

## Пружины нулевой длины и "слинки" (10 баллов)

Пружина эффективной нулевой длины (ПНД) это пружина, у которой сила пропорциональна длине пружины:  $F = kL$  для  $L > L_0$ , где  $L_0$  – минимальная длина (длина нерастянутой пружины). На рис. 1 показана зависимость силы  $F$  от длины  $L$  для ПНД, где наклон графика есть жесткость пружины  $k$ , и  $L_0$  – длина покоящейся и не растянутой пружины.

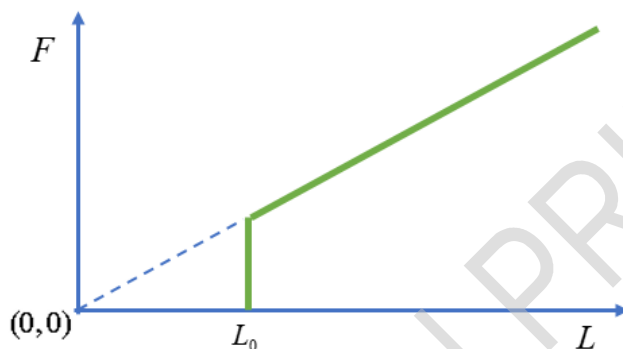


Рис. 1: зависимость силы  $F$  от длины пружины  $L$

ПНД используются в сейсмографии и позволяют очень точно измерять изменения в ускорении свободного падения  $g$ . Здесь и далее мы рассматриваем однородную ПНД, у которой вес  $Mg$  превышает  $kL_0$ . Введём безразмерный коэффициент  $\alpha = kL_0/Mg < 1$  для характеристики относительной жесткости пружины. Примером такой ПНД может являться игрушка-пружинка "слинки" (но не обязательно).

### Часть А: Статика (3.0 балла)

**A.1** Рассмотрим кусочек длиной  $\Delta\ell$  нерастянутой ПНД. Пружину растянули силой  $F$  в условиях невесомости. Какова длина  $\Delta y$  этого кусочка в зависимости от силы  $F$  и параметров пружины? 0.5pt

**A.2** Для кусочка длиной  $\Delta\ell$  вычислите работу  $\Delta W$ , необходимую для растяжения от длины  $\Delta\ell$  до длины  $\Delta y$ . 0.5pt

Далее в этой задаче мы будем обозначать точки пружины через расстояние  $l$  ( $0 \leq l \leq L_0$ ), которое измеряется от низа пружины когда она не растянута. Таким образом, для любой точки пружины значение  $l$  остаётся неизменным при растяжении пружины.

**A.3** Предположим, что мы удерживаем пружину за верхний конец так, что пружина растягивается под собственным весом. Определите полную длину  $H$  растянутой пружины в положении равновесия. Выразите ответ через  $L_0$  и  $\alpha$ . 2.0pt

### Часть В: Динамика (5.5 баллов)

Проведём следующий эксперимент. Пружина подвешена за верхний конец и находится в покое. В некоторый момент пружину отпускают, и она начинает сжиматься, причем, сжатие происходит

постепенно, сверху вниз, и нижний конец остаётся неподвижным (рис. 2). С течением времени сжатая часть движется как твердое тело и собирает остальные витки пружины, а неподвижная часть становится короче. Каждая точка пружины начинает движение только тогда, когда движущаяся часть достигнет этой точки. Нижний конец пружины начинает движение только тогда, когда пружина полностью сожмется и приобретёт длину  $L_0$ . После этого, сжатая пружина падает как твердое тело в поле тяжести.

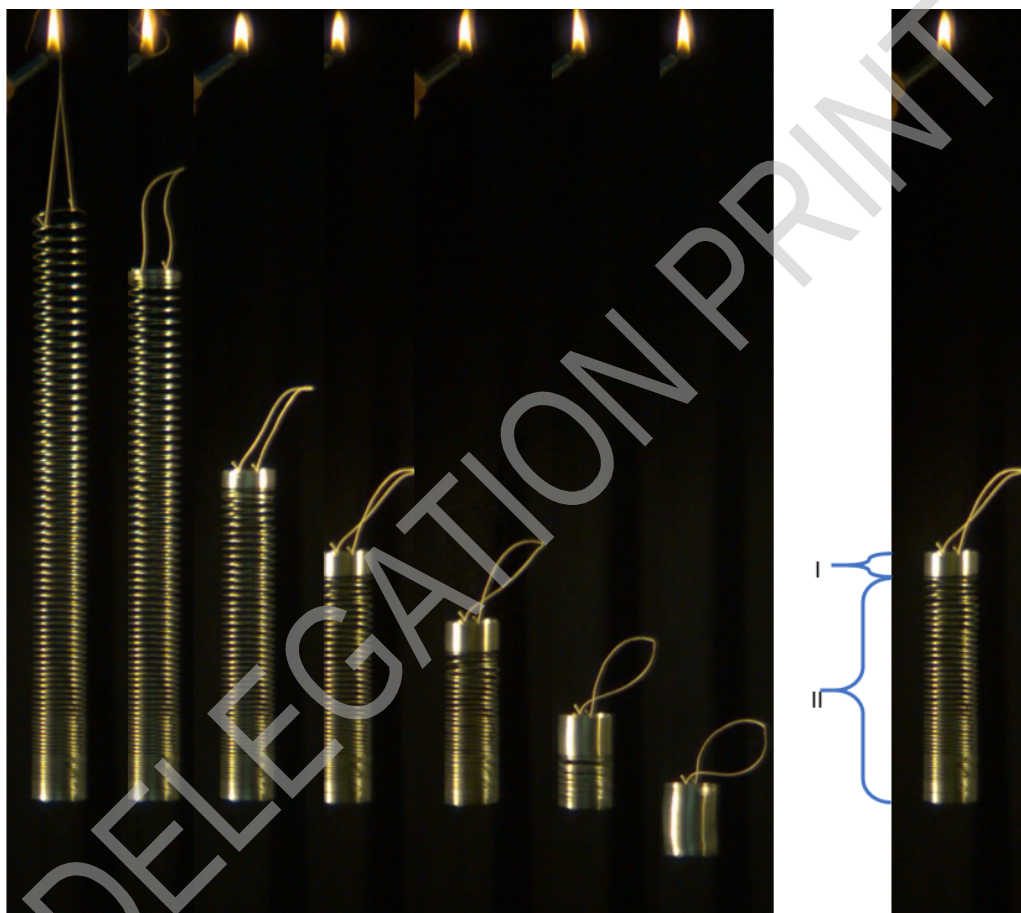


Рис. 2: Слева: последовательность кадров, сделанная в ходе падения пружинки. Справа: движущаяся часть I и неподвижная часть II при свободном падении пружины.

В последующих частях задачи вам необходимо использовать описанную выше модель. Сопротивлением воздуха можно пренебречь, однако, вам запрещено пренебрегать  $L_0$ .

- В.1** Найдите время  $t_c$ , которое пройдёт с момента отпускания пружины до сжатия пружины в минимальную длину  $L_0$ . Выразите ответ через  $L_0$ ,  $g$  и  $\alpha$ . 2.5pt  
Посчитайте числовое значение  $t_c$  для пружины с параметрами  $k = 1.02$  Н/м,  $L_0 = 0.055$  м и  $M = 0.201$  кг, считайте, что  $g = 9.80$  м/с<sup>2</sup>.



**B.2** В этой части  $\ell$  обозначает координату границы между частью I (рис. 2, движущаяся часть) и частью II (неподвижная часть). В некоторый момент времени, пока существует неподвижная часть массой  $m(\ell) = \frac{\ell}{L_0} M$ , подвижная часть движется с мгновенной скоростью  $v_I(\ell)$ . Покажите, что для этого момента времени (когда существует неподвижная часть) скорость движущейся части описывается выражением  $v_I(\ell) = \sqrt{A\ell + B}$ . Выразите константы  $A$  и  $B$  через  $L_0$ ,  $g$  и  $\alpha$ . 2.5pt

**B.3** Используя пункт B.2, найдите минимальную скорость  $v_{\min}$  движущейся части пружины в ходе движения: от отпускания до падения пружины на землю. Выразите ответ через  $L_0$ ,  $\alpha$ ,  $A$  и  $B$ . 0.5pt

### Часть C: Энергетическая (1.5 балла)

**C.1** Найдите механическую энергию  $Q$ , которая была потеряна и перешла в тепло, начиная с момента отпускания пружины и до момента прямо перед касанием пружиной земли. Выразите ответ через  $L_0$ ,  $M$ ,  $g$  и  $\alpha$ . 1.5pt

DELEGATION PRINT

## Микроволновая печь (10 баллов)

В данной задаче обсуждается получение микроволнового излучения в микроволновой печи и его использование для подогрева еды. Микроволновое излучение генерируется устройством, называемым "магнетрон". В части А обсуждается работа магнетрона, а в части В - поглощение микроволнового излучения нагреваемой едой.

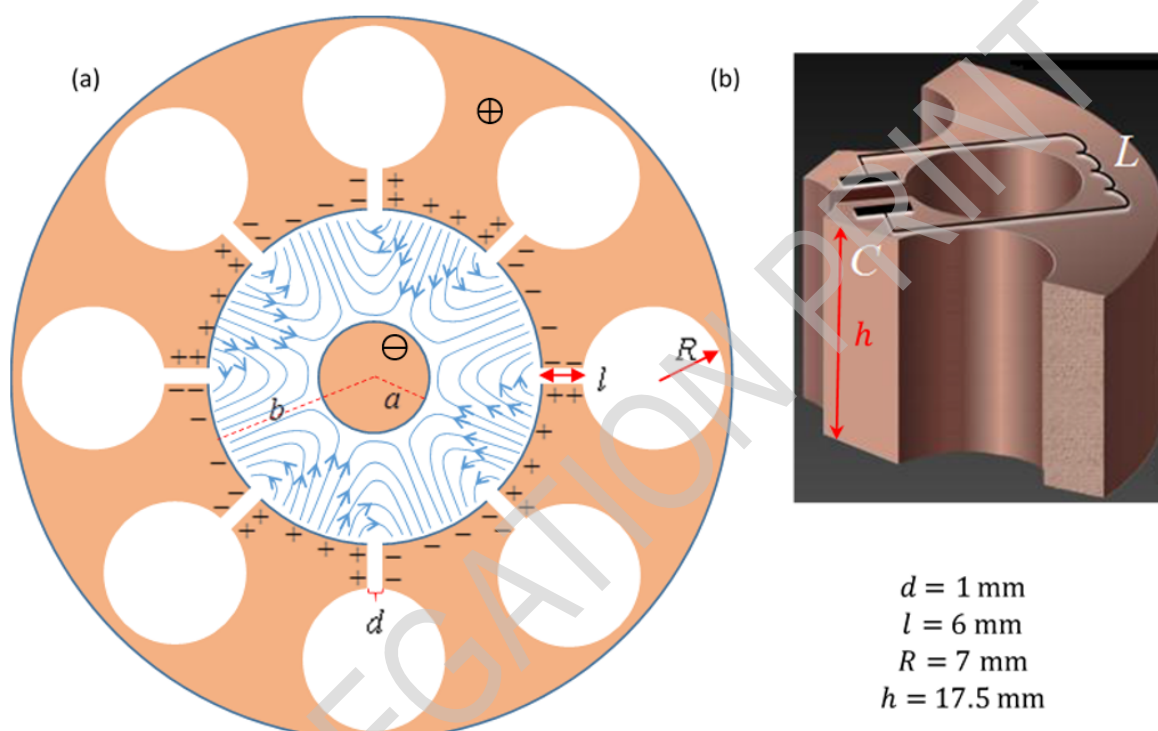


Рис. 1

### Часть А. Структура и принцип работы магнетрона (6.6 баллов)

Магнетрон представляет собой устройство для создания импульсного (в радиолокации) или непрерывного микроволнового излучения (в микроволновой печи). Магнетрон может работать в режиме самоусиливающихся колебаний. Если на магнетрон подать постоянное (не переменное) напряжение, то этот режим устанавливается очень быстро.

Магнетрон в микроволновке представляет собой медный цилиндрический катод (радиуса  $a$ ) и окружающий его анод (радиуса  $b$ ). Анод – это толстый цилиндрический слой, в котором просверлены цилиндрические полости. Эти полости называются резонаторами. Один из резонаторов соединен с антенной, с помощью которой излучение испускается (в задаче антенной можно пренебречь). Считайте, что магнетрон находится в вакууме. В задаче рассматривается магнетрон с 8 (восемью) резонаторами (рис. 1а). На трёхмерной модели (рис.1б) можно видеть, что каждая из восьми полостей ведет себя как  $LC$ -резонатор с рабочей частотой  $f = 2.45 \text{ ГГц}$ .

Магнетрон находится в постоянном однородном магнитном поле, направленном вдоль его оси (из страницы "к нам" (рис. 1а)). Постоянное напряжение приложено между анодом (положительный потенциал) и катодом (отрицательный потенциал). Электроны вылетают с катода, достигают анода и заряжают его. В результате возбуждается мода колебаний, в которой знаки зарядов соседних



резонаторов противоположны. В результате между катодом и анодом (вдобавок к постоянному полю) создается переменное электрическое поле с частотой  $f = 2.45$  ГГц (синие линии на рис. 1а). В стационарном режиме амплитуда колебаний напряженности переменного электрического поля составляет  $\frac{1}{3}$  напряженности постоянного поля. На движение электронов влияют обе составляющие электрического поля. В процессе движения электроны приобретают некоторую энергию от постоянного поля. Электроны, достигающие анода, отдают около 80% этой энергии переменному полю. Небольшая часть вылетевших электронов возвращаются на катод и выбивают дополнительные электроны, которые в свою очередь увеличивают переменное поле.

Каждый резонатор можно рассматривать как конденсатор и катушку (рис. 1б). Емкость представлена главным образом плоскими частями поверхности резонатора, индуктивность - цилиндрическими частями. Считайте, что ток в резонаторе течет очень близко к поверхности цилиндрической полости, а создаваемое им магнитное поле составляет 0.6 величины поля идеального бесконечного соленоида. Геометрические размеры резонатора приведены на рис. 1б. Физические постоянные  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м и  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м считайте заданными.

- A.1** Рассчитайте частоту одиночного резонатора  $f_{\text{est}}$  по параметрам, заданным выше. 0.4pt  
Ваш ответ может отличаться от **реального** значения  $f = 2.45$  ГГц. В дальнейшем используйте только реальное значение частоты.

В пункте A2 рассматриваются вспомогательные аспекты движения электрона (не в магнетроне).

Рассмотрим электрон, который движется в однородном электрическом поле, направленном против оси  $y$ , т.е.  $\vec{E} = -E_0\hat{y}$ , и однородном магнитном поле, направленном вдоль оси  $z$ , т.е.  $\vec{B} = B_0\hat{z}$ .  $E_0$  и  $B_0$  — положительные постоянные. Скорость электрона в момент времени  $t$  равна  $\vec{u}(t)$ . Скорость дрейфа  $\vec{u}_D$  электрона — это его средняя скорость движения.

- A.2** Найдите  $\vec{u}_D$  для двух случаев, описанных ниже. Нарисуйте в листе ответов траектории движения электронов (в лабораторной системе отсчета) в течение интервала времени  $0 \leq t \leq \frac{4\pi m}{eB_0}$ , если
1. в момент времени  $t = 0$  скорость электрона равна  $\vec{u}(0) = (3E_0/B_0)\hat{x}$ ,
  2. в момент времени  $t = 0$  скорость электрона равна  $\vec{u}(0) = -(3E_0/B_0)\hat{x}$ .

Вернемся теперь к обсуждению магнетрона. Расстояние между катодом и анодом 15 мм. Пусть также из-за описанных потерь энергии максимальная кинетическая энергия электрона не превышает  $K_{\text{max}} = 800$  эВ. Индукция постоянного магнитного поля  $B_0 = 0.3$  Тл. Масса и заряд электрона равны  $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$  кг и  $-e = -1.6 \cdot 10^{-19}$  Кл соответственно.

- A.3** Рассмотрим электрон в системе отсчета, в которой его движение можно приближенно считать движением по окружности. 0.4pt  
Оцените численно радиус  $r$  этой окружности. Систему отсчета считать инерциальной.

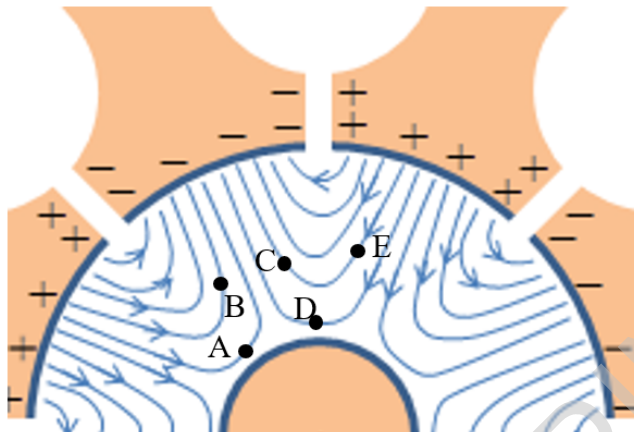


Рис. 2

На рисунке 2 изображены силовые линии переменного электрического поля между анодом и катодом в некоторый момент времени (силовые линии постоянного поля не показаны). Положения пяти электронов в этот момент времени обозначены  $A, B, C, D$  и  $E$ .

- A.4** Укажите в листе ответов, какие из этих электронов дрейфуют в сторону анода, какие в сторону катода, а какие дрейфуют в направлении перпендикулярном радиусу в этот момент времени. 1.2pt

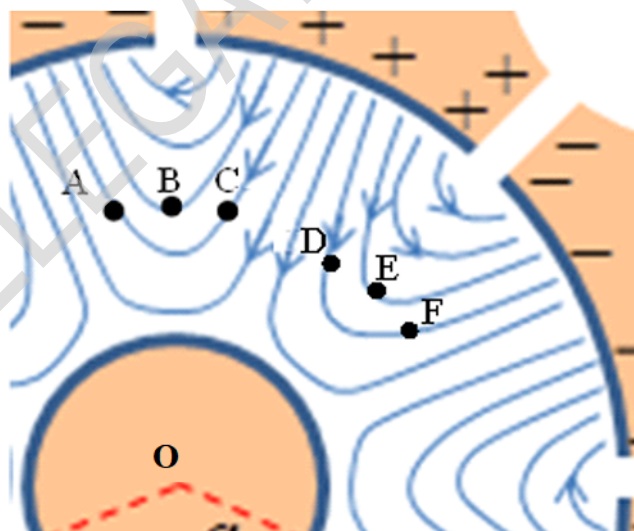


Рис. 3

На рисунке 3 изображены силовые линии переменного электрического поля между анодом и катодом в некоторый момент времени (силовые линии постоянного поля не показаны). Положения шести электронов в этот момент времени обозначены  $A, B, C, D, E$  и  $F$ . Все электроны расположены на одинаковом расстоянии от катода.

- A.5** Рассмотрим пары электронов  $AB, AC, BC, DE, DF, EF$ . Их относительное движение можно описать изменением угла «электрон-центр катода-электрон». Для каждой из пар укажите, как будет влиять дрейф на этот угол. Будет ли угол увеличиваться или уменьшаться в этот момент времени? 1.2pt

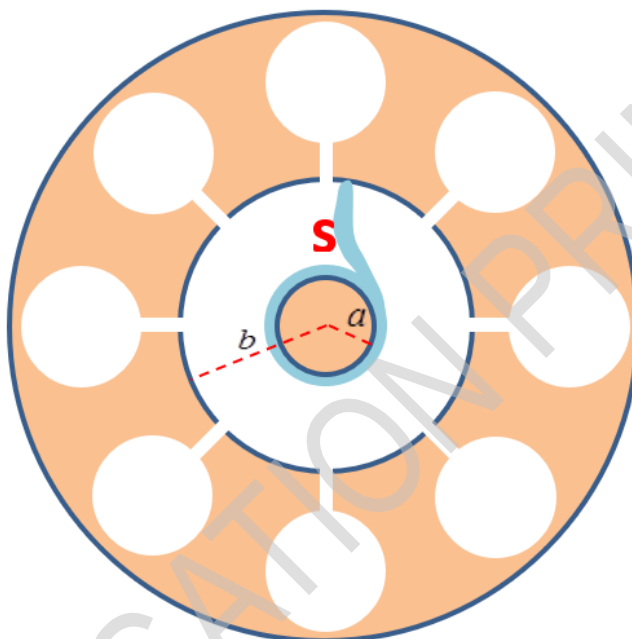


Рис. 4

Поведение системы, которое вы обнаружили в пункте А5, представляет собой механизм фокусировки. Электроны концентрируются в пространстве между катодом и анодом в сгустки. Назовём такие сгустки «спицами». Одна из спиц показана на рисунке 4 и обозначена  $S$ .

- A.6** Нарисуйте в листе ответов остальные спицы в этот момент времени. Стрелками укажите направление их вращения. Вычислите их среднюю угловую скорость  $\omega_s$ . 0.8pt

Пусть полная напряженность электрического поля на середине расстояния между анодом и катодом равна среднему значению напряженности постоянного поля. Считайте, что спицы направлены радиально. Радиусы анода и катода равны  $b$  и  $a$  соответственно (рис. 4).

- A.7** Оцените, какое постоянное напряжение  $V_0$  нужно, чтобы магнетрон работал в режиме, описанном в этой части задачи. (Найденное выражение будет соответствовать минимальному значению напряжения; оптимальное напряжение несколько выше.) 1.1pt

### Часть В. Взаимодействие микроволнового излучения с молекулами воды (3.4 балла)

В этой части задачи обсуждается нагрев еды с помощью микроволнового излучения.



Электрический диполь представляет собой два одинаковых по модулю и противоположных по знаку заряда  $q$  и  $-q$ , расположенных на небольшом расстоянии  $d$  друг от друга. Вектор дипольного момента направлен от отрицательного заряда к положительному, а его модуль равен  $p = qd$ .

Пусть одиночный диполь  $\vec{p}(t)$  помещен в переменное электрическое поле  $\vec{E}(t) = E(t)\hat{x}$ . Модуль дипольного момента постоянен, т.е.  $p_0 = |\vec{p}(t)|$ . Угол между векторами дипольного момента и напряженности поля равен  $\theta(t)$ .

- B.1** Найдите модуль момента сил  $\tau(t)$ , действующих на диполь со стороны поля. Найдите мгновенную мощность  $H_i(t)$ , сообщаемую диполю. Запишите их с помощью величин  $p_0$ ,  $E(t)$ ,  $\theta(t)$  и их производных. 0.5pt

Молекулы воды можно представить электрическими диполями. Из-за сильных водородных связей между молекулами воды в жидкости нельзя считать воду совокупностью независимых диполей. Таким образом необходимо использовать вектор поляризации  $\vec{P}(t)$ , который равен среднему дипольному моменту единицы объема вещества. Вектор поляризации  $\vec{P}(t)$  направлен параллельно вектору напряженности локально приложенного переменного электрического поля (излучения)  $\vec{E}(t)$ . Также он осциллирует во времени с амплитудой, пропорциональной амплитуде напряженности электрического поля, но с фазовым сдвигом  $\delta$ .

Локальное электрическое поле в некоторой точке нагреваемой воды равно  $\vec{E}(t) = E_0 \sin(\omega t)\hat{x}$ , где  $\omega = 2\pi f$ , поляризует воду  $\vec{P}(t) = \beta \varepsilon_0 E_0 \sin(\omega t - \delta)\hat{x}$ , где безразмерная постоянная  $\beta$  определяется свойствами воды.

- B.2** Найдите усредненную по времени мощность  $\langle H(t) \rangle$ , поглощаемую единицей объема воды. Усреднение по времени периодической величины  $f(t)$  за период  $T$  определяется как 0.5pt

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt. \quad (1)$$

Относительная диэлектрическая проницаемость воды (на обсуждаемых частотах) равна  $\varepsilon_r$ , соответствующий показатель преломления воды равен  $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ . Мгновенная плотность энергии электрического поля равна  $\frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0 E^2$ . Усредненные по времени плотности энергии электрического и магнитного поля равны.

- B.3** Обозначим усредненную по времени плотность потока энергии излучения  $I(z)$  (средняя мощность излучения проходящая через единицу площади). Здесь  $z$  — это глубина проникновения излучения в воду (излучение распространяется вдоль оси  $z$ ). Найдите зависимость  $I(z)$ . В вашем ответе может фигурировать плотность потока энергии на поверхности воды  $I(0)$ . 1.1pt

Фазовый сдвиг  $\delta$  — результат взаимодействия между молекулами воды. Он зависит от безразмерных величин  $\varepsilon_\ell$  (характеризующая диссипацию) и  $\varepsilon_r$  (диэлектрическая проницаемость). Обе величины зависят от частоты излучения  $\omega$  и температуры.

Формула для фазового сдвига  $\text{tg } \delta = \varepsilon_\ell / \varepsilon_r$ . Когда  $\delta$  достаточно мала, электрическое поле на глубине



$z$  рассчитывается следующим образом:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{1}{2} n k_0 z \tan \delta} \sin(n k_0 z - \omega t) \quad (2)$$

где  $k_0 = \omega/c$  и  $c = 3.0 \cdot 10^8$  м/с - скорость света в вакууме.

**В.4** В приближении  $\tan \delta \approx \sin \delta$  найдите значение коэффициента  $\beta$ , определенного в пункте В2. Ответ выразите через заданные выше величины. 0.6pt

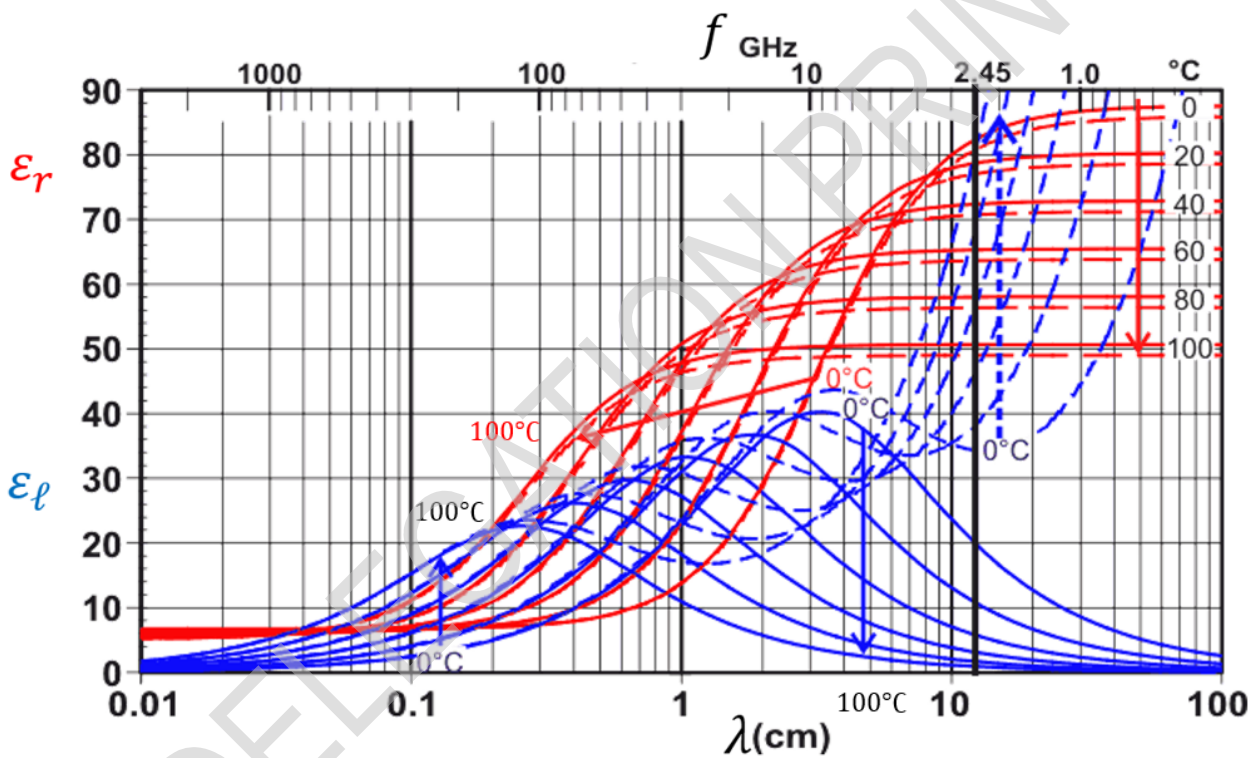


Рис. 5

На рисунке 5 изображены зависимости  $\epsilon_l$  (синие линии) и  $\epsilon_r$  (красные линии) для чистой (сплошные линии) и соленой (пунктирные линии) воды. Зависимости указанных величин от частоты приведены для разных температур разных температурах. Обсуждаемая в задаче угловая частота  $\omega = 2\pi \cdot 2.45 \cdot 10^9$  1/с отмечена жирной черной вертикальной линией. Далее мы рассматриваем излучение только на этой частоте.



**B.5** По данным на рисунке 5 ответьте на следующие вопросы:

0.7pt

1. Найдите глубину проникновения  $z_{1/2}$  в воду при температуре  $20^\circ\text{C}$ . Под глубиной проникновения здесь понимается такое расстояние, на котором поглощаемая мощность в единице объема уменьшается в два раза по сравнению с ее значением при  $z = 0$
2. Укажите в листе ответов как меняется глубина проникновения микроволнового излучения в воде при изменении температуры. Она увеличивается, уменьшается или не изменяется при увеличении температуры?
3. Укажите в листе ответов как меняется глубина проникновения микроволнового излучения в соленой воде при изменении температуры. Она увеличивается, уменьшается или не изменяется при увеличении температуры?

DELEGATION PRINT

## Термоакустический двигатель (10 баллов)

Термоакустический двигатель превращает тепловую энергию в механическую, а именно, в энергию звуковых волн. Как и другие тепловые машины, он может работать в обратном направлении, став холодильной машиной, т.е. с помощью звука передавать тепло от холодного тела к горячему. Т.к. двигатель функционирует на высокой частоте, теплопередача уменьшается, а также двигателю не требуется рабочая камера. В отличие от других двигателей, термоакустический двигатель не имеет движущихся частей, кроме рабочего тела.

К.п.д. термоакустического двигателя обычно ниже, чем у других двигателей, но они обладают рядом преимуществ при сборке, отладке и обслуживанию. В этой задаче мы рассмотрим генерацию звуковой энергии в системе.

### Часть А. Звуковая волна в закрытой трубе (3.7 балла)

Рассмотрим теплоизолированную трубу длиной  $L$  и площадью поперечного сечения  $S$ . Ось трубы совпадает с осью  $x$ . Координаты концов трубы —  $x = 0$  и  $x = L$ . Труба заполнена идеальным газом и закрыта с обоих концов. В равновесии температура газа  $T_0$ , давление  $p_0$  и плотность  $\rho_0$ . Предполагается, что вязкость отсутствует, а движение газа происходит только вдоль оси  $x$ . Свойства газа однородны в направлениях  $y$  и  $z$ , перпендикулярных  $x$ .



Рис. 1

- A.1** Если образуется стоячая волна, элементы газа колеблются в направлении  $x$  с циклической частотой  $\omega$ . Амплитуда колебаний зависит от положения равновесия  $x$  каждого элемента вдоль трубы. Продольное смещение каждого элемента газа от его положения в состоянии покоя  $x$  дается формулой

$$u(x, t) = a \sin(kx) \cos(\omega t) = u_1(x) \cos(\omega t) \quad (1)$$

(заметим, что  $u$  описывает смещение рассматриваемой порции газа)

Здесь  $a \ll L$  - положительная постоянная,  $k = 2\pi/\lambda$  - волновое число и  $\lambda$  - длина волны. Чему равна максимально возможная длина волны  $\lambda_{\max}$ ?

В этой задаче рассмотрим моду колебаний, соответствующую длине волны  $\lambda = \lambda_{\max}$ .

Рассмотрим частицу газа, находящуюся в состоянии покоя между  $x$  и  $x + \Delta x$  ( $\Delta x \ll L$ ). В результате волны смещения из задания А.1, порция газа колеблется вдоль оси  $x$ . При этом изменяется её объем и другие термодинамические характеристики.

В последующих заданиях считайте изменения всех термодинамических величин малыми по сравнению с равновесными значениями.

- A.2** Объем порции газа  $V(x, t)$  колеблется около равновесного значения  $V_0 = S\Delta x$  согласно формуле 0.5pt

$$V(x, t) = V_0 + V_1(x) \cos(\omega t). \quad (2)$$

Получите выражение для  $V_1(x)$ , выразив его через  $V_0$ ,  $a$ ,  $k$  и  $x$ .

- A.3** Считайте, что отклонение давления от его равновесного значения из-за звуковой волны имеет вид 0.7pt

$$p(x, t) = p_0 - p_1(x) \cos(\omega t). \quad (3)$$

Рассматривая силы, действующие на порцию газа, вычислите амплитуду  $p_1(x)$  колебаний давления, выразив ее через координату  $x$ , равновесную плотность  $\rho_0$ , амплитуду смещения  $a$  и параметры волны  $k$  и  $\omega$ .

При звуковых частотах теплопроводностью газа можно пренебречь. Будем считать процессы расширения и сжатия газа адиабатическими. То есть выполняется уравнение  $pV^\gamma = \text{const}$ , где  $\gamma$  — показатель адибаты.

- A.4** Используйте приведенное выше соотношение и результаты предыдущих пунктов, чтобы получить выражение для скорости звуковых волн  $c = \omega/k$  в трубе. Выразите свой ответ через  $p_0$ ,  $\rho_0$  и показатель адибаты  $\gamma$ . 0.3pt

- A.5** Изменение температуры газа в процессе адиабатического расширения и сжатия в результате воздействия звуковой волны имеет вид: 0.7pt

$$T(x, t) = T_0 - T_1(x) \cos(\omega t). \quad (4)$$

Вычислите амплитуду  $T_1(x)$  колебаний температуры, выразив ее через  $T_0$ ,  $\gamma$ ,  $a$ ,  $k$  и  $x$ .

- A.6** Только в этом пункте рассмотрим слабое тепловое взаимодействие между трубой и газом. Таким образом, стоячая волна остается неизменной, но газ может обмениваться небольшим количеством тепла с трубой. Нагревом, обусловленным вязкостью, можно пренебречь. Для каждой точки на рис. 2 (A, C на концах трубы, B посередине) укажите, будет ли температура трубы увеличиваться, уменьшаться или не будет изменяться в течение длительного времени. 1.2pt

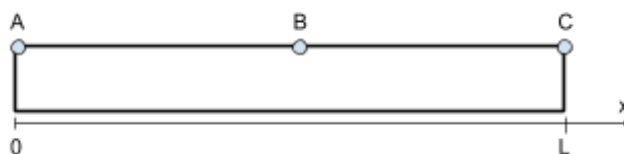


Рис. 2

### Часть В. Усиление звуковой волны, вызванное внешним тепловым контактом (6.3 балла)

Стопка тонких твердых пластин установлена внутри трубы. Пластины в стопке установлены параллельно оси трубы, так что они не мешают потоку газа вдоль трубы. Середина стопки расположена на  $x_0 = L/4$ , ширина стопки  $\ell \ll L$  вдоль оси трубы; стопка заполняет полностью сечение трубы. Левый край стопки находится на  $x_H = x_0 - \ell/2$ . С помощью внешнего теплового резервуара его температура поддерживается равной  $T_H = T_0 + \tau/2$ . В то же время, правый край стопки находится на  $x_C = x_0 + \ell/2$ , и его температура поддерживается равной  $T_C = T_0 - \tau/2$ .

Стопка пластин допускает продольный тепловой поток, поддерживающий постоянный градиент температуры между краями, так что  $T_{\text{plate}}(x) = T_0 - \frac{x-x_0}{\ell}\tau$ .

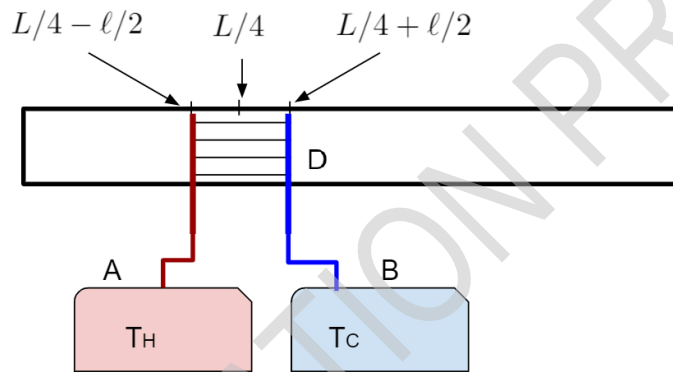


Рис. 3. Схема системы. (A) и (B) обозначают соответственно горячий и холодный тепловые резервуары. (D) - стопка пластин.

Для анализа влияния теплового контакта между стопкой пластин и газом на звуковые волны в трубе, предположим следующее:

- Все изменения термодинамических величин малы по сравнению с невозмущенными величинами.
- Система работает на основной моде стоячей волны при максимально возможной длине волны. Она очень слабо изменяется из-за наличия стопки пластин.
- Стопка пластин значительно короче длины волны  $\ell \ll \lambda_{\text{max}}$  и может быть расположена достаточно далеко от узлов (нулей) смещения и давления, так что смещение  $u(x, t) \approx u(x_0, t)$  и давление  $p(x, t) \approx p(x_0, t)$  могут считаться постоянными по всей длине стопки.
- Краевыми эффектами, вызванными порциями газа, входящими в стопку пластин и выходящими из неё можно пренебречь.
- Разница температур между краями стопки пластин, т.е. между горячим и холодным резервуарами, мала по сравнению с абсолютной температурой:  $\tau \ll T_0$ .
- Перенос тепла теплопроводностью через газ, стопку пластин и ограничивающую трубу пренебрежимо мал по сравнению с конвекцией в газе и теплопередачей между газом и пластинами стопки.

- B.1** Рассмотрим конкретную частицу газа в районе стопки пластин, первоначально между  $x_0 = L/4$  и  $x_0 + \Delta x$ . В ходе движения частицы внутри стопки пластин, местная температура, которую частица ощущает от рядом расположенной части стопки пластин изменяется следующим образом:

$$T_{\text{env}}(t) = T_0 - T_{\text{st}} \cos(\omega t). \quad (5)$$

Выразите  $T_{\text{st}}$  через  $a$ ,  $\tau$  и  $\ell$ .

- B.2** Выше какой критической разницы температур  $\tau_{\text{cr}}$  газ будет передавать тепло от горячего резервуара к холодному? Выразите  $\tau_{\text{cr}}$  через  $T_0$ ,  $\gamma$ ,  $k$  и  $\ell$ .

- B.3** Получите приближенное выражение для потока тепла в частицу газа  $\frac{dQ}{dt}$  как линейную функцию скоростей изменения объема и давления. Выразите свой ответ через скорость изменения объема  $\frac{dV}{dt}$ , скорость изменения давления  $\frac{dp}{dt}$ , невозмущенные равновесные значения давления и объема частицы газа  $p_0$ ,  $V_0$ , и показатель адиабаты  $\gamma$ . (Вы можете использовать выражение для молярной теплоемкости при постоянном объеме  $c_v = \frac{R}{\gamma-1}$ , где  $R$  - газовая постоянная.)

Ограниченный тепловой поток между частицей газа и стопкой пластин приводит к сдвигу фаз между колебаниями давления и объема частицы газа. Мы увидим, как это приводит к появлению работы.

Пусть поток тепла между частицей газа и стопкой пластин пропорционален разнице температур между частицей газа и расположенным рядом элементом стопки пластин, приблизительно  $\frac{dQ}{dt} = \beta V_0 (T_{\text{st}} - T_1) \cos(\omega t)$ . Здесь  $T_1$  и  $T_{\text{st}}$  - амплитуды колебаний температуры частицы газа и рядом расположенной стопки пластин из заданий A.5 и B.1, соответственно. Считайте, что при рабочих частотах двигателя, изменение температуры газа в результате этого теплового потока несущественно по сравнению как с  $T_1$ , так и  $T_{\text{st}}$ .

- B.4** Для вычисления работы рассмотрим изменение объема движущейся порции газа в результате теплового контакта с стопкой пластин. Запишем давление и объем порции газа в виде:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_a \sin(\omega t) - p_b \cos(\omega t), \\ V &= V_0 + V_a \sin(\omega t) + V_b \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (6)$$

При заданных  $p_a$  и  $p_b$ , найдите коэффициенты  $V_a$  и  $V_b$ . Выразите свой ответ через  $p_a$ ,  $p_b$ ,  $p_0$ ,  $V_0$ ,  $\gamma$ ,  $\tau$ ,  $\tau_{\text{cr}}$ ,  $\beta$ ,  $a$  и  $\ell$ .

- B.5** Вычислите акустическую работу, отнесенную к единице объема  $w$ , произведенную частицей газа за один цикл. Проинтегрируйте по объему стопки пластин для получения полной мощности  $W_{\text{tot}}$ , генерируемой газом. Выразите  $W_{\text{tot}}$  через  $\gamma$ ,  $\tau$ ,  $\tau_{\text{cr}}$ ,  $\beta$ ,  $\omega$ ,  $a$ ,  $k$  и  $S$ .



**B.6** Получите выражение для тепла  $Q_{\text{tot}}$ , переданного за цикл от левого края пластины  $x = x_0$  к правому краю. Выразите свой ответ через  $\tau$ ,  $\tau_{\text{cr}}$ ,  $\beta$ ,  $\omega$ ,  $a$ ,  $S$ ,  $l$ .  
(Подсказка: для потока тепла при конвекции Вы можете использовать формулу  $j = Q \frac{du}{dt}$ ) 0.8pt

**B.7** Определите к.п.д. термоакустического двигателя. К.п.д. определяется как отношение произведенной акустической работы к теплу, полученному из резервуара. Выразите свой ответ через разницу температур  $\tau$  между горячим и холодным резервуарами, критическую разность температур  $\tau_{\text{cr}}$  и к.п.д. цикла Карно  $\eta_c = 1 - T_C/T_H$ . 0.6pt

DELEGATION PRINT

## Zero-length springs and slinky coils – Solution

### Part A: Statics

A.1 The force  $F$  causes the spring to change its length from  $L_0$  to  $L$ . Since equal parts of the spring are extended to equal lengths, we get:  $\frac{\Delta y}{\Delta l} = \frac{L}{L_0} \rightarrow \Delta y = \frac{L}{L_0} \Delta l$ .

Since  $L = \max\left\{\frac{F}{k}, L_0\right\}$ , we get  $\Delta y = \max\left\{\frac{F}{kL_0} \Delta l, \Delta l\right\}$ . From this result we see that any piece of length  $\Delta l$  the spring behaves as a ZLS with spring constant  $k^* = k \frac{L_0}{\Delta l}$ .

A.2 Let us compute the work of the force. From Task A.1:  $dW = F(x)dx = \frac{kL_0}{\Delta l} x dx$ .

Hence,  $\Delta W = \int_{\Delta l}^{\Delta y} \frac{kL_0}{\Delta l} x dx = \frac{kL_0}{\Delta l} \frac{x^2}{2} \Big|_{\Delta l}^{\Delta y} = \frac{kL_0}{2\Delta l} (\Delta y^2 - \Delta l^2)$ .

A.3. At every point along the statically hanging spring the weight of the mass below is balanced by the tension from above. This implies that at the bottom of the spring there is a section of length  $l_0$  whose turns are still touching each other, as their weight is insufficient to exceed the threshold force  $kL_0$  to pull them apart. The length  $l_0$  can be derived from the equation:

$$\frac{l_0}{L_0} Mg = kL_0, \text{ hence } l_0 = \frac{kL_0^2}{Mg} = \alpha L_0.$$

For  $l > l_0$ , a segment of the unstretched spring between  $l$  and  $l + dl$  feels a weight of  $\frac{l}{L_0} Mg$  from beneath, which causes its length to stretch from  $dl$  to  $dy = \frac{F}{kL_0} dl = \frac{l}{L_0} Mg \frac{dl}{kL_0} = \frac{Mg}{kL_0^2} l dl = \frac{l}{l_0} dl$ .

Integration of the last expression over the stretched region, up to the point  $L_0$ , gives its height when the spring is stretched

$$H = l_0 + \int_{l_0}^{L_0} \frac{l}{l_0} dl = l_0 + \frac{l^2}{2l_0} \Big|_{l_0}^{L_0} = l_0 + \frac{1}{2l_0} (L_0^2 - l_0^2) = \frac{L_0^2}{2l_0} + \frac{l_0}{2} = \frac{L_0}{2} \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right)$$



## Part B: Dynamics

B.1. From Task A.3 we have  $H(l) = \frac{l^2}{2l_0} + \frac{l_0}{2}$ . We now calculate the position of the center of mass of the suspended spring. The contribution of the unstretched section of height  $l_0$  at the bottom, having a mass of  $\frac{l_0}{L_0}M = \alpha M$ , is  $\alpha M \frac{l_0}{2}$ . The position of the center of mass is obtained by summing the contributions of its elements:

$$\begin{aligned} H_{cm} &= \frac{1}{M} \left[ \frac{l_0}{2} \alpha M + \int_{l_0}^{L_0} H(l) dm \right] = \frac{1}{M} \left[ \frac{\alpha L_0}{2} \alpha M + \int_{l_0}^{L_0} \left( \frac{l^2}{2l_0} + \frac{l_0}{2} \right) \frac{M dl}{L_0} \right] \\ &= \frac{\alpha^2 L_0}{2} + \frac{1}{L_0} \left[ \frac{l^3}{6l_0} + \frac{l_0}{2} l \right]_{l_0}^{L_0} = \frac{\alpha^2 L_0}{2} + \frac{1}{L_0} \left[ \frac{L_0^3 - l_0^3}{6l_0} + \frac{l_0}{2} (L_0 - l_0) \right] \end{aligned}$$

Where we have used  $dm = \frac{dl}{L_0} M$ . Substituting  $l_0 = \alpha L_0$  yields

$$H_{cm} = L_0 \left[ \frac{1}{6\alpha} - \frac{\alpha^2}{6} + \frac{\alpha}{2} \right]$$

When the spring is contracted to its free length  $L_0$ , its center of mass is located at  $\frac{L_0}{2}$ . From the falling of the center of mass at acceleration  $g$  we get:

$$\frac{g}{2} t_c^2 = H_{cm} - \frac{L_0}{2} = L_0 \left[ \frac{1}{6\alpha} - \frac{\alpha^2}{6} + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \right] = \frac{L_0}{6\alpha} (1 - \alpha)^3$$

Hence,  $t_c = \sqrt{\frac{L_0}{3g\alpha} (1 - \alpha)^3}$ .

For  $k = 1.02$  N/m,  $L_0 = 0.055$  m,  $M = 0.201$  kg, and  $g = 9.80$  m/s<sup>2</sup>, we have  $\alpha = 0.0285$ , and  $t_c = 0.245$  s.

B.2. The moving top section of the spring is pulled down by its own weight,  $m_{top}g = Mg \frac{(L_0 - l)}{L_0}$  and also by the tension in the spring below, which is equal to the weight  $Mgl/L_0$  of the stationary section of the spring. Thus, the moving top section experiences a constant force  $F = Mg$  throughout its whole fall. Another way to see that, is that a total force of  $Mg$  is exerted on the spring, but only the moving part experiences it. Let's calculate the position of the center of mass at equilibrium of the upper part, i.e., all points with  $l' > l$  for some  $l > l_0$ . From part A,

the position of a small portion  $\Delta l'$  with coordinate  $l'$  is:  $H(l') = \frac{l'^2}{2l_0} + \frac{l_0}{2}$  and the center of mass of this part is:

$$\begin{aligned} H_{cm-upper-i} &= \frac{L_0}{M(L_0 - l)} \int_l^{L_0} H(l') dm = \frac{L_0}{M(L_0 - l)} \int_l^{L_0} \left( \frac{l'^2}{2l_0} + \frac{l_0}{2} \right) dm \\ &= \frac{L_0}{M(L_0 - l)} \int_l^{L_0} \left( \frac{l'^2}{2l_0} + \frac{l_0}{2} \right) \frac{M dl'}{L_0} = \frac{1}{(L_0 - l)} \int_l^{L_0} \left( \frac{l'^2}{2l_0} + \frac{l_0}{2} \right) dl' \\ &= \frac{1}{(L_0 - l)} \left[ \frac{l'^3}{6l_0} + \frac{l_0 l'}{2} \right]_l^{L_0} = \frac{L_0^2 + L_0 l + l^2}{6l_0} + \frac{l_0}{2} \end{aligned}$$

The position of the upper part of CM when it contracts to a length  $L_0 - l$  is  $H_{cm-upper-f} = \frac{l^2}{2l_0} + \frac{l_0}{2} + \frac{1}{2}(L_0 - l)$ . The change in the CM during the contraction process is:  $\Delta H_{cm-upper} = H_{cm-upper-i} - H_{cm-upper-f} = \frac{L_0^2 + L_0 l - 2l^2}{6l_0} - \frac{1}{2}(L_0 - l) = \frac{(L_0 - l)(L_0 + 2l)}{6l_0} - \frac{1}{2}(L_0 - l)$ .

The acceleration of the CM of the upper part is  $a_{CM} = \frac{FL_0}{M(L_0 - l)} = \frac{gL_0}{L_0 - l}$ .

From the work energy theorem we get the equation  $v_{upper-f}^2 = 2a_{CM}\Delta H_{cm-upper}$ , hence

$$\begin{aligned} v_{upper-f}^2 &= 2 \frac{gL_0}{L_0 - l} \left[ \frac{(L_0 - l)(L_0 + 2l)}{6\alpha L_0} - \frac{1}{2}(L_0 - l) \right] = 2g \left[ \frac{L_0 + 2l}{6\alpha} - \frac{1}{2}L_0 \right] \\ &= \frac{2g}{3\alpha} l + \left( \frac{1}{3\alpha} - 1 \right) gL_0 \end{aligned}$$

Therefore,  $A = \frac{2g}{3\alpha}$  and  $B = \left( \frac{1}{3\alpha} - 1 \right) gL_0$ .

Note that for  $l = L_0$ , we have  $v_{upper-f}^2 = L_0 g \frac{1-\alpha}{\alpha}$  and for  $l = l_0 = \alpha L_0$ , we get  $v_{upper-f}^2 = L_0 g \frac{1-\alpha}{3\alpha}$ , hence, the moment we release the spring its velocity is finite (not zero, the meaning is that it accumulate this velocity in time that is much shorter than the contracting time  $t_c$ ) and it decreases to  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  of the initial value when  $l = l_0$ .

B.3. Note that even though the center of mass of the spring accelerates downwards constantly, the moving top section actually decelerates, while the position of the center of mass moves down the spring. The speed of the top section  $v(l)$ , calculated in Task B2, decreases and

approaches the value  $\sqrt{A\alpha L_0 + B}$  immediately before it attaches to the bottom section of height  $l_0 = \alpha L_0$ , which was unstretched and at rest. Once the moving top section attaches to the resting bottom section, its momentum is shared between both sections, so the speed further decreases just before the whole spring starts accelerating downwards as a single mass. Thus, the minimum speed is that of the whole spring immediately after its full collapse. From momentum conservation, we have

$$Mv_{min} = m_{top}v(l_0) = M\left(1 - \frac{l_0}{L_0}\right)\sqrt{A\alpha L_0 + B}$$

$$v_{min} = (1 - \alpha)\sqrt{A\alpha L_0 + B}$$

### Part C: Energetics

C.1. From the moment the spring is released, the acceleration of its center of mass is governed by the external force  $Mg$  and therefore the gravitational potential energy of the spring is fully converted into the kinetic energy of the center of mass of the spring, which just before hitting the ground is equal to the kinetic energy of the spring.

All that is left is the elastic energy stored in the spring, which is converted into heat, sound, etc. To calculate it, we consider the elastic energy stored in a segment  $dh$  of the stretched spring, which when unstretched lies between  $l$  and  $l + dl$ , using the result of Task A.2,  $\Delta W = \frac{kL_0}{2\Delta l}(\Delta l_2^2 - \Delta l^2)$ , by choosing  $\Delta l = dl$  and  $\Delta l_2 = dy$ , and using  $dy = \frac{l}{l_0}dl$  (which was obtained in Task A.3), we get:

$dW = \frac{kL_0}{2}\left(\frac{l^2}{l_0^2} - 1\right)dl$ . Integrating from  $l_0$  to  $L_0$  we find

$$\begin{aligned} W &= \int_{l_0}^{L_0} \frac{kL_0}{2}\left(\frac{l^2}{l_0^2} - 1\right)dl = \frac{kL_0}{2}\left[\frac{l^3}{3l_0^2} - l\right]_{l_0}^{L_0} = \frac{kL_0}{2}\left(\frac{L_0^3 - l_0^3}{3l_0^2} - (L_0 - l_0)\right) \\ &= \frac{kL_0^2}{2}\left(\frac{1 - \alpha^3}{3\alpha^2} - (1 - \alpha)\right) = \frac{kL_0^2}{6\alpha^2}(1 - \alpha)^2(2\alpha + 1) \\ &= MgL_0\frac{(1 - \alpha)^2(2\alpha + 1)}{6\alpha} \end{aligned}$$

## The Physics of a Microwave Oven – Solution

### Part A: The structure and operation of a magnetron

A.1. The frequency of an LC circuit is  $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ . If the total electric current flowing along the boundary of the cavity is  $I$ , it generates a magnetic field whose magnitude (by the assumptions of the question) is  $B = \frac{\mu_0 I}{2a}$ , and a total magnetic flux equal to  $\Phi = B \cdot A = \frac{\mu_0 I d}{2}$ , hence the inductance of the resonator is  $L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 d}{2}$ . Approximating the capacitor as a plate capacitor, its capacitance is  $C = \frac{\epsilon_0 d}{a}$ . Putting everything together, we find

$$f_{est} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_0 d}{2} \frac{\epsilon_0 d}{a}}} = \frac{1}{2\pi} \frac{c}{d} \sqrt{\frac{d}{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{2\pi} \frac{3 \cdot 10^8}{d} \sqrt{\frac{1}{3.6}} \approx 2.01 \cdot 10^9 \frac{1}{d}$$

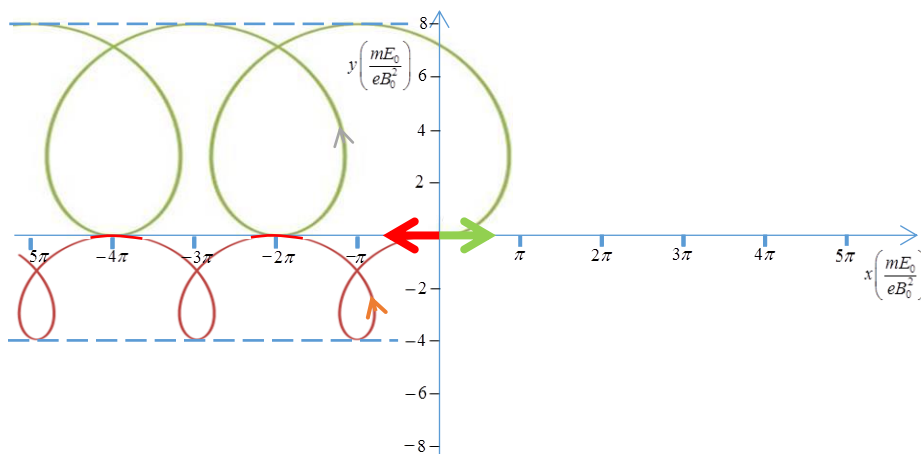
Hz

A.2. Denoting the electron velocity by  $v$ , in this case the total force applied on it is

Let us write  $v = v_d + v_c$ , with  $v_d$  being the drift velocity of a charged particle in the crossed electric and magnetic fields (the velocity at which the electric and magnetic forces cancel each other exactly). Then  $v_c$  is the velocity of the circular motion. Thus, in a frame moving at the drift velocity  $v_d$ , the electron trajectory is a circle with constant-magnitude velocity  $v_c$ , and radius  $r = \frac{m v_c}{e B}$ . In the lab frame this circular motion is superimposed upon the drift at the constant velocity  $v_d$ . Hence:

1. For  $v_d = 0$  we find  $r = \frac{m v_c}{e B}$  and  $\omega = \frac{e B}{m}$ .
2. For  $v_d = v$  we find  $r = \frac{m v_c}{e B}$  and  $\omega = \frac{e B}{m}$ .

This information, together with the independence of the period of the circular motion on  $v_d$  allows us to plot the electron trajectory in both cases (green and red, for cases 1 and 2, respectively):



A.3. The velocity of the electron in a frame of reference where the motion is approximately circular is  $u'$ . From A.2 we get that  $u_D \approx u' \approx v_{\max}$  and  $u_D \approx u' \approx v_{\min}$ , hence

$$u' \approx (v_{\max} + v_{\min})/2 \approx v_{\max}.$$

The radius of the circular motion of the electron in this frame is  $r \approx \frac{m u'}{e B_0} \approx \frac{m v_{\max}}{e B_0}$ . The maximal velocity is that corresponding to a kinetic energy,  $K_{\max} \approx 800$  eV.

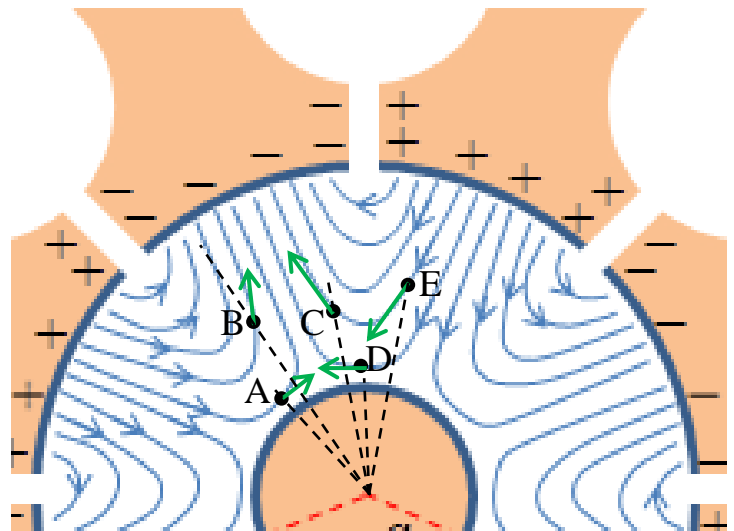
Substituting we find  $r \approx \frac{m}{e B} \sqrt{\frac{2eV}{m}} \approx \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mV}{e}} \approx \frac{1}{0.3} \sqrt{\frac{2 \cdot 29.1 \cdot 10^{31} \cdot 800}{1.6 \cdot 10^{19}}} \approx 3.18 \cdot 10^{-4} \text{m} \approx 0.3 \text{mm}.$

Since this maximal radius is much smaller than the distance between the anode and the cathode, we may ignore the circular component of the electronic motion, and approximate it as pure drift.

A.4. As just explained, we may approximate the electron motion as pure drift. In task A.2 we have found that the direction of the drift velocity  $\vec{v}_D$  is in the direction of the vector  $\vec{v}_D \perp \vec{E}$ .

Since we are interested in radial component of the drift velocity, the only contribution is from the azimuthal component of the electric field.

The static electric field has no azimuthal component, hence the drift in the radial direction results solely from the azimuthal component of the alternating electric field. What we have to check is if the azimuthal component points clockwise or counterclockwise. From the direction of the field lines it is easy to see (attached figure) that in points A and B the azimuthal component pointing clockwise therefore the electrons there drift towards the cathode, while for points C, D and E the azimuthal component points counterclockwise and the electrons there drift toward the anode.



Therefore the electrons there drift towards the cathode, while for points C, D and E the azimuthal component points counterclockwise and the electrons there drift toward the anode.

Point	toward the anode	toward the cathode	perpendicular to the radius
A		X	
B		X	

C	X		
D	X		
E	X		

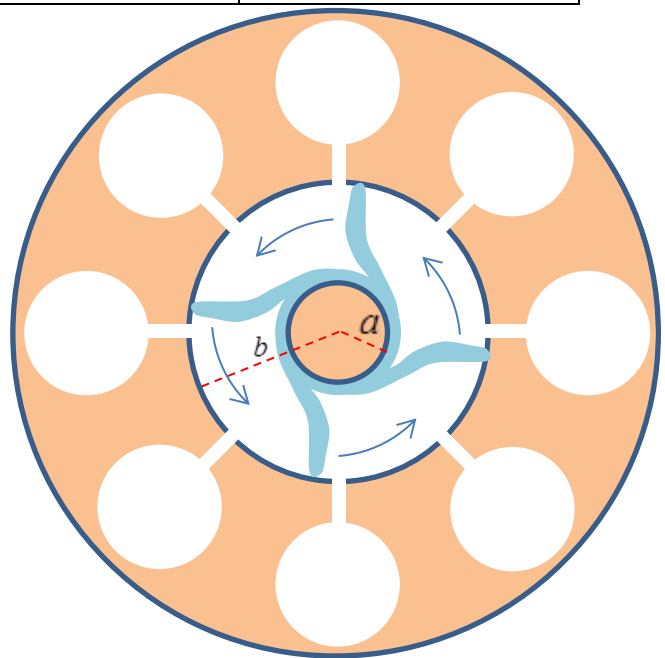
A.5. In this task we need to consider the azimuthal component of the drift velocity, which results from the radial component of the electric field. Since all points are at the same distance from the anode, all electrons experience the same static electric field. Hence only the radial component of the alternating field determines position vectors would increase or decrease: If the radial component of the alternating field points inwards (towards the cathode), the azimuthal drift velocity will be positive (counterclockwise) and vice versa. Hence the electrons at A, B and C drift closer to each other in terms of angles, while those at D, E and F drift away from each other.

points	angle decreases	angle increases	indeterminate
AB	X		
BC	X		
CA	X		
DE		X	
EF		X	
DF		X	

A.6. Spokes will be created only in the regions where focusing occurs. By the result of the previous task, there are four spokes, as indicated in the attached Figure.

The electron drift sets the spokes in a counterclockwise rotation. The frequency of the alternating field is  $\nu$  GHz. By the time the alternating field flipped its sign (half a period), each spoke moves to the next cavity, corresponding to an angle of  $\theta$ . Therefore, the angular velocity of each spoke is  $\omega$ .

Each spoke performs a full rotation around the magnetron after four periods of the alternating field.





A.7. The magnitude of the electric field in the region considered,  $E$ , is the magnitude of the static field, that is,  $E_0$ , giving rise to an azimuthal drift velocity of magnitude  $v_0$ . Equating  $v_0$  with the angular velocity found in the previous task we find  $v_0 = \frac{d}{dt} B_0 (b^2 - a^2) / 4$ .

**Part B: The interaction of microwave radiation with water molecules**

B.1. The torque at time  $t$  is given by  $\tau = p \times E$ , hence the instantaneous power delivered to the dipole by the electric field is

$$H_i(t) = \dot{h}(t) = \dot{p}_0 E(t) \sin(\omega t) = E(t) \frac{d}{dt} [p_0 \cos(\omega t)] = -E(t) \omega p_0 \sin(\omega t)$$

B.2. Since the average dipole density (hence the average of each molecular dipole) is parallel to the field, the absorbed power density is (angular brackets,  $\langle \dots \rangle$ , denote average over time)

$$\langle H(t) \rangle = \left\langle E_0 \sin(k_f t) \frac{dP_x}{dt} \right\rangle = \left\langle E_0 \sin(k_f t) \frac{d}{dt} [p_0 \cos(\omega_f t - k_f z)] \right\rangle = -\omega_f E_0 p_0 \langle \sin(\omega_f t - k_f z) \cos(\omega_f t - k_f z) \rangle = -0.5 E_0^2 p_0 \omega_f \langle \sin(2\omega_f t - 2k_f z) \rangle = 0.5 E_0^2 \omega_f p_0 \sin$$

B.3. The energy density of the electromagnetic field at penetration depth  $z$ , which is twice the electric energy density, is  $u = \epsilon_0 E^2$ .

Therefore, the time-averaged flux density at depth  $z$  is:

$$S = -\frac{du}{dz} = -\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 e^{-2\alpha z} \right) = \epsilon_0 E_0^2 \alpha e^{-2\alpha z}$$

where  $c$  is the speed of light in vacuum.  $\alpha$  decreases with  $\omega$  due to the absorbed power calculated in the previous task we find

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{S}{u} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 E_0^2 \alpha e^{-2\alpha z}}{\frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 e^{-2\alpha z}} = \alpha$$

hence  $\alpha = \frac{1}{2} \frac{S}{u}$ .

B.4. Similarly to the previous task, the energy flux corresponding to the given field is

$$S = \langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle = \langle E_0 \sin(k_f t) \frac{dP_x}{dt} \rangle = -\omega_f E_0 p_0 \langle \sin(2\omega_f t - 2k_f z) \rangle = 0.5 E_0^2 \omega_f p_0 \sin$$

Equating the argument of the exponent in the last expression with the result of the previous task, and using the given approximation  $\alpha \approx \frac{1}{2} \frac{S}{u}$  leads to  $\alpha = \frac{1}{2} \frac{S}{u}$ .



B.5.

1. Using previous results, the radiation power per unit area is reduced to half of its value at  $\nu = \nu_0$ . From the given graph, at the given frequency  $\nu_0$  and  $\nu_0$ , hence  $\nu_0$  mm.

We have just found that the penetration depth is proportional to  $\nu^{-1}$ . From the given graph we thus find that:

2. Heating up pure water (continuous lines) decreases  $\nu$  much more significantly than the corresponding decrease of  $\nu$  at the given frequency. Thus, the penetration depth of pure water increases with temperature, allowing deeper penetration of the microwave radiation and heating up the water inner regions.

3. On the contrary, for a soup (dilute salt solution, dashed lines)  $\nu$  at the given frequency increases with temperature while  $\nu$  decreases. Thus, the absorption rate increases with temperature, the penetration depth decreases, and less microwave radiation reaches its inner regions.

material	increases with temp.	decreases with temp.	remains the same
water	X		
soup		X	



## Thermoacoustic engine – Solution

### Part A: Sound wave in a closed tube

A.1. The boundary conditions are:  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ . As a result,  $\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}L\right) = 0$ , so we get  $\lambda_{\max} = 2L$ .

A.2. We get

$$V(x, t) = S \cdot (\Delta x + u(x + \Delta x, t) - u(x, t)) = S\Delta x \cdot (1 + u') = V_0 + V_0 u'.$$

Thus,

$$V(x, t) = V_0 + akV_0 \cos(kx) \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad V_1(x) = akV_0 \cos(kx).$$

A.3. We use Newton's Second Law  $\rho_0 \ddot{u} = -p'$  to deduce  $p' = -\rho_0 \ddot{u} = \rho_0 a \omega^2 \sin(kx) \cos(\omega t)$ , so that

$$p(x, t) = p_0 - a \frac{\omega^2}{k} \rho_0 \cos(kx) \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad p_1(x) = a \frac{\omega^2}{k} \rho_0 \cos(kx).$$

A.4. Using  $a \ll L$ , we obtain  $\frac{p_1(x)}{p_0} = \gamma \frac{V_1(x)}{V_0}$ . As a result,  $\frac{\rho_0 \omega^2}{p_0 k} = \gamma \cdot k$ , and  $c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$ .

A.5. The relative change in  $T(x, t)$  is the sum of the relative changes in  $V(x, t)$  and  $p(x, t)$ . As a result,

$$T_1(x) = \frac{T_0}{p_0} p_1(x) - \frac{T_0}{V_0} V_1(x) = (\gamma - 1) \frac{T_0}{V_0} V_1(x) = ak(\gamma - 1)T_0 \cos(kx).$$

A.6. The movement of the gas parcels inside the tube conveys heat along its boundary. To determine the direction of the convection, we combine the result of Task A.5 and the expression (1) for  $u(x, t)$ . We see that when  $0 < x < \frac{L}{2}$ , the gas is colder when the displacement  $u(x, t)$  is positive. Likewise, when  $\frac{L}{2} < x < L$ , the gas is colder when the displacement  $u(x, t)$  is negative. Hence, heat flows into the gas near the point B, cooling it down, and out of the gas near the points A and C, heating them up.

### Part B: Sound wave amplification induced by external thermal contact

B.1. We get

$$T_{\text{env}}(t) = T_{\text{plate}}(x_0 + u(x_0, t)) = T_0 - \frac{\tau}{\ell} \cdot u(x_0, t),$$

so that:

$$T_{\text{st}} = \frac{a\tau}{\ell} \sin(kx_0) = \frac{a\tau}{\ell\sqrt{2}}.$$

B.2. The gas will convey heat from the hot reservoir to the cold one if the parcels are colder than the environment when  $u(x_0, t) < 0$ , and hotter when  $u(x_0, t) > 0$ . This occurs precisely if

$$T_{\text{st}} > T_1.$$

Plugging in the results of Tasks A.5 and B.1, we get

$$\frac{a\tau_{\text{cr}}}{\ell} \sin(kx_0) = ak(\gamma - 1)T_0 \cos(kx_0) \Rightarrow \tau_{\text{cr}} = k\ell(\gamma - 1)T_0.$$

B.3. Using the first law of thermodynamics, we get

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dE}{dt} + p \frac{dV}{dt}.$$

Plugging in the relation  $E = \frac{1}{\gamma-1}pV$ , we see that:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{d}{dt}(pV) + p \frac{dV}{dt} = \frac{1}{\gamma-1} V \frac{dp}{dt} + \frac{\gamma}{\gamma-1} p \frac{dV}{dt} \approx \frac{1}{\gamma-1} V_0 \frac{dp}{dt} + \frac{\gamma}{\gamma-1} p_0 \frac{dV}{dt}.$$

B.4. We plug the expression for  $\frac{dQ}{dt}$  into the result of Task B.3. This gives:

$$\frac{1}{\gamma-1} V_0 \frac{dp}{dt} + \frac{\gamma}{\gamma-1} p_0 \frac{dV}{dt} = \beta V_0 (T_{\text{st}} - T_1) \cdot \cos(\omega t).$$

We now plug in the data given in equation (6), and get (by considering terms with  $\cos(\omega t)$  and  $\sin(\omega t)$  separately):

$$\frac{1}{\gamma-1} V_0 p_a \omega + \frac{\gamma}{\gamma-1} p_0 V_a \omega = \beta V_0 (T_{\text{st}} - T_1)$$

$$\frac{1}{\gamma-1} V_0 p_b \omega - \frac{\gamma}{\gamma-1} p_0 V_b \omega = 0$$

and thus, we can already express  $V_b$  as

$$V_b = \frac{1}{\gamma} p_b \cdot \frac{V_0}{p_0}.$$

For  $V_a$ , we plug in the results of Tasks B.1 and B.2,

$$T_{\text{st}} - T_1 = \frac{a}{\ell\sqrt{2}} (\tau - \tau_{\text{cr}}),$$

giving:

$$V_a = \left( -\frac{1}{\gamma} p_a - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\beta}{\omega} \frac{a}{\ell\sqrt{2}} (\tau - \tau_{cr}) \right) \cdot \frac{V_0}{p_0}.$$

B.5. We want to integrate the mechanical work generated,  $\int p dV$ , and averaging the result over a long time. To do this, we substitute our expressions (6) for the perturbed  $p$  and  $V$ . Since the average of  $\cos(\omega t)\sin(\omega t)$  is 0, and that of  $\sin^2(\omega t)$  and  $\cos^2(\omega t)$  is  $\frac{1}{2}$ , we get:

$$\frac{V_0}{S\ell} W_{tot} = -\pi \cdot (p_a V_b + p_b V_a).$$

Using the result of B.4, we get

$$\frac{V_0}{S\ell} W_{tot} = \frac{\pi}{\omega} \cdot \frac{\gamma-1}{\gamma} \beta \frac{a}{\ell\sqrt{2}} (\tau - \tau_{cr}) \cdot V_0 \frac{p_b}{p_0}.$$

To leading order,  $p_b$  is the unperturbed wave  $p_b \approx p_1(x_0) = a \frac{\omega^2}{k} \rho_0 \cos(kx_0) = ak\gamma p_0 \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Simplifying, we get

$$W_{tot} = \frac{\pi}{\omega} S \cdot \frac{\gamma-1}{\gamma} \beta \frac{a}{\sqrt{2}} (\tau - \tau_{cr}) \cdot \frac{p_b}{p_0} = \frac{\pi}{2\omega} (\gamma - 1) \beta (\tau - \tau_{cr}) k a^2 S.$$

B.6. We want to compute the amount of heat convection over one cycle. This means that we need to take the amount of heat moving in or out of the parcel, and weigh it by the position of the parcel at that time. Thus, the total heat conveyed by the parcel, integrated along a cycle, is:

$$Q_{tot} = \frac{1}{\Delta x} \int \frac{dQ}{dt} u \cdot dt.$$

This expression can be computed to leading order using  $\frac{dQ}{dt} = \beta V_0 (T_{st} - T_1) \cdot \cos(\omega t)$  and the unperturbed displacement  $u(x_0, t) = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos(\omega t)$ . This gives

$$Q_{tot} = \frac{\pi}{\omega} \beta V_0 (T_{st} - T_1) \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\omega} \beta V_0 \cdot \frac{a}{\ell\sqrt{2}} (\tau - \tau_{cr}) \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\omega} \beta (\tau - \tau_{cr}) \frac{a^2 S}{\ell}.$$

B.7. Dividing the results of Tasks B.5 and B.6, we obtain the expression:

$$\eta = \frac{W_{tot}}{Q_{tot}} = (\gamma - 1) k \ell = \frac{\tau_{cr}}{T_0} = \frac{\tau_{cr}}{\tau} \cdot \frac{\tau}{T_0} = \frac{\tau_{cr}}{\tau} \cdot \eta_c.$$