \ll 1$, а также используя приближение малых углов, перепишем формулу в виде

$$1 - \frac{\varphi^2}{2} = (1 + \Delta n) \left(1 - \frac{\gamma^2}{2}\right).$$

Раскроем скобки, пренебрегая слагаемым третьего порядка малости: $(\gamma^2 - \varphi^2)/2 = \Delta n$, что можно приближённо записать как $\gamma(\gamma - \varphi) = \Delta n$, откуда находим угол отклонения луча:

$$\Delta\varphi = \gamma - \varphi = \frac{\Delta n}{\gamma}.$$

Как видно из рис. 11.6, $\cos \gamma = R/(R+h)$, откуда:

$$\gamma \approx \sin \gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{R}{R+h}\right)^2} \approx \frac{\sqrt{2Rh}}{R+h} \approx \sqrt{\frac{2h}{R}}.$$

Луч претерпевает два одинаковых отклонения: при входе в атмосферу и при выходе из неё, поэтому результирующий угол будет равен $2\Delta\varphi$. Таким образом, в условиях рефракции угол ψ , под которым сходятся солнечные лучи, оказывается равным $\psi = 2\delta + 4\varphi$.

Окончательно получим:

$$L_2 = \frac{2R}{2\delta + 4\Delta\varphi} = \frac{R}{\delta + \Delta n \sqrt{2R/h}} \approx 408 \text{ тыс. км.}$$

Отсюда находим диаметр тёмного пятна на луне

$$D_2 = 2R \left(1 - \frac{R_0}{L_2}\right) \approx 753 \text{ км}$$

и искомое отношение площадей $\varepsilon = (D_2/D)^2 \approx 4,8\%$.