Частицы от Солнца (Всего баллов: 10)

Фотоны, излучаемые с поверхности Солнца и нейтрино из его ядра несут нам информацию о температурах Солнца, а также могут подтвердить, что Солнце светит благодаря ядерным реакциям.

Во всех пунктах этой задачи примите массу Солнца $M_\odot = 2.00 \times 10^{30}$ кг, его радиус $R_\odot = 7.00 \times 10^{8}$ м, его мощность (энергия, излученная в единицу времени) $L_\odot = 3.85 \times 10^{26}$ Вт, и расстояние от Земли до Солнца $d_\odot = 1.50 \times 10^{11}$ м.

Примечание:

(i) $\int xe^{ax}dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right)e^{ax} + \text{ const}$

(ii) $\int x^2e^{ax}dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)e^{ax} + \text{ const}$

(iii) $\int x^3e^{ax}dx = \left(\frac{x^3}{a} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{6x}{a^3} - \frac{6}{a^4}\right)e^{ax} + \text{ const}$

A Излучение Солнца:

A1	Полагая, что Солнце излучает как абсолютно черное тело, вычислите температуру T_s поверхности Солнца.	**0.3**

Спектр солнечного излучения может быть хорошо апроксимирован распределением Вина. Соответственно, солнечная энергия, приходящая в единицу времени в единичном диапазоне частот на некоторую площадку на Земле, зависит от частоты так:

$$u(\nu) = A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}\frac{2\pi h}{c^2}\nu^3\exp(-h\nu/k_\text{B}T_\text{s}),$$

где ν — это частота и A — площадь поверхности этой площадки, нормальной к направлению падающего излучения.

Рассмотрим солнечный элемент, который представляет собой тонкий диск из полупроводникового материала. Площадь диска — A. Солнечный элемент расположен перпендикулярно направлению падения солнечных лучей.

A2	Используя приближение Вина, выразите полную мощность солнечного излучения P_in, падающего на поверхность солнечного элемента, через A, $R_\odot$, $d_\odot$, T_s и фундаментальные константы c, h, k_B.	**0.3**
A3	Как зависит от частоты число фотонов $n_\gamma(\nu)$, падающих в единицу времени в единичном диапазоне частот на поверхность солнечного элемента? Выразите ответ через $A, R_\odot, d_\odot, T_s, \nu$ и фундаментальные константы c, h, k_B.	**0.2**

У полупроводника, из которого изготовлен солнечный элемент, ширина запрещенной зоны E_g.Используйте следующую модель. Каждый фотон с энергией $E \geq E_\text{g}$ позволяет электрону преодолеть запрещенную зону. Возбужденный электрон может преобразовать в полезную только энергию E_g, остальная часть энергии рассеивается в виде тепла (не может быть преобразована в полезную).

A4	Считайте, что $x_\text{g} = h\nu_\text{g}/k_\text{B}T_\text{s}$, где $E_\text{g} = h\nu_\text{g}$. Выразите полезную мощность солнечного элемента P_out через x_g, A, $R_\odot$, $d_\odot$, T_s и фундаментальные константы c, h, k_B.	**1.0**
A5	Выразите КПД солнечного элемента η через x_g.	**0.2**
A6	Нарисуйте качественный график зависимости η от x_g. Явно укажите значения η при $x_\text{g} = 0$ и $x_\text{g} \to \infty$. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику $\eta(x_\text{g})$ при $x_\text{g} = 0$ и $x_\text{g} \to \infty$?	**1.0**
A7	Пусть x_0 — это такое значение x_g, при котором η максимален. Получите кубическое уравнение, для которого x_0 будет решением. Оцените численное значение x_0 с точностью ± 0.25. Рассчитайте также $\eta(x_0)$.	**1.0**

A8	Ширина запрещенной зоны чистого кремния $E_g = 1.11$ эВ. Рассчитайте КПД кремниевого солнечного элемента η_{Si}, используя это значение.	**0.2**

В конце XIX века Кельвин и Гельмгольц (KH) для объяснения излучения Солнца предложили гипотезу. Они постулировали, что вначале Солнце было очень большим облаком материи массы $M_\odot$ и пренебрежимо малой плотности. Затем Солнце постоянно сжималось. Таким образом, Солнце могло бы светить, постоянно теряя гравитационную потенциальную энергию из-за своего медленного сжатия.

A9	Предположим, что плотность вещества внутри Солнца всюду одинакова. Найдите полную гравитационную потенциальную энергию Солнца Ω, которой оно обладает в наши дни. Выразите ее через G, $M_\odot$ и $R_\odot$.	**0.3**
A10	Считая, что мощность излучения Солнца оставалась постоянной на протяжении всего времени, оцените максимально возможное время τ_{KH} (в годах), на протяжении которого Солнце могло светить согласно гипотезе Кельвина и Гельмгольца.	**0.5**

Значение τ_{KH}, рассчитанное выше, не согласуется с возрастом солнечной системы, который был оценен при изучении метеоритов. Это говорит о том, что источником энергии Солнца не может быть только гравитационная энергия.

B. Нейтрино от Солнца:

В 1938 Ганс Бете предположил, что ядерная реакция синтеза гелия из водорода, происходящая в ядре Солнца, — это его источник энергии. Результирующее уравнение ядерной реакции:

$$4\,{}^1\mathrm{H} \longrightarrow {}^4\mathrm{He} + 2\mathrm{e}^+ + 2\nu_\mathrm{e}$$

Электронные нейтрино ν_e, которые получаются в этой реакции, можно считать безмассовыми. Они вылетают из Солнца и их обнаружение на Земле подтверждает то, что внутри Солнца происходят ядерные реакции. Во всех пунктах этой задачи вы можете пренебречь энергией, уносимой нейтрино.

B1	Рассчитайте плотность потока нейтрино Φ_ν (в м$^{-2}$с$^{-1}$), которые достигают Земли. Энергия, которая выделяется в реакции приведенной выше $\Delta E = 4.0 \times 10^{-12}$ Дж. Считайте, что энергия, излучаемая Солнцем, полностью получается в реакции приведенной выше.	**0.6**

На пути из ядра Солнца к Земле часть электронных нейтрино ν_e превращается в нейтрино других типов ν_x. Эффективность детектирования ν_x составляет 1/6 эффективности детектирования ν_e. Если бы не происходило превращения нейтрино, мы бы в среднем детектировали N_1 нейтрино в год. Однако, из-за этих превращений в среднем детектируется N_2 нейтрино в год (ν_e и ν_x вместе).

B2	Какая доля f частиц ν_e превращается в ν_x? Выразите ответ через N_1 и N_2.	**0.4**

Чтобы детектировать нейтрино, построены огромные детекторы, наполненные водой. Хотя взаимодействия нейтрино с веществом крайне редки, иногда они выбивают электроны из молекул воды в детекторе. Эти высокоэнергетические электроны летят в воде с большими скоростями и при этом излучают свет. До тех пор, пока скорость электрона больше скорости света в воде (показатель преломления n), это излучение, называемое Черенковским излучением, испускается в виде конуса.

B3	Предположим, что при движении в воде электрон, выбитый нейтрино, теряет энергию с постоянной скоростью α в единицу времени. Найдите энергию, переданную электрону E_{imparted} от нейтрино, считая, что после соударения такой электрон испускает Черенковское излучение на протяжении времени Δt. Перед соударением электрон покоился. Выразите ответ через α, Δt, n, m_e и c.	**2.0**

Синтез гелия He из водорода H внутри Солнца происходит в несколько этапов. На одном из промежуточных этапов образуется ядро бериллия ^{7}Be (масса покоя m_{Be}). Оно может поглотить электрон и образовать ядро лития ^{7}Li (масса покоя $m_{Li} < m_{Be}$), испустив ν_e. Соответствующая реакция такая:

$${}^7\mathrm{Be} + \mathrm{e}^- \longrightarrow {}^7\mathrm{Li} + \nu_\mathrm{e}$$

Когда покоящееся ядро бериллия Be ($m_{\mathrm{Be}} = 11.65 \times 10^{-27}$ кг) поглощает покоящийся электрон, испускаемое нейтрино уносит энергию $E_{\nu} = 1.44 \times 10^{-13}$ Дж. Однако, ядра бериллия находятся в постоянном тепловом движении при температуре T_{c} ядра Солнца и представляют собой движущиеся источники нейтрино. В результате, энергия испущенных нейтрино варьируется в среднем на ΔE_{rms} (среднеквадратичное отклонение).

B4	Принимая $\Delta E_{rms} = 5.54 \times 10^{-17}$ Дж, рассчитайте среднеквадратичную скорость теплового движения ядер бериллия V_{Be} и затем оцените температуру T_{c} ядра Солнца. (Подсказка: ΔE_{rms} зависит от среднеквадратичного значения проекции скорости на направление, вдоль которого ведется наблюдение.)	**2.0**

Принцип экстремума **Всего баллов: 10**

A Принцип экстремума в механике

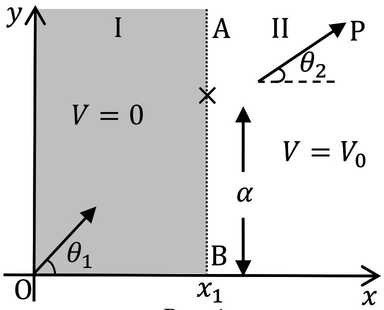


Рис. 1

Рассмотрим гладкую горизонтальную плоскость xy (Рис. 1). Она разделена на две области I и II линией AB, которая удовлетворяет уравнению $x = x_1$. Потенциальная энергия точечной частицы массы m равна нулю ($V = 0$) в области I и $V = V_0$ в области II. Частица начинает двигаться из начала координат O со скоростью v_1 по прямой, направленной под углом θ_1 к оси x. Она достигает точки P в области II, имея скорость v_2, направленную под углом θ_2 к оси x. Силой тяжести и релятивистскими эффектами можно пренебречь во всех пунктах этой задачи.

A1	Получите выражение для v_2 через m, v_1 и V_0.	**0.2**
A2	Выразите v_2 через v_1, θ_1 и θ_2.	**0.3**

Определим величину, называемую действием $A = m\int v(s)ds$, где ds — бесконечно малый элемент длины вдоль траектории частицы массы m, движущейся со скоростью $v(s)$. Интеграл берется вдоль траектории. Например, для частицы, движущейся с постоянной скоростью v по окружности радиуса R, действие A за один оборот равно $2\pi mRv$. Можно показать, что для частицы с постоянной энергией E, из всех возможных траекторий между двумя фиксированными точками реализуется та, вдоль которой действие A, определенное выше, имеет экстремум (минимум или максимум). Это утверждение известно как принцип наименьшего действия (ПНД).

A3	ПНД подразумевает, что траектория частицы, движущейся между двумя фиксированными точками в области постоянного потенциала, — это прямая. Пусть координаты двух фиксированных точек O и P (Рис. 1) — это $(0,0)$ и (x_0, y_0) соответственно; а (x_1, α) — это координаты точки на границе, где частица переходит из области I в область II. Отметим, что величина x_1 фиксирована, и действие A зависит только от координаты α. Получите выражение для действия $A(\alpha)$. Используя ПНД, получите соотношение между v_1/v_2 и упомянутыми координатами.	**1.0**

B Прицип экстремума в оптике

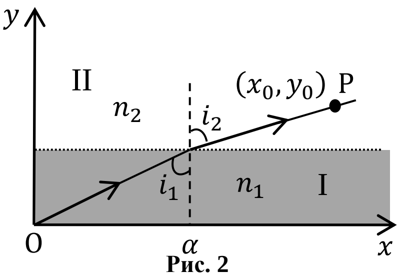


Рис. 2

Луч света переходит из среды I в среду II с показателями преломления n_1 и n_2 соответственно. Эти две среды разделены линией, параллельной оси x. Луч света распространяется под углом i_1 к оси y в среде I и под углом i_2 в среде II. Чтобы получить траекторию луча, воспользуемся другим принципом экстремума (максимума или минимума) — принципом наименьшего времени Ферма.

B1	Принип утверждает, что между двумя фиксированными точками луч света движется по такому пути, что время движения имеет экстремум. Получите соотношение между $\sin i_1$ и $\sin i_2$, исходя из принципа Ферма.	**0.5**

На Рис.3 схематически показана траектория лазерного луча, падающего горизонтально на раствор сахара, в котором концентрация сахара уменьшается с высотой. Следовательно, показатель преломления раствора также уменьшается с высотой.

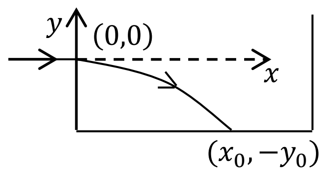


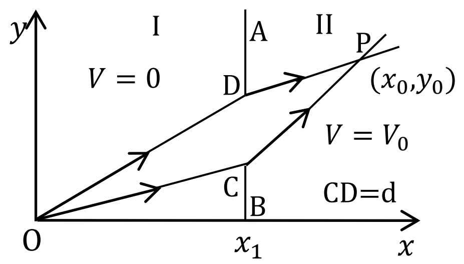
Рис. 3: Сосуд с раствором сахара

B2	Пусть показатель преломления $n(y)$ зависит только от y. Используя уравнение, полученное в пункте B1, получите выражение для углового коэффициента касательной к пути луча dy/dx. Выразите его через показатель преломления n_0 (при $y = 0$) и $n(y)$.	**1.5**
B3	На Рис. 3 показано, что лазерный луч направлен горизонтально из начала координат $(0,0)$ в раствор сахара. Он входит в раствор на расстоянии y_0 от дна сосуда. Считайте, что $n(y) = n_0 - ky$, где n_0 и k — положительные константы. Получите выражение для траектории лазерного луча в таком	**1.2**

	сосуде, т.е. найдите, как x зависит от y и остальных параметров задачи. Примечание: $\int \sec\theta d\theta = \ln(\sec\theta + \tan\theta) + \text{const}$, где $\sec\theta = 1/\cos\theta$ или $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + \text{const}$	
B4	Рассчитайте значение x_0 точки, в которой луч падает на дно сосуда. Считайте, что $y_0 = 10.0$ см, $n_0 = 1.50$, $k = 0.050$ см$^{-1}$.	**0.8**

C Принцип экстремума и волновая природа материи

Теперь исследуем связь между ПНД и волновой природой движущейся частицы. Для этого предположим, что частица, движущаяся из точки O в точку P может выбирать все возможные траектории. Будем искать траекторию, соответствующую взаимоусиливающей интерференции волн де Бройля.

C1	Пусть частица переместилась на бесконечно малое расстояние Δs вдоль своей траектории. Свяжите изменение фазы $\Delta\varphi$ ее волны де Бройля с изменением действия ΔA и постоянной Планка.	**0.6**
C2	Вспомните задачу из пункта A, где частица движется из точки O в точку P (Рис. 4). Пусть между двумя областями, вдоль их границы AB, установлена непрозрачная перегородка. В ней есть небольшая щель CD ширины d, причем $d \ll (x_0 - x_1)$ и $d \ll x_1$. Рассмотрим две крайние траектории OCP и ODP, причем OCP соответствует классической траектории, рассмотренной в части A. Найдите в первом приближении разность фаз $\Delta\varphi_{CD}$ между двумя траекториями.  **Рис. 4**	**1.2**

D Интерференция волн материи

Электронная пушка, находящаяся в точке O, направляет коллимированный пучок электронов на узкую щель в точке F в непрозрачной перегородке A_1B_1. Перегородка расположена на линии $x = x_1$, так что OFP — это прямая. P — это точка на экране при $x = x_0$ (Рис. 5). Скорость в области I равна $v_1 = 2.0000 \times 10^7$ м/с, угол $\theta = 10.0000^\circ$. Потенциал в области II выбран так, что скорость $v_2 = 1.9900 \times 10^7$ м/с. Расстояние $x_0 - x_1$ равно 250.00 мм. Взаимодействием между электронами пренебречь.

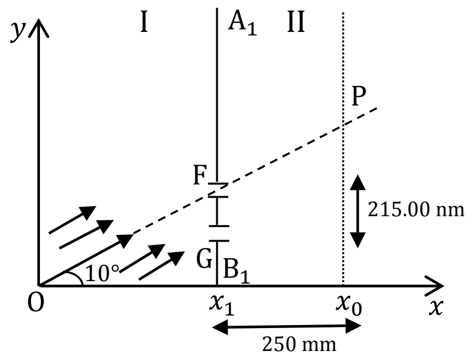


Рис. 5

D1	Рассчитайте ускоряющий потенциал U_1, считая, что электроны ускоряются в точке O из состояния покоя.	**0.3**
D2	В перегородке A_1B_1, ниже щели F на расстоянии 215.00 нм (1 нм = 10^{-9}м), проделали еще одну такую же щель G. Разность фаз между волнами де Бройля, пришедшими в точку P через щели F и G, может быть представлена как $2\pi\beta$. Вычислите β.	**0.8**
D3	Чему равно наименьшее расстояние Δy от точки P до точки на экране, в которой вероятность обнаружить электрон равна нулю? Примечание: $\sin(\theta + \Delta\theta) \approx \sin\theta + \Delta\theta\cos\theta$.	**1.2**
D4	Луч имеет квадратное сечение 500 нм × 500 нм, длина установки — 2 м. Какова минимальная плотность потока электронов I_{min}, если в среднем в установке в любой момент времени имеется хотя бы один электрон? Плотность потока электронов — это количество электронов, проходящих в единицу времени через единичную площадку по нормали к ней.	**0.4**

Конструирование ядерного реактора **(Всего баллов: 10)**

В природном уране, в соединении UO_2 только 0,720% процента атомов урана являются атомами изотопа ^{235}U. Если ядро ^{235}U поглощает нейтрон, то оно практически мгновенно делится, испуская при этом 2-3 нейтрона, имеющих большую кинетическую энергию. Вероятность деления будет возрастать, если нейтрон, вызывающий реакцию деления, обладает малой кинетической энергией. Таким образом, уменьшение кинетической энергии нейтронов, появившихся в результате деления, может привести к возникновению цепной ядерной реакции. Эта идея является основой работы ядерных реакторов (ЯР).

Типичный ЯР представляет собой цилиндрический сосуд высоты H и радиуса R, заполненный веществом, которое называется замедлителем. Цилиндрические трубы, называемые топливными каналами, каждый из которых состоит из набора цилиндрических топливных стержней природного UO_2 высотой H, расположены параллельно оси цилиндра в вершинах квадратной сетки. Нейтроны, возникшие в процессе деления, выходят из топливного канала, сталкиваются с замедлителем, теряют энергию и попадают в другие топливные каналы уже с низкой энергией, и приводят к делению других ядер (Рис. 1-3). Теплота, выделившаяся в результате деления в топливных стержнях, переносится охлаждающей жидкостью, текущей вдоль стержней. В данной задаче вам необходимо изучить некоторые физические явления, проходящие в (A) топливных стержнях, (B) замедлителе, и (C) ЯР цилиндрической формы.

Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

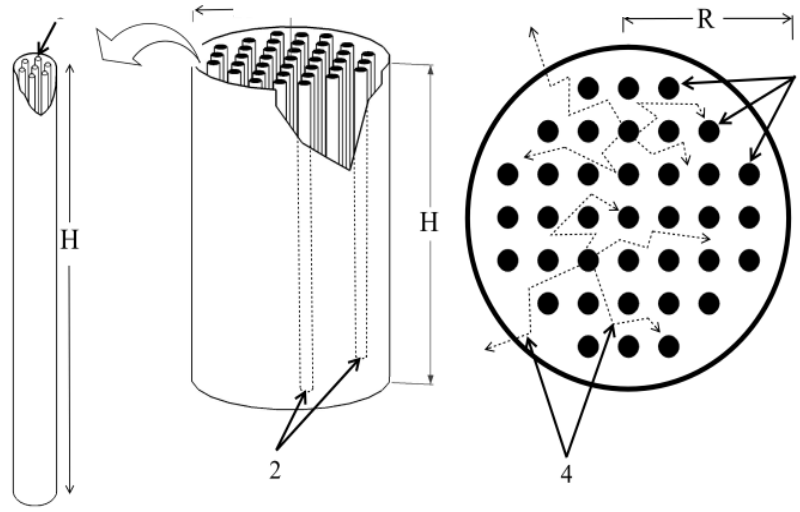


Схема ядерного реактора (ЯР)

Рис. 1. Увеличенное изображение топливного канала (1 — топливные стержни)

Рис. 2. Изображение ЯР (2 — топливные каналы)

Рис. 3. Вид сверху ЯР (3 — квадратная сетка ядерных каналов, 4 — типичные траектории нейтронов)

Показаны только те элементы реактора, которые имеют отношение к данной задаче (например, не показаны управляющие стержни, охладитель)

A Топливный стержень

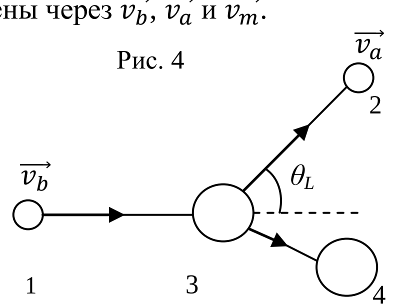
Данные для UO_2	Молярная масса $M_w = 0.270$ кг моль$^{-1}$	Плотность $\rho = 1.060 \times 10^4$ кг м$^{-3}$
	Температура плавления $T_m = 3.138 \times 10^3$ К	Теплопроводность $\lambda = 3.280$ Вт м$^{-1}$К$^{-1}$

A1	Рассмотрим следующую реакцию деления — неподвижное ядро ^{235}U после поглощения нейтрона с пренебрежимо малой кинетической энергией распадается по схеме $$^{235}U + {}^{1}n \longrightarrow {}^{94}Zr + {}^{140}Ce + 2\,{}^{1}n + \Delta E$$ Оцените полную энергию ΔE (в МэВ), выделяющуюся в реакции. Массы частиц равны: $m(^{235}U) = 235.044$ а. е. м.; $m(^{94}Zr) = 93.9063$ а. е. м.; $m(^{140}Ce) = 139.905$ а. е. м.; $m(^{1}n) = 1.00867$ а. е. м., где 1 а. е. м. $= 931.502$ МэВ. Не обращайте внимания на несохранение электрического заряда в этом уравнении.	**0.8**
A2	Оцените N — число атомов ^{235}U в единице объема природного UO_2.	**0.5**

A3	Предположим, что поток нейтронов в ядерном топливе является однородным и равным $\varphi = 2.000 \times 10^{18}$ м$^{-2}$ с$^{-1}$. Сечение реакции деления (эффективная площадь ядра-мишени) ядра ^{235}U равно $\sigma_f = 5.400 \times 10^{-26}$ м^2. Считая, что 80.00% энергии выделяющейся при делении превращается в тепловую, найдите тепловую мощность, выделяющуюся в единице объема ядерного топлива — Q (в Вт м$^{-3}$). 1 МэВ $= 1.602 \times 10^{-13}$Дж.	**1.2**
A4	Установившаяся разность температур между центром (T_c) и поверхностью (T_s) топливного стержня может описана формулой $T_c - T_s = k\,F(Q, a, \lambda)$, где $k = 1/4$ — безразмерная постоянная, a — радиус стержня, λ — теплопроводность $\mathrm{UO_2}$. Используя метод размерностей, получите выражение для функции $F(Q, a, \lambda)$.	**0.5**
A5	Максимально допустимая температура охладителя равна 5.770×10^2 К. Рассчитайте максимально возможный радиус a_u топливного стержня.	**1.0**

B Замедлитель

Рассмотрим абсолютно упругое столкновение на плоскости двух частиц: нейтрона массой 1 а. е. м. с частицей замедлителя массы A а. е. м. Считайте, что в лабораторной системе отсчета (ЛСО) все частицы замедлителя перед столкновениями находятся в состоянии покоя. Пусть $\overrightarrow{v_b}$ и $\overrightarrow{v_a}$ — скорости нейтрона в ЛСО до и после столкновения соответственно. Обозначим $\overrightarrow{v_m}$ скорость центра масс системы в ЛСО, а θ угол отклонения нейтрона в системе отсчета, связанной с центром масс (СОЦМ). Все сталкивающиеся частицы — нерелятивистские.

B1	На Рис. 4 показан схематически процесс столкновения в ЛСО, где θ_L угол отклонения нейтрона. Нарисуйте схематически процесс столкновения в СОЦМ. На этом рисунке укажите угол рассеяния θ, а также скорости частиц для положений 1, 2 и 3 в СОЦМ, которые должны быть выражены через $\overrightarrow{v_b}$, $\overrightarrow{v_a}$ и $\overrightarrow{v_m}$. Рис. 4  *Процесс столкновения в ЛСО* 1 — *Нейтрон* до столкновения 2 — *Нейтрон* после столкновения 3 — *Частица замедлителя* до столкновения 4 — *Частица замедлителя* после столкновения	**1.0**
B2	В СОЦМ определите скорости нейтрона v и частицы замедлителя V после столкновения, выразив их через A и v_b.	**1.0**
B3	Получите выражение для зависимости $G(\alpha, \theta) = E_a/E_b$, где E_b и E_a — кинетические энергии нейтрона в ЛСО до и после столкновения соответственно, а $\alpha \equiv [(A-1)/(A+1)]^2$.	**1.0**
B4	Предположим, что вышеуказанное выражение справедливо для молекулы $\mathrm{D_2O}$. Вычислите максимально возможную долю потери энергии $f_l \equiv \frac{E_b - E_a}{E_b}$ нейтрона в замедлителе $\mathrm{D_2O}$ (20 а.е.м.).	**0.5**

C Ядерный реактор

Для работы ядерного реактора при любом постоянном потоке нейтронов ψ (в стабильном режиме), количество нейтронов покидающих реактор должно быть скомпенсировано числом нейтронов вырабатываемых в ядерном процессе. Для реактора цилиндрической формы, количество покидающих нейтронов в единицу времени равно $k_1[(2.405/R)^2 + (\pi/H)^2]\psi$, в то время как количество нейтронов, образуемых в ядерных реакциях в единицу времени, равно $k_2\psi$. Константы k_1 и k_2 зависят от свойств материалов, из которого сделан ядерный реактор.

C1	Рассмотрите ядерный реактор, для которого $k_1 = 1.021 \times 10^{-2}$ м и $k_2 = 8.787 \times 10^{-3}$ м$^{-1}$. Заметим, что для эффективного использования топлива, количество улетающих нейтронов при работе в стационарном режиме должно быть минимально. Рассчитайте размеры ядерного реактора (высоту и радиус), при фиксированном его объеме, удовлетворяющие указанному условию.	**1.5**
C2	Топливные каналы расположены в узлах квадратной сетки, как показано на Рис. 3. Расстояния между ближайшими каналами равно 0.286 м, а радиус топливного канала 3.617×10^{-2} м. Оцените количество топливных каналов F_n в ядерном реакторе и массу M природного урана $\mathrm{UO_2}$, необходимого для работы ядерного реактора в стационарном режиме.	**1.0**