Задача 1. Сколько весит «талант». (Фольклор). У древних шумеров (народ, заселявший более 4 тысяч лет тому назад междуречье Тигра и Евфрата) максимальной единицей массы был «талант». В одном таланте содержится 60 мин. Масса одной мины равна 60 сиклям. Масса одного сикля равна $8\frac{1}{3}$ г. Сколько килограммов содержит один талант? Ответ обоснуйте.

Возможное решение. Масса одной мины

$$1\text{ мин} = 60\,\text{сиклей}\cdot 8\frac{1}{3}\,\text{г/сикль} = 500\text{ г} = 0{,}5\text{ кг}. \qquad (1)$$

Масса одного таланта

$$60\,\text{мин}\cdot 0{,}5\,\text{кг/мин} = 30\text{ кг}. \qquad (2)$$

***Критерии оценивания*.**

Вычислена масса одной мины	5 баллов
Вычислена масса одного таланта	5 баллов

Задача 2. Остановки. (Черкасова Е.). Расстояние $L = 63$ км от Москвы до Сергиева Посада электричка преодолевает за время $T = 1$ час 10 мин, совершая N промежуточных остановок. На пути следования между любыми двумя соседними платформами (от момента начала движения до остановки) электричка движется со средней скоростью $\upsilon_1 = 60$ км/ч. Продолжительность одной остановки $\Delta t = 1$ минута. Сколько остановок делает электричка?

Возможное решение. При решении задачи удобно время выражать в минутах. Время, за которое электричка доезжает от Москвы до Сергиева Посада:

$$T = 60 \text{ мин} + 10 \text{ мин} = 70 \text{ мин}. \qquad (1)$$

Средняя скорость электрички, выраженная в км/мин

$$\upsilon_1 = 60 \text{ км/ч} = 1 \text{ км/мин}. \qquad (2)$$

Время движения электрички (без учёта времени на остановки)

$$\tau = \frac{L}{\upsilon_1} = \frac{63 \text{ км}}{1 \text{ км/мин}} = 63 \text{ минуты}. \qquad (3)$$

Время, затраченное на остановки:

$$\Delta T = T - \tau = 7 \text{ минут}. \qquad (4)$$

Таким образом, искомое число остановок

$$N = \frac{\Delta T}{\Delta t} = 7. \qquad (5)$$

***Критерии оценивания*.**

(1)	Выразили время T в минутах	1 балл
(2)	Выразили скорость электрички υ_1 в км/мин	1 балл
(3)	Нашли время τ движения электрички	4 балла
(4)	Вычислили время ΔT	3 балла
(5)	Нашли число остановок	1 балл

Задача 3. Дырявый кубик. (Фольклор).

Два кубика (малый и большой) изготовили из одного и того же материала. Кубик с длиной ребра a имеет массу m. Через середины противоположных граней большого кубика, длина ребра которого равна $3a$, проделали три сквозных квадратных отверстия с площадью сечения $(a \cdot a)$ (рис. 1). Оси отверстий перпендикулярны друг дружке. Какова масса M_K дырявого кубика?

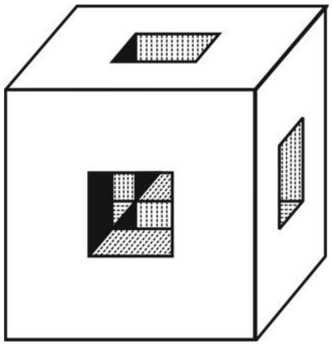


Рис. 1

Возможное решение. Исходная масса большого кубика

$$M = m\frac{(3a)^3}{a^3} = 27m. \qquad (1)$$

После изготовления первого отверстия масса кубика уменьшилась на

$$\Delta M_1 = 3m. \qquad (2)$$

После изготовления второго отверстия масса кубика уменьшилась на

$$\Delta M_2 = 2m. \qquad (3)$$

После изготовления третьего отверстия масса кубика уменьшилась на

$$\Delta M_3 = 2m. \qquad (4)$$

Конечная масса кубика стала равной

$$M_K = M - (\Delta M_1 + \Delta M_2 + \Delta M_3) = 20m. \qquad (5)$$

Критерии оценивания.

(1)	Вычислена масса большого кубика	3 балла
(2)	Вычислена масса материала, извлечённого из первого отверстия	1 балл
(3)	Вычислена масса дерева из второго отверстия	2 балла
(4)	Вычислена масса дерева из третьего отверстия	2 балла
(5)	Найдена масса дырявого кубика M_K	2 балла

Задача 4. Всплывающий стакан. (Кармазин С.В.).

В прямоугольном сосуде квадратного сечения (расстояние между стенками сосуда $a = 6$ см) плавает в вертикальном положении тонкостенный стакан квадратного сечения с толстым дном (длина внешней стороны квадрата $b = 4$ см). В пространство между стенками сосуда и стакана тонкой струйкой начинают наливать воду (рис. 2) так, что за каждую секунду в сосуд поступает $\mu = 2{,}7$ граммов. С какой скоростью υ будет всплывать стакан? Плотность воды ρ=1000 кг/м^3.

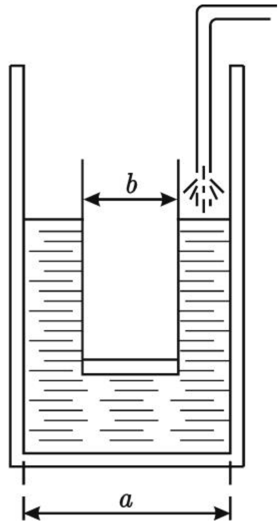


Рис. 2

Возможное решение. Объем воды, ежесекундно поступающей в сосуд,

$$V_1 = \frac{\mu}{\rho} = 2{,}7 \text{ см}^3/\text{с}. \qquad (1)$$

Скорость подъема воды в цилиндре

$$\upsilon_1 = \frac{V_1}{a^2} = \frac{2{,}7}{36}\frac{\text{см}}{\text{с}} = 0{,}075\frac{\text{см}}{\text{с}} = 0{,}75\frac{\text{мм}}{\text{с}}. \qquad (2)$$

Стакан всплывает с такой же скоростью, с какой поднимается вода в сосуде:

$$\upsilon = \upsilon_1 = 0{,}75\frac{\text{мм}}{\text{с}}. \qquad (3)$$

Примечание. Для решения задачи знание размера b не требуется.

Критерии оценивания.

(1)	Вычислен секундный расход воды V_1	3 балла
(2)	Вычислена скорость подъема воды в сосуде	4 балла
(3)	Указано, с какой скоростью всплывает стакан	3 балла

Задача 1. Хорошая и плохая дорога. (Фольклор). Расстояние L = 120 км автомобиль проехал за время $T = 2$ часа. Его скорость на первом, хорошем участке пути, была на $\Delta\upsilon = 5$км/час больше средней скорости, а на втором, плохом участке, на $\Delta\upsilon = 5$ км/час меньше средней скорости. Какова длина *x* хорошего участка пути?

Возможное решение. Средняя скорость автомобиля

$$\upsilon_{Cp} = \frac{L}{T} = 60 \text{ км/час.} \qquad (1)$$

Скорость автомобиля на первом участке пути

$$\upsilon_1 = \upsilon_{Cp} + \Delta\upsilon = 65 \text{ км/час.} \qquad (2)$$

Скорость автомобиля на втором участке пути

$$\upsilon_1 = \upsilon_{Cp} - \Delta\upsilon = 55 \text{ км/час.} \qquad (3)$$

Пусть на преодоление первого участка пути потребовалось время t_1.
Тогда, на преодоление второго участка потребуется время

$$t_2 = T - t_1. \qquad (4)$$

Длина первого участка пути

$$L_1 = \upsilon_1 t_1. \qquad (5)$$

Длина второго участка пути

$$L_2 = \upsilon_2 t_2. \qquad (6)$$

Поскольку

$$L = L_1 + L_2, \qquad (7)$$

это равенство можно, после соответствующих подстановок, привести к виду:

$$L = \upsilon_1 t_1 + \upsilon_2 (T - t_1) = \upsilon_2 T + (\upsilon_1 - \upsilon_2) t_1. \qquad (8)$$

Время

$$t_1 = \frac{L - \upsilon_2 T}{2\Delta\upsilon} = 1 \text{ час.} \qquad (9)$$

Искомая длина

$$x = L_1 = \upsilon_1 t_1 = 65 \text{ км.} \qquad (10)$$

Критерии оценивания.

(1)	Найдена средняя скорость автомобиля	1 балл
(2)	Найдена скорость автомобиля на первом участке пути	1 балл
(3)	Найдена скорость автомобиля на втором участке пути	1 балл
(4)	Записана связь между t_1 и t_2	1 балл
(5)	Выражение для длины первого участка пути	1 балл
(6)	Выражение для длины второго участка пути	1 балл
(7)	Записана связь между L_1 и L_2	1 балл
(8)	Записано уравнение для нахождения числового значения t_1	1 балл
(9)	Найдено время t_1	1 балл
(10)	Найдена длина *x*	1 балл

Задача 2. Система блоков. (Замятнин М.). Благодаря механизму, состоящему из лёгких подвижных и неподвижных блоков (рис. 1), соединённых лёгким тросом, можно силой $F = 50$ Н удерживать груз массой $m = 40$ кг. Сколько подвижных и неподвижных блоков необходимо для удержания груза? Как устроен такой механизм? Изобразите схему соединения блоков с грузом. Ускорение свободного падения $g = 10$ Н/кг.

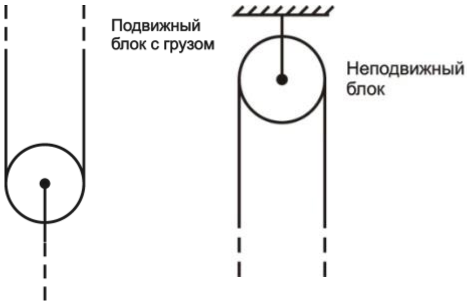


Рис. 1

Возможное решение.

Вес груза $P = mg = 400$ Н. (1)

Система блоков должна дать выигрыш в силе в

$P/F = 8$ раз. (2)

Подвижный блок даёт выигрыш в силе в два раза. (3)

Таким образом, можно использовать четыре подвижных блока, обеспечивающих нужный выигрыш в силе, и ещё три неподвижных блока, для связи подвижных блоков. (4)

Другой способ соединения блоков заключается в следующем: каждый последующий подвижный блок удерживает предыдущий. В этом случае неподвижные блоки не требуются.

Схема соединения блоков в последнем из рассмотренных случаев приведена на рис. 2.

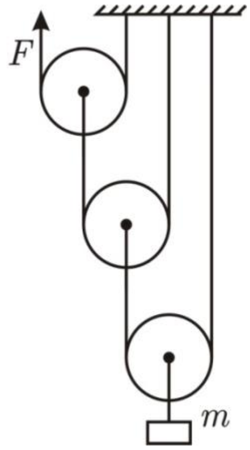


Рис. 2

Критерии оценивания.

(1)	Найден вес груза	1 балл
(2)	Вычислен требуемый выигрыш в силе	1 балл
(3)	Преимущество в силе, которое даёт подвижный блок	1 балл
(4)	Определено количество подвижных блоков	3 балла
(5)	Предложена схема соединений блоков	4 балла

Примечание: За любое правильное решение задачи (независимо от числа использованных блоков) ставится полный балл.

Задача 3. Плавление льда. (Фольклор). В пенопластовом стакане с крышкой лежит лёд. Его температура $t_Л = 0^oC$. В стакан налили такое же количество (по массе) воды, температура которой $t_В = 20^oC$. Сколько процентов льда от первоначального количества осталось в стакане к моменту установления теплового равновесия (выравнивания температуры воды и льда)? Удельная теплоемкость воды $C_В = 4{,}2$ кДж/(кг·ºС), удельная теплота плавления льда $L = 330$ кДж/кг.

Возможное решение. К моменту установления теплового равновесия температура воды понизится до $t_Л = 0^oC$. (1)

Запишем уравнение теплового баланса:

$$m_В C_В (t_В - t_Л) = \Delta m_Л L . \qquad (2)$$

где $\Delta m_Л$ - масса расплавившегося льда.

Масса расплавившегося льда в стакане (с учётом того, что вначале $M_Л = m_В$)

$$\Delta m_Л = m_В\left(\frac{C_В(t_В - t_Л)}{L}\right). \qquad (3)$$

Масса оставшегося в стакане льда

$$m_Л = M_Л - \Delta m_Л = m_В\left(1 - \frac{C_В(t_В - t_Л)}{L}\right). \qquad (4)$$

Доля оставшегося льда

$$\frac{m_Л}{m_В}100\% = \left(1 - \frac{C_В(t_В - t_Л)}{L}\right)100\% = 74{,}5\% \qquad (5)$$

***Критерии оценивания*.**

(1)	Отмечено, что конечная температура смеси равна 0ºС	1 балл
(2)	Записано уравнение теплового баланса	3 балла
(3)	Получено выражение для массы расплавившегося льда	2 балла
(4)	Получено выражение для массы оставшегося льда	2 балла
(5)	Найдена доля оставшегося льда (в %)	2 балла

Задача 4. Скорость подъема воды. (Кармазин С.). В воду, налитую в стеклянный цилиндрический сосуд квадратного сечения (длина внутренней стороны квадрата $a = 10$ см) опускают (относительно цилиндра) с постоянной скоростью $\upsilon_0 = 8$ мм/с стержень квадратного сечения (длина внешней стороны квадрата $b = 6$ см) (рис. 3). С какой скоростью υ_1 поднимается вода в цилиндре?

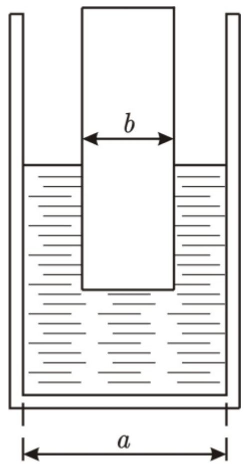


Рис. 3

Возможное решение. Пусть за время t_0 стержень переместился в сторону дна цилиндра на расстояние h_0. При этом он вытеснил объем воды

$$V_0 = h_0 b^2. \qquad (1)$$

Вытесненная вода поднялась выше исходного уровня на высоту h_1. Эту высоту найдём из условия:

$$V_0 = h_1(a^2 - b^2).$$

Таким образом

$$h_1 = h_0 \frac{b^2}{a^2 - b^2}. \qquad (2)$$

Искомая скорость подъема воды

$$\upsilon_1 = \frac{h_1}{t_0} = \left(\frac{h_0}{t_0}\right)\frac{b^2}{a^2 - b^2} = \upsilon_0 \frac{b^2}{a^2 - b^2}. \qquad (3)$$

После числовой подстановки получим

$$\upsilon_1 = \frac{8 \cdot 36}{64} = 4{,}5 \text{ мм/с}. \qquad (4)$$

Критерии оценивания.

(1)	Найден объем воды, вытесняемой за время t_0	2 балла
(2)	Высота h_1 на которую поднялась вытесненная вода	3 балла
(3)	Приведено выражение для определения скорости подъема воды	3 балла
(4)	Получено числовое значение искомой скорости	2 балла

Задача 1. Полет в облаках (Замятнин М.). Облетая грозовую тучу, самолет, летящий на восток со скоростью $\upsilon_0 = 134$ м/с, сделал несколько маневров. Сначала он в течение некоторого времени τ летел с ускорением a, направленным на юг, в результате чего его скорость выросла до $\upsilon_1 = \sqrt{2}\upsilon_0$. Затем в течение времени τ он летел с таким же ускорением a, направленным на восток. И, наконец, на третьем участке пути, в течение времени τ он летел с ускорением $2a$, направленным на север. Какой стала скорость самолета, и под каким углом α к исходному курсу (на восток) она оказалась направлена после завершения маневрирования?

Возможное решение. При равноускоренном движении скорость самолёта $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t$. Направим ось X на восток, а ось Y – на север. Так как после первого маневра скорость самолёта возросла до $\upsilon_1 = \sqrt{2}\upsilon_0$, то по теореме Пифагора

$$\upsilon_y = -at = -\sqrt{2\upsilon_0^2 - \upsilon_0^2} = -\upsilon_0 \qquad (1)$$

Решение задачи сводится к построению векторного многоугольника (рис. 1).

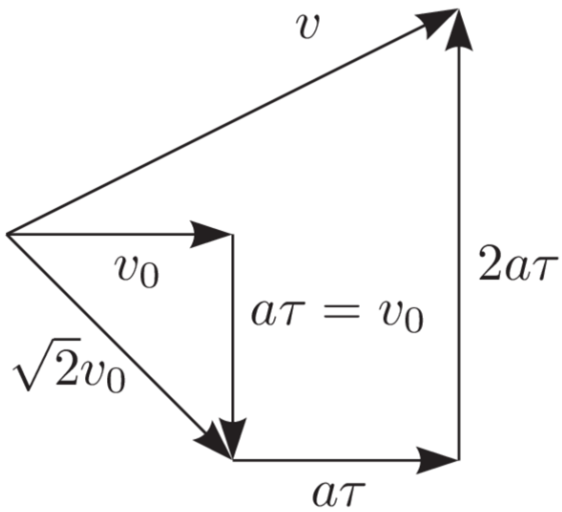


Рис. 1

После завершения маневров конечная скорость станет равна

$$\vec{\upsilon}_3 = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}_1 t + \vec{a}_2 t + \vec{a}_3 t\,. \qquad (2)$$

Модуль скорости $\vec{\upsilon}_3$ равен

$$\upsilon_3 = \sqrt{(2\upsilon_0)^2 + (2a-a)^2} = \sqrt{(2\upsilon_0)^2 + (\upsilon_0)^2} = \sqrt{5}\upsilon_0\,. \qquad (3)$$

Числовое значение

$$\upsilon_3 \approx 300 \text{ м/с}\,. \qquad (4)$$

Новый курс направлен на северо-восток под углом α к восточному направлению. Угол α найдём из условия:

$tg\alpha = 0{,}5$, или $\alpha = 27^\circ$. 2 балла

***Критерии оценивания*.**

(1)	Найдена проекция υ_y скорости самолёта	1 балл
(2)	Записано векторное уравнение для конечной скорости самолёта	3 балла
(3)	Получено выражение для модуля конечной скорости	2 балла
(4)	Получено числовое значение искомой скорости	1 балл
(5)	Найдено направление вектора искомой скорости	3 балла

Задача 2. Работа с графиками (Зайчиков Ю.). В модели железной дороги электровоз движется по прямолинейному пути. Зависимость координаты электровоза от времени приведена на рис. 1. На рис. 2 начертите график зависимости скорости поезда от времени. Вычислите скорость поезда в точках *А, Б, В, Г, Д*. Найдите ускорение поезда на участках (*А – Б*), (*Б – Г*) и (*Г – Д*). Известно, что участки (*А – Б*), (*Б – Г*) и (*Г – Д*) – ветви парабол.

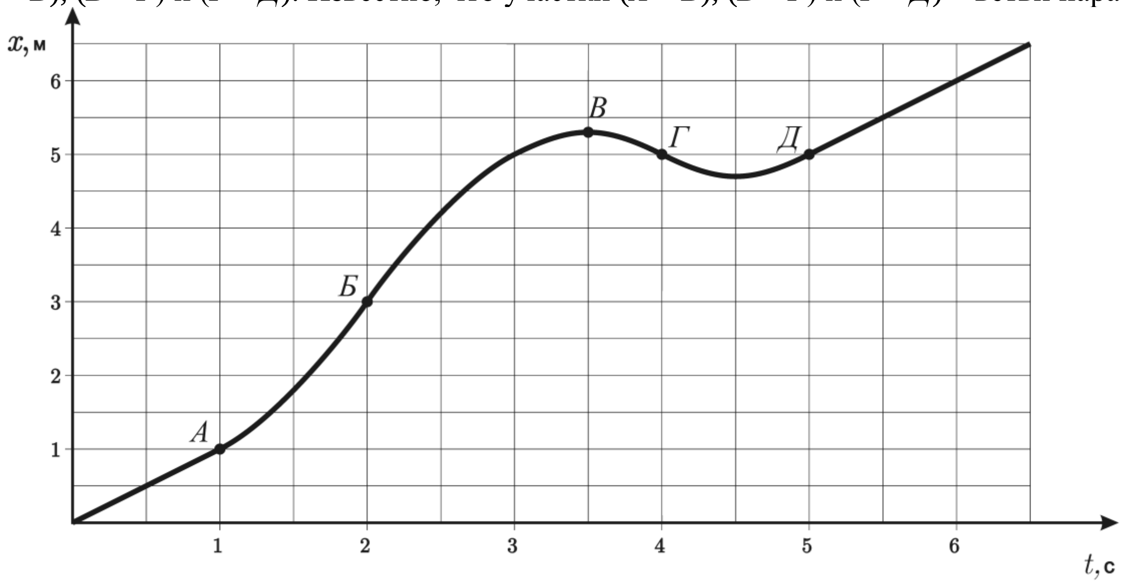


Рис. 2

Возможное решение. Из графика (рис. 2) видно, что скорость локомотива в течение первой и шестой секунд одинакова и равна $\upsilon_1 = \dfrac{x_1}{t_1} = 1$ м/с. (1)

В моменты времени t_1 = 3,5 с и t_2 = 4,5 с координата x не изменяется. Это значит, что в эти моменты скорость равна 0. (2)

Так как на участке (*Г – Д*) движение равноускоренное, и в момент t_2 = 4,5 с скорость равна нулю, то на этом участке скорость изменяется прямо пропорционально времени, и её график в момент t_2 =4,5 с проходит через 0 (рис. 3). (3)

На участке (*Б – Г*) движение также равноускоренное, и в момент t_1 = 3,5 с скорость равна нулю. На этом участке скорость тоже изменяется прямо пропорционально времени, и её график в момент t_1 = 3,5 с проходит через 0. (4)

На участке (*А – Б*) движение равноускоренное, а на графике (рис. 3) скорость представляет собой прямую, соединяющую скорости в точках *А* и *Б*. (5)

Из рис. 3 находим модуль ускорения модели электровоза: $a = 2$ м/с^2. (6)

***Критерии оценивания*.**

(1) Найдена скорость в начале и конце пути 1 балл + 1 балл

(2) Указаны моменты времени, когда скорость локомотива равна 0. 1 балл + 1 балл

(3) Построен график скорости на участке (*Г – Д*) 2 балла

(4) Построен график скорости на участке (*Б – Г*) 2 балла

(5) Построен график скорости на участке (*А – Б*) 1 балла.

(6) Найден модуль ускорения 1 балл

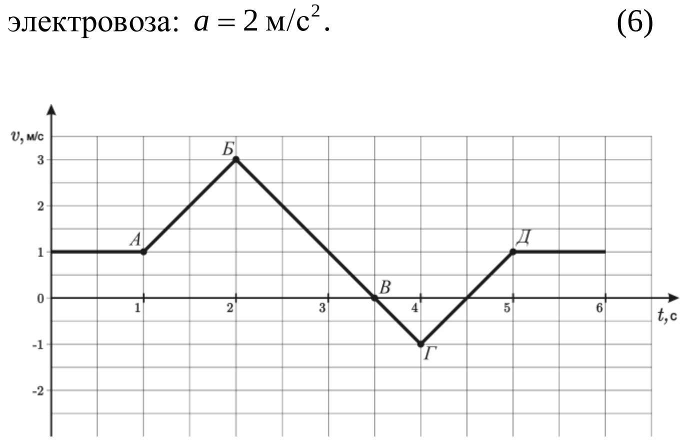


Рис. 3

Задача 3. Разбавленное топливо (Замятнин М.). В бензобак автомобиля, в котором оставалось немного хорошего бензина, долили некачественное топливо. В результате удельная теплота сгорания q топлива, поступающего в двигатель, изменялась со временем (по мере расхода топлива) так, как показано на рис. 4. При данном выборе масштаба участки кривой AB и BC представляют собой дуги окружностей одного и того же радиуса. Считая КПД двигателя постоянным и равным 40%, определите, какую полезную работу совершил двигатель?

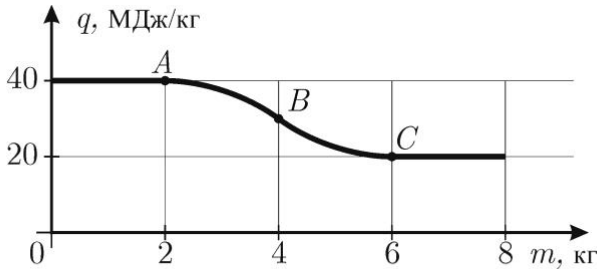


Рис. 4

Возможное решение. Количество теплоты, выделившееся в двигателе при сгорании топлива, пропорционально площади под графиком. (1)

Поскольку дуга AB выпуклая, а дуга BC – вогнутая, то площадь под графиком зависимости q от m равна площади под графиком ломаной A_1ACC_1 (рис. 5). (2)

$$Q = 240 \text{ МДж}. \quad (3)$$

С учетом КПД двигателя, его полезная работа

$$A = \eta Q = 96 \text{ МДж} \quad (4)$$

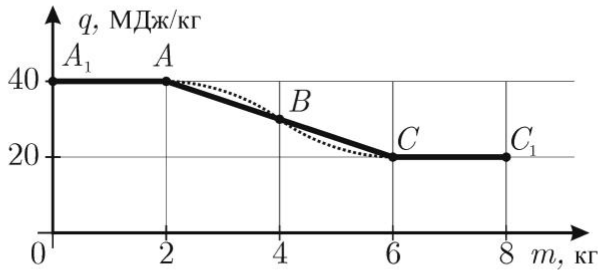


Рис. 5

Критерии оценивания.

(1)	Указано, что энергия сгоревшего топлива пропорциональна площади под графиком $q(m)$	3 балла
(2)	Указано, как вычислять площадь криволинейной трапеции	2 балла
(3)	Получено числовое значение теплоты, выделившейся при сгорании топлива	2 балла
(4)	Записано выражение для полезной работы двигателя	2 балла
(5)	Получено числовое значение работы	1 балл

Задача 4. Сила тока в разветвлённой цепи (Слободянин В.). Электрическая цепь состоит из десяти одинаковых резисторов и двух амперметров, которые можно считать идеальными (рис. 6). Через амперметр A_1 протекает ток силой $I_1 = 20$ мА. Вычислите силу тока I_2, протекающего через амперметр A_2.

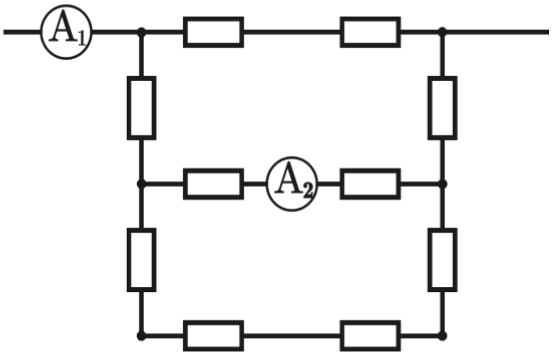


Рис. 6

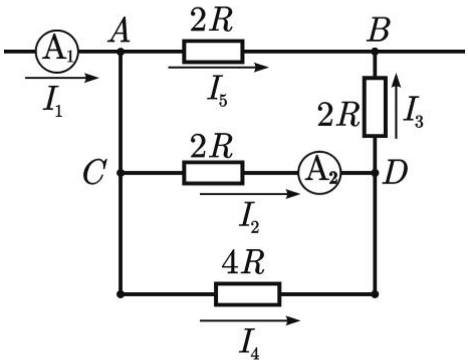


Рис. 7

Возможное решение. Пусть сопротивление одного резистора равно R. Заменим резисторы, соединённые последовательно, эквивалентными резисторами (рис. 7). Наименьшую силу тока, протекающего через резистор сопротивлением $4R$, обозначим через I_4. Выразим падение напряжения между узлами C и D через сопротивления соответствующих резисторов и силы токов I_4 и I_2.

$$U_{CD} = 2RI_2 = 4RI_4. \qquad (1)$$

Заметим, что силы токов, протекающих через параллельно соединённые резисторы, обратно пропорциональны сопротивлениям этих резисторов. (*)
Отсюда

$$I_2 = 2I_4. \qquad (2)$$

Сила тока, протекающего через узел D

$$I_3 = I_2 + I_4 = 3I_4. \qquad (3)$$

Выразим падение напряжения между узлами A и B через сопротивления соответствующих резисторов и силы токов I_5 и I_4.

$$U_{AB} = 2RI_5 = 2RI_2 + 2RI_3 = 2R(2I_4 + 3I_4) = 10RI_4. \qquad (4)$$

Откуда

$$I_5 = 5I_4. \qquad (5)$$

Сила тока, протекающего через узел B

$$I_1 = I_5 + I_3 = 5I_4 + 3I_4 = 8I_4. \qquad (6)$$

Отсюда

$$I_4 = \frac{1}{8}I_1, \qquad (7)$$

а сила тока

$$I_2 = \frac{1}{4}I_1 = 5 \text{ мА}. \qquad (8)$$

Критерии оценивания.

(2)	Найдена связь между I_2 и I_4	2 балла
(5)	Найдена связь между I_4 и I_5	3 балла
(7)	Найдена связь между I_1 и I_4	3 балла
(8)	Найдена сила тока I_2	2 балла

Задача 1. Неупругий удар (Фольклор). Тряпичный мешочек с песком сталкивается с гладкой наклонной плоскостью (угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30^\circ$). Перед столкновением скорость мешочка была горизонтальна и равнялась $\upsilon_0 = 4$ м/с. На какую максимальную высоту h поднимется мешочек, скользя по наклонной плоскости?

Возможное решение. Так как удар мешочка о наклонную плоскость неупругий, проекция его скорости на наклонную плоскость сохранится, а нормальная к плоскости компонента скорости обратится в ноль. (1)

Направим ось X вверх вдоль плоскости. Мешочек начнет скользить вдоль плоскости со скоростью

$$\upsilon_{0,x} = \upsilon_0 \cos\alpha \ . \tag{2}$$

Высоту h подъема мешочка найдём из закона сохранения энергии:

$$m\frac{0-(\upsilon_0 \cos\alpha)^2}{2} = -mg \sin\alpha \cdot L = -mgh, \tag{3}$$

Откуда

$$h = \frac{(\upsilon_0 \cos\alpha)^2}{2g}, \tag{4}$$

или численно

$$h \approx 0{,}6 \text{ м.} \tag{5}$$

***Критерии оценивания*.**

(1)	Идея о сохранении компоненты $\upsilon_{0,x}$	3 балла
(2)	Выражение для скорости $\upsilon_{0,x}$	1 балл
(3)	Закон сохранения энергии при скольжении по горке	3 балла
(4)	Получено выражение для h	2 балла
(5)	Найдено числовое значение h	1 балл

Задача 2. Полет в облаках 2 (Замятнин М.). Облетая грозовые тучи, самолет, летящий на восток с постоянной скоростью, сделал два маневра. Сначала он в течение времени $\tau = 90$ с двигался с некоторым (неизвестным) постоянным ускорением a, направленным на юг, в результате чего его скорость выросла в $\sqrt{2}$ раз. Затем, не меняя величины скорости и высоты полёта, он ещё некоторое время τ_1 летел с постоянным ускорением a, направленным перпендикулярно скорости полёта, пока вновь не повернул на восток. Как долго самолёт выполнял второй манёвр? (Время τ_1 минимально возможное).

Возможное решение. Пусть начальная скорость самолёта равна $\vec{\upsilon}_0$. Новое значение скорости находим с помощью уравнения $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t$. Так как после первого маневра скорость стала $\upsilon_1 = \sqrt{2}\upsilon_0$, то по теореме Пифагора получим

$$a\tau = \upsilon_0. \qquad (1)$$

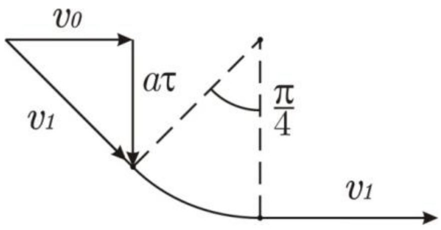


Рис. 1

Ясно, что во время второго манёвра самолёт летел с постоянной скоростью по дуге окружности и за время τ_1 повернулся на угол $\pi/4$ на восток (рис. 1). (2)

Угловая скорость поворота самолёта

$$\omega = \frac{\pi}{4\tau_1} \qquad (3)$$

Нормальное ускорение

$$a = \omega\upsilon_1 = \frac{\pi}{4\tau_1}\upsilon_1 = \frac{\pi}{4\tau_1}\sqrt{2}a\tau. \qquad (4)$$

Отсюда

$$\tau_1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\tau \approx 100 \text{ с}. \qquad (5)$$

Критерии оценивания.

(1)	Найдена проекция υ_y скорости самолёта на южное направление	1 балл
(2)	Показано, что за время первого манёвра самолёт повернулся на угол $\pi/4$	2 балла
(3)	Найдена угловая скорость поворота самолёта	3 балла
(4)	Получено уравнение (4) связи τ_1 и τ	3 балла
(5)	Приведено выражение для времени τ_1	1 балл

Задача 3. Высота горы (Домарецкий Д.). Теоретик Баг рассказал своему другу экспериментатору Глюку, что в изотермической атмосфере при температуре $32^\circ C$ давление падает на $\Delta p_0 = 8$ мм ртутного столба при подъеме на каждые 100 м. Тогда Глюк решил измерить высоту H ближайшей горы. Для этого он изготовил прибор, состоящий из колбы закрытой пробкой. Сквозь пробку он пропустил тонкую стеклянную трубку. В середине трубки находилась капелька ртути, которая отделяла колбу от атмосферы (рис. 2). У подножия горы давление воздуха $p_0 = 760$ мм ртутного столба. Поднявшись на вершину горы, друзья обнаружили, что положение капельки ртути такое же как и в лаборатории у подножия горы. Подыскивая объяснение этому факту, Баг заметил, что температура у подножия горы была $32^\circ C$, а на вершине $22^\circ C$. Определите высоту горы.

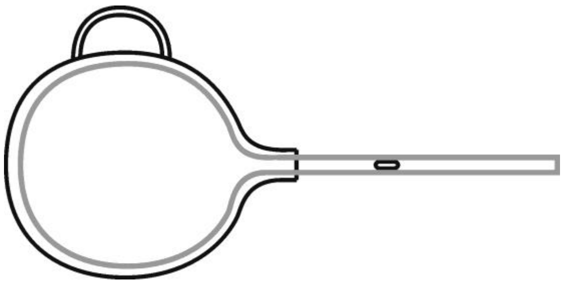


Рис. 2

Возможное решение. Так как положение капельки ртути не изменилось, процесс, осуществлённый над газом в колбе, можно считать изохорным. (1)

Переведём температуру воздуха у подножия горы из градусов Цельсия в градусы Кельвина:

$$T = 273^\circ C + 32^\circ C = 305^\circ C. \qquad (2)$$

Уравнение изохорного процесса

$$\frac{p_0}{T_0} = \frac{p}{T}. \qquad (3)$$

Отсюда

$$\Delta p = p_0 - p = \frac{p_0(T_0 - T)}{T_0} = \frac{p_0 \Delta T}{T_0} = 25 \text{ мм ртутного столба} \qquad (4)$$

Высоту горы найдём из условия

$$H = \frac{\Delta p}{\Delta p_0} 100 \text{ м} \approx 310 \text{ м}. \qquad (5, 6)$$

Критерии оценивания.

(1)	Указано, что процесс изохорный	2 балла
(2)	Температура у подножия горы переведены в градусы Кельвина	2 балла
(3)	Записано уравнение для изохорного процесса	2 балла
(4)	Найден перепад давлений	2 балла
(5)	Получено выражение для высоты горы	1 балл
(6)	Получено числовое значение высоты горы	1 балл

Задача 4. Крутая горка (Замятнин М.). С наклонной плоскости (угол наклона $\alpha = 60^0$) соскальзывают два бруска, связанные лёгкой нитью. Масса нижнего бруска $2m = 2$ кг, между ним и плоскостью коэффициент трения $\mu = 0,3$. Масса верхнего бруска m, между ним и плоскостью коэффициент трения 2μ (рис. 3). Какова сила T натяжения нити?

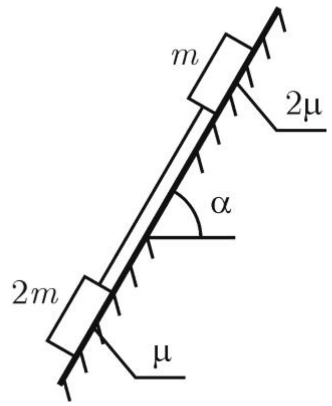


Рис. 3

Возможное решение. Запишем уравнение движения для нижнего бруска:

$$2ma = 2mg\sin\alpha - 2m\mu g\cos\alpha - T\ , \qquad (1)$$

Теперь запишем уравнение движения для верхнего бруска:

$$ma = mg\sin\alpha - m2\mu g\cos\alpha + T\ , \qquad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2) и исключая из них ускорение a, получим:

$$T = \frac{2}{3}m\mu g\cos\alpha\ . \qquad (3)$$

Из последней формулы следует:

$$T = 1\ \text{Н}. \qquad (4)$$

Критерии оценивания.

(1)	Записано уравнение (1)	3 балла
(2)	Записано уравнение (2)	3 балла
(3)	Получено выражение для силы T	2 балла
(4)	Получен числовой ответ	2 балла

Задача 5. Сила тока в разветвлённой цепи (Слободянин В.). Электрическая цепь состоит из десяти одинаковых резисторов и двух амперметров, которые можно считать идеальными (рис. 5). Через амперметр A_1 протекает ток силой $I_1 = 20$ мА. Вычислите силу тока I_2, протекающего через амперметр A_2.

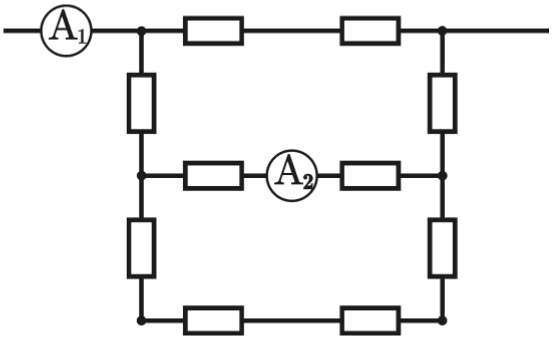


Рис. 5

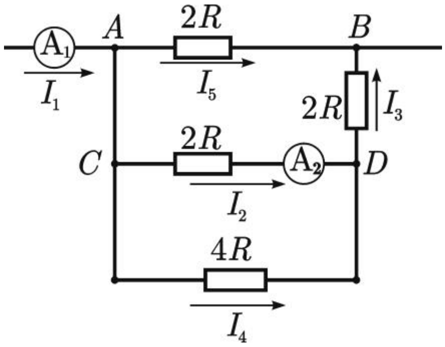


Рис. 6

Возможное решение. Пусть сопротивление одного резистора равно R. Заменим резисторы, соединённые последовательно эквивалентными резисторами (рис. 6). Наименьшую силу тока, протекающего через резистор сопротивлением $4R$, обозначим через I_4. Выразим падение напряжения между узлами C и D через сопротивления соответствующих резисторов и силы токов I_4 и I_2.

$$U_{CD} = 2RI_2 = 4RI_4. \qquad (1)$$

Заметим, что силы токов, протекающих через параллельно соединённые резисторы, обратно пропорциональны сопротивлениям этих резисторов. (*)

Отсюда

$$I_2 = 2I_4. \qquad (2)$$

Сила тока, протекающего через узел D

$$I_3 = I_2 + I_4 = 3I_4. \qquad (3)$$

Выразим падение напряжения между узлами A и B через сопротивления соответствующих резисторов и силы токов I_5 и I_4.

$$U_{AB} = 2RI_5 = 2RI_2 + 2RI_3 = 2R(2I_4 + 3I_4) = 10RI_4. \qquad (4)$$

Откуда

$$I_5 = 5I_4. \qquad (5)$$

Сила тока, протекающего через узел B

$$I_1 = I_5 + I_3 = 5I_4 + 3I_4 = 8I_4. \qquad (6)$$

Отсюда

$$I_4 = \frac{1}{8}I_1, \qquad (7)$$

а сила тока

$$I_2 = \frac{1}{4}I_1 = 5 \text{ мА}. \qquad (8)$$

Критерии оценивания.

(2)	Найдена связь между I_2 и I_4	2 балла
(5)	Найдена связь между I_4 и I_5	3 балла
(7)	Найдена связь между I_1 и I_4	3 балла
(8)	Найдена сила тока I_2	2 балла

Задача 1. Разное трение (Слободянин В.). На наклонной плоскости покоится прямоугольный брусок (рис. 1). Ему толчком сообщают некоторую начальную скорость υ_0. Брусок поднимается по плоскости до высоты H = 0,4 м после чего начинает скользить вниз и останавливается в точке старта. Известно, что коэффициент трения на нижней половине пути отличается от коэффициента трения на верхней половине пути. Какой была начальная скорость υ_0 бруска? (коэффициенты трения неизвестны).

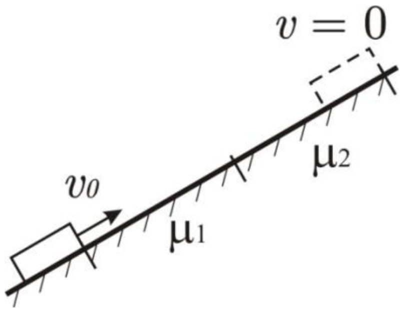


Рис. 1

Возможное решение. Запишем закон изменения механической энергии бруска, движущегося вверх по наклонной плоскости:

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} + A_{Tp} = mgH \;, \qquad (1)$$

где $\frac{m\upsilon_0^2}{2}$ – исходная кинетическая энергия бруска, A_{Tp} – работа силы трения ($A_{Tp} < 0$), mgH – потенциальная энергия бруска в верхней точке его траектории.

При движении бруска вниз справедливо следующее соотношение:

$$mgH + A_{Tp} = 0. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) получим:

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = mgH - A_{Tp} = 2mgH \;. \qquad (3)$$

Из последней формулы следует:

$$\upsilon_0 = 2\sqrt{gH} = 4 \text{ м/с}. \qquad (4)$$

Критерии оценивания.

(1)	Записан закон изменения механической энергии при движении бруска вверх	3 балла
(2)	Записан закон изменения механической энергии при движении бруска вниз	3 балла
(3)	Получена связь между кинетической энергией вначале подъема и потенциальной энергией в верхней точке подъема	2 балла
(4)	Приведено выражение для скорости υ_0	1 балл
(5)	Получен числовой ответ	1 балл

Задача 2. Теплоёмкость газа (Фольклор). В цилиндре под поршнем находится идеальный газ. К газу подводят теплоту, и он, расширяясь, производит работу против постоянного внешнего давления. График зависимости работы A газа от количества подведённой теплоты Q приведён на рис. 2. Определите молярную теплоемкость газа C_V.

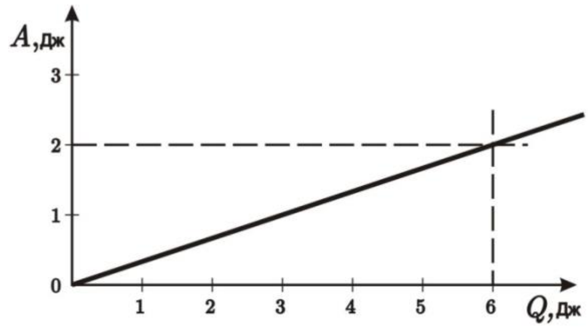


Рис. 2

Возможное решение. Согласно первому закону термодинамики

1) $$Q = A + \Delta U,$$

где ΔU – изменение внутренней энергии газа. Из графика следует, что

2) $$Q = 3A,$$

Откуда

3) $$\Delta U = \frac{2}{3}Q.$$

Изменение внутренней энергии

4) $$\Delta U = \nu C_V (T - T_0),$$

а количество подведённой теплоты

5) $$Q = \nu C_P (T - T_0),$$

Подставляя (4) и (5) в (3) получим

6) $$C_V = \frac{2}{3}C_P.$$

С учётом соотношения Роберта Майера ($C_P = C_V + R.$) получим:

$$C_V = 2R.$$

***Критерии оценивания*.**

(1)	Записан первый закон термодинамики	2 балла
(2)	Из графика получено соотношение (2)	1 балл
(3)	Из графика получено соотношение (3)	1 балл
(4)	Записано выражение для изменения внутренней энергии	1 балл
(5)	Приведено выражение для количества подведенной теплоты	2 балла
(6)	Найдена связь C_P и C_V	1 балл
(7)	Дан ответ	1 балл

Задача 3. Полет сквозь сетку (Замятнин М.). Тонкая сетка разделяет две области, в которых созданы однородные поля $E_1 = E$ и $E_2 = 2E$, перпендикулярные плоскости сетке (рис. 3).

В окрестности точки A сквозь сетку (под некоторым углом α к её плоскости) со скоростью υ_0 пролетела положительно заряженная частица.

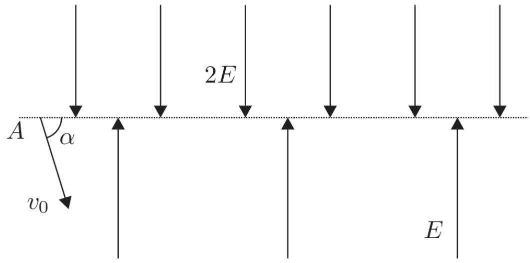


Рис. 3

Считайте, что частица не сталкивалась с сеткой. Определите, на каком расстоянии от точки A частица оказалась к тому моменту времени, когда общее время её пребывания в области с напряженностью поля $2E$, стало равным τ? Время τ большое.

Примечание. Влияние неэлектростатических сил на частицу не учитывайте.

Решение. На частицу в электрическом поле E действует сила

(1) $$F = qE,$$

под действием которой она движется с ускорением. В поле E_1 ускорение частицы

(2) $$a_1 = \frac{qE}{m},$$

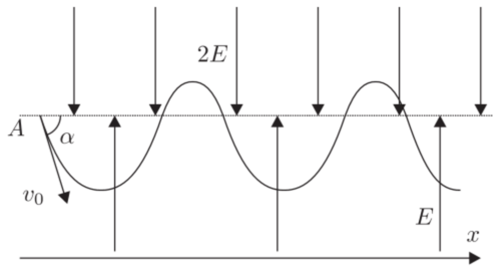


Рис. 4

а в поле E_2 – с ускорением

(3) $$a_2 = \frac{2Eq}{m} = 2a_1,$$

причем, ускорения в обоих полях направлены к сетке перпендикулярно её плоскости (рис. 4). Траектория частицы представляет собой сшивку из парабол двух типов. Время нахождения частицы в поле E_1 (от одного пролёта сетки до следующего) будет

(4) $$t_1 = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{a_1},$$

а в поле E_2, соответственно

(5) $$t_2 = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{2a_1}.$$

Видно, что за каждый пролёт в поле E_2 частица находится в нём в 2 раза дольше, чем в поле E_1. Следовательно, общее время движения частицы

(6) $$T = 3\tau.$$

Заметим, что вдоль оси X движение частицы равномерное, следовательно, за время T частица удалится от точки A на расстояние

(7) $$L \approx 3\upsilon_0 \tau \cos\alpha.$$

Здесь мы пренебрегли расстоянием порядка $l = t_2 \upsilon_0 \cos\alpha$, так как по условию задачи $t_2 << \tau$.

Критерии оценивания.

(1)	Дано выражение силы в электростатическом поле	2 балла
(2)	Получено ускорение частицы в поле E_1	1 балл
(3)	Получено ускорение частицы в поле E_2	1 балл
(4)	Найдено время одного пролёта в поле E_1	1 балл
(5)	Найдено время одного пролёта в поле E_2	1 балл
(6)	Получено общее время полёта	3 балла
(7)	Найдено искомое расстояние	1 балл

Задача 4. Перезарядка конденсатора (Шеронов А.). В электрической цепи, схема которой приведена на рис. 5, в начальный момент конденсатор не заряжен. Ключ *К* замыкают, а затем размыкают. За время, пока ключ был замкнут, через него протёк заряд в три раза больший, чем накопился на верхней обкладке конденсатора. Сколько теплоты Q_x выделилось в цепи за время, пока ключ был замкнут, если после размыкания ключа на резисторе выделилось количество теплоты *Q*? Считайте, что ёмкость конденсатора *С*, ЭДС батарейки $\mathscr{E}$, количество теплоты *Q* известны. Батарейка обладает неизвестным внутренним сопротивлением.

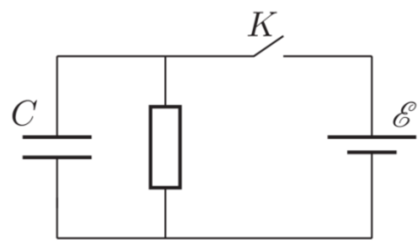


Рис. 5

Возможное решение. После размыкания ключа *К*, запасённая в конденсаторе энергия

1) $$Q = \frac{q^2}{2C},$$

выделится на резисторе *R* (его сопротивление не задано). Отсюда заряд на верхней пластине конденсатора в конце процесса зарядки

2) $$q = +\sqrt{2CQ}.$$

По условию через батарею прошёл заряд $3q$. Работа батареи

3) $$A = 3q\mathscr{E} = 3\sqrt{2CQ}\,\mathscr{E}.$$

Из закона сохранения энергии следует

$$Q_x = A - Q = 3\sqrt{2CQ}\,\mathscr{E} - Q.$$

***Критерии оценивания*.**

(1)	Найдена энергия, запасённая в конденсаторе	2 балла
(2)	Найден заряд на одной из обкладок конденсатора	1 балл
(3)	Указан заряд, прошедший через батарею	1 балл
(4)	Записано выражение для работы батареи	3 балла
(5)	Записан ответ	3 балла

Задача 5. Отражение света (Фольклор). Луч света, испущенный из угла A, после пяти отражений от зеркальных стенок попал в угол D (рис. 6). Размеры комнаты a и b считайте известными. Найдите $\mathrm{tg}\alpha$, где α – угол, под которым был пущен луч. Сколько существует различных вариантов решений задачи?

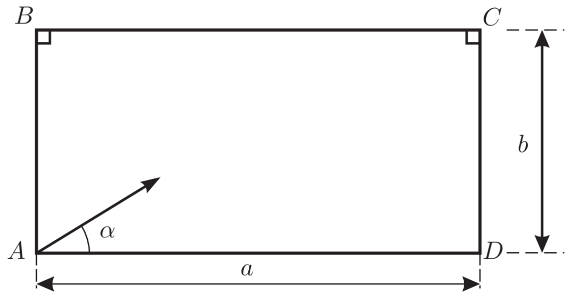
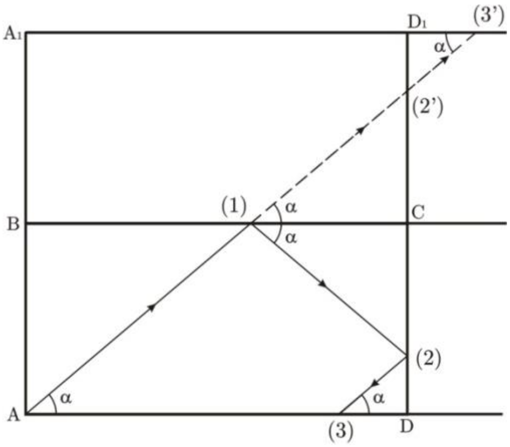


Рис. 6

Возможное решение. Первое отражение может произойти от стенок BC или CD. Дальнейший ход луча можно найти, «развернув» отражения. Его суть понятна из рис. 7. В этом методе каждое отражение луча эквивалентно пересечению лучом границы комнаты или границы зеркального отражения комнаты.



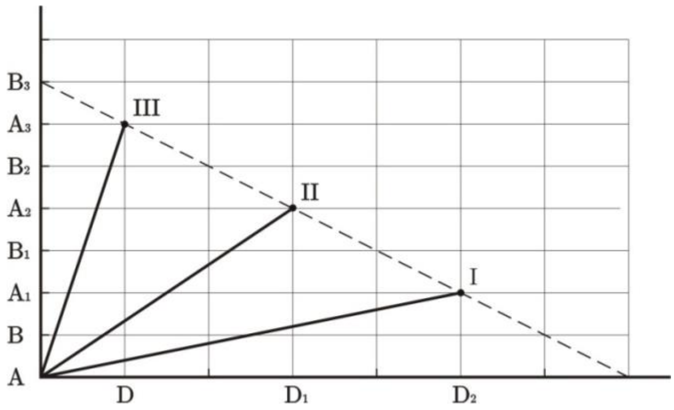


Рис. 7 **Рис. 8**

Пять отражений эквивалентны пересечению пяти границ. Из рис. 8 видно, что существует всего три различных варианта решения.

(1) $$\mathrm{tg}\alpha_1 = \frac{6b}{a},$$

(2) $$\mathrm{tg}\alpha_2 = \frac{4b}{3a},$$

(3) $$\mathrm{tg}\alpha_1 = \frac{2b}{5a}.$$

Критерии оценивания.

(1)	Идея построения развёртки	4 балла
(2)	Построение искомых точек на развёртке	3 балла
(3)	Найден $\mathrm{tg}\alpha_1$	1 балл
(4)	Найден $\mathrm{tg}\alpha_2$	1 балл
(5)	Найден $\mathrm{tg}\alpha_3$	1 балл