

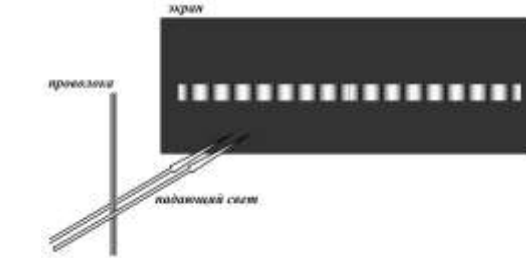
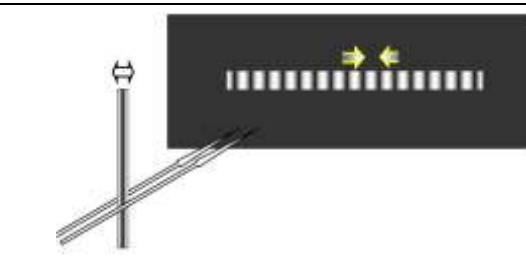

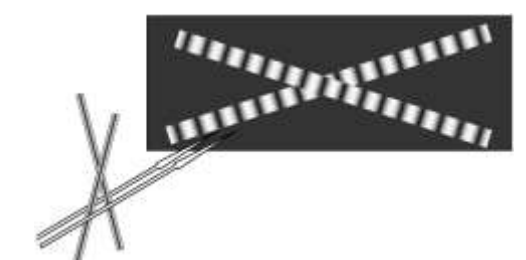
Решение задачи 1 экспериментального тура.

Прекрасная идея задачи – воспроизвести знаменитый эксперимент по дифракции рентгеновских лучей в оптическом диапазоне, что дало возможность оригинально заменить молекулу ДНК проволоочной спиралькой! Прекрасное оборудование, надежно и стабильно измеряемые величины! Замечательное и точное оборудование!

Но, никакого почтения к победителям национальных физических олимпиад: настолько подробно описана теория и сформулированы многочисленные пункты заданий, что рассуждать практически нет необходимости – измеряй, строй очевидные графики, рассчитывай по приведенным формулам, получай результаты и высокие баллы!

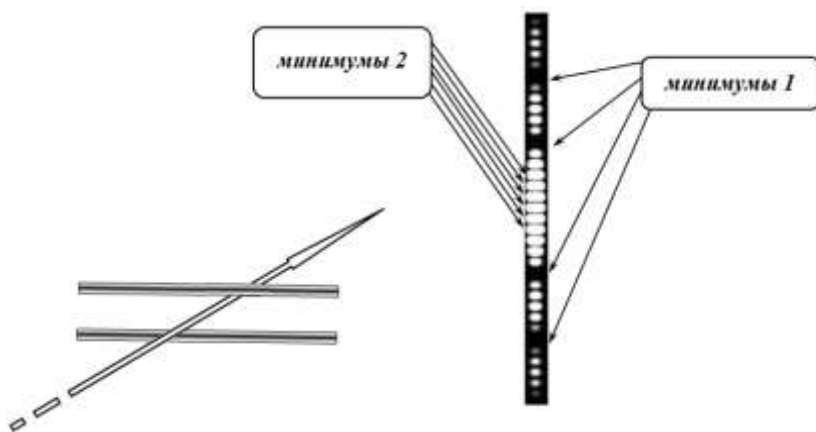
Поэтому и мы ограничимся очень краткими замечаниями, пояснениями и результатами.

Итак, основная идея – наблюдение крестообразной дифракционной картины со множеством максимумов и минимумов. Остается только чуть-чуть поразмыслить, что бы понять, как возникает эта картина. Для этого могут помочь основные законы дифракции: «1) все поперек; 2) чем уже, тем шире». Теперь чуть подробнее и ближе к описываемому эксперименту по дифракции света на проволоке.

1	Проволока вертикальна – полоса дифракционных пятен горизонтальна!	
2	Проволока толще – расстояние между максимумами меньше	
3	Проволоку повернули – повернулась полоска дифракционных пятен. Но осталась перпендикулярной проволоке	
4	Две проволоки под углом – две полосы максимумов под тем же углом, опять перпендикулярно проволокам!	

Осталось понять «наложение» дифракционных полос при дифракции на двух параллельных проволоках – в этом случае полосы накладываются друг на друга, в результате более частая полоса модулируется более редкой.

Густо расположенные минимумы (основная высокочастотная решетка) обусловлены интерференцией двух волн, идущих от проволок, расстояния между этими минимумами (подписаны как минимумы 2) обратно пропорционально расстоянию между проволоками. Модуляция этой решетки обусловлена дифракцией на отдельной проволоке, расстояния между этими минимумами (Минимумы 1) обратно пропорционально толщине проволоки.



После того, как стала понятной структура дифракционной картины, возможно, станут понятны и приводимые результаты. Отметим также, что человеческий глаз положение минимумов определяет точнее, чем максимумов.

A2-A3. Для определения толщины проволоки a_1 , необходимо измерить координаты минимумов, обусловленных дифракцией на проволоке, по нашим обозначениям – «минимумов 1». Теоретически их положение определяется формулой (приведенной в условии)

$$\sin \theta_m = \pm m \frac{\lambda}{a}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Углы отклонения θ_m являются малыми, поэтому при расчетах следует принять

$$\sin \theta_m \approx \theta_m = \frac{x_m}{D}, \quad (2)$$

где D - расстояние от объекта до экрана, x_m - координата минимума номер m на экране. Наконец, для повышения точности авторы предлагают измерять расстояния между симметричными относительно центра минимумами ($x_m - x_{-m}$). Согласно записанным выражениям (1)-(2) эти расстояния описываются формулой

$$x_m - x_{-m} = 2m \frac{\lambda D}{a}. \quad (3)$$

Таким образом, по коэффициенту наклона $K_1 = 2 \frac{\lambda D}{a_1}$ графика зависимости ($x_m - x_{-m}$) от номера m можно определить толщину проволоки a_1 .

В установке использовался лазерный источник света с длиной волны $\lambda = 635 \text{ нм}$, измеренное расстояние¹ от исследуемого объекта до экрана $D = 2,77 \text{ м}$.

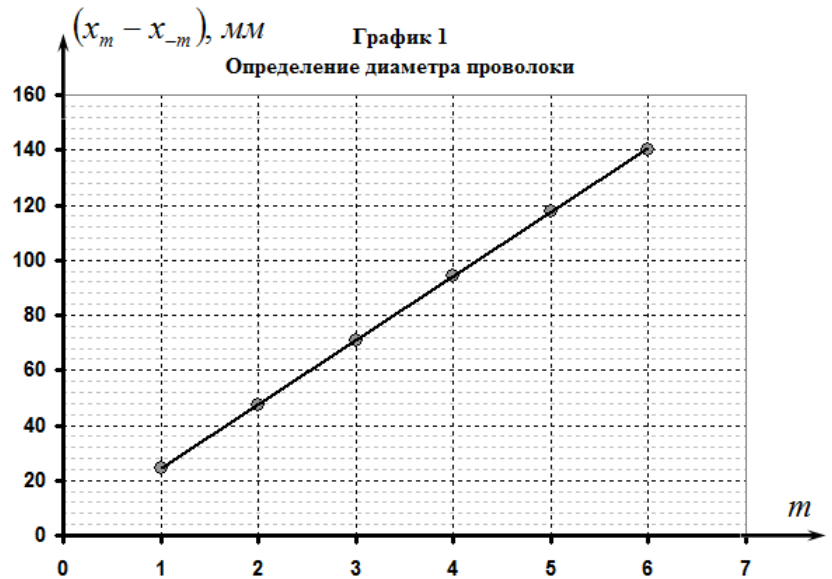
В таблице 1 приведены результаты необходимых измерений, рядом приведен график полученной зависимости. Заметим, что измерения расстояний проведены

¹ Для увеличения этого расстояния использовалось зеркало – благодаря которому это расстояние примерно равнялось удвоенной длине стола.

электронным штангенциркулем, в спокойных «доолимпиадных» условиях, поэтому не удивляйтесь полученной точности.

Таблица 1.

m	$(x_m - x_{-m}), \text{ мм}$
1	24,4
2	47,24
3	70,69
4	94,08
5	117,53
6	140,28



Коэффициент наклона графика², рассчитанный по методу наименьших квадратов оказался равным $K_1 = 23,27 \text{ мм}$. Тогда рассчитанное значение диаметра проволоки равно

$$a_1 = 2 \frac{\lambda D}{K_1} = 0,151 \text{ мм}.$$

A4-A5. Для определения расстояния между витками d следует изучить расположение минимумов. Обусловленных интерференцией волн от двух проволок. Т.е. более густо расположенных «минимумов 2». Их положение определяется формулой (то же приведенной в условии), аналогичной формуле (1)

$$x_{\pm m} = \pm \left(m - \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda D}{d}. \quad (4)$$

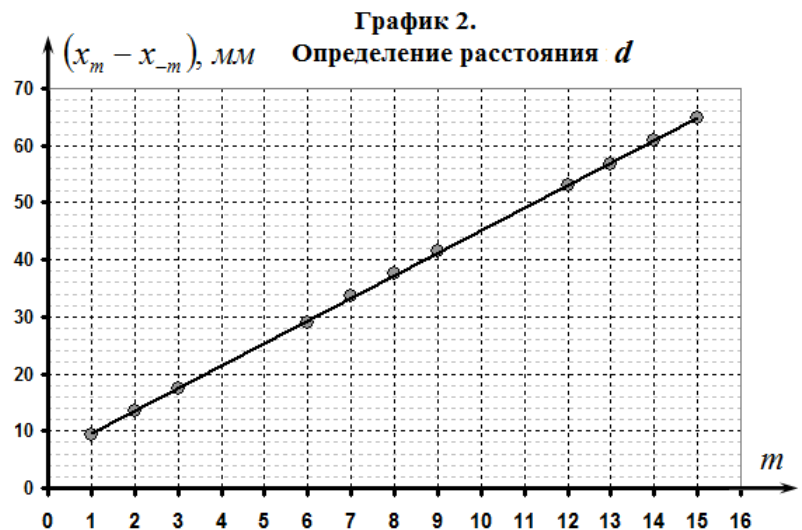
И здесь авторы рекомендуют измерять расстояния $(x_m - x_{-m})$ между симметричными минимумами. Эти расстояния могут быть рассчитаны по формуле

$$x_m - x_{-m} = 2m \frac{\lambda D}{d}. \quad (5)$$

В Таблице 2 представлены результаты соответствующих измерений, рядом приведен график этой зависимости.

Таблица 2.

m	$(x_m - x_{-m}), \text{ мм}$
1	9,39
2	13,43
3	17,53
6	28,98
7	33,53
8	37,66
9	41,61
12	52,93



² По условию задачи расчет погрешностей не требовался!

13	56,76
14	61,03
15	64,74

Обратите внимание: здесь точек гораздо больше, расположены они гуще, но некоторые пропущены: в местах пропусков располагались минимумы предыдущей зависимости.

Коэффициент наклона этого графика, рассчитанный по МНК, равен $K_1 = 3,95 \text{ мм}$. Тогда рассчитанное значение расстояния между проволоками равно

$$d_1 = 2 \frac{\lambda D}{K_2} = 0,89 \text{ мм}.$$

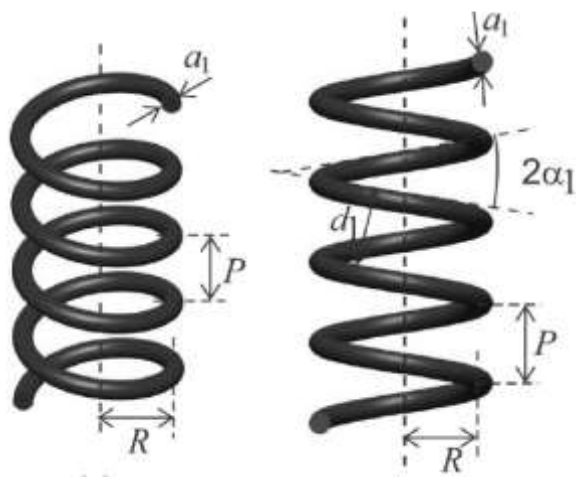
A6. Угол наклона витков спирали может быть найден как половина угла 2α между полосами крестообразной картины. По результатам измерений $\alpha = 10,96^\circ$.

A7. Элементарное геометрическое рассмотрение, показывает, что шаг спирали рассчитывается по формуле

$$P = \frac{d_1}{\cos \alpha_1} = 0,91 \text{ мм}.$$

A8. Тангенс наклона спирали выражается через шаг спирали и длину одного витка $\text{tg} \alpha_1 = \frac{P}{2\pi R}$. Из этой формулы определяется

$$\text{радиус спирали } R = \frac{P}{2\pi \text{tg} \alpha_1} = 0,75 \text{ мм}$$

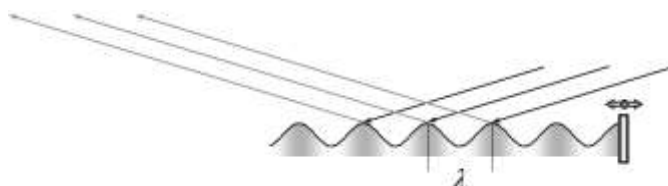


Часть В этой задачи выполняется аналогично, поэтому полученные численные данные и результаты расчетов, можно опустить.

Решение задачи ЭТ2

В очередной раз можно испытать дрожь в коленках по прочтении условия: красивое, но сложное и не знакомое оборудование, неожиданная тема¹ – капиллярные волны, экзотические формулы! Но в очередной раз не стоит сдаваться: попытаемся понять основную идею.

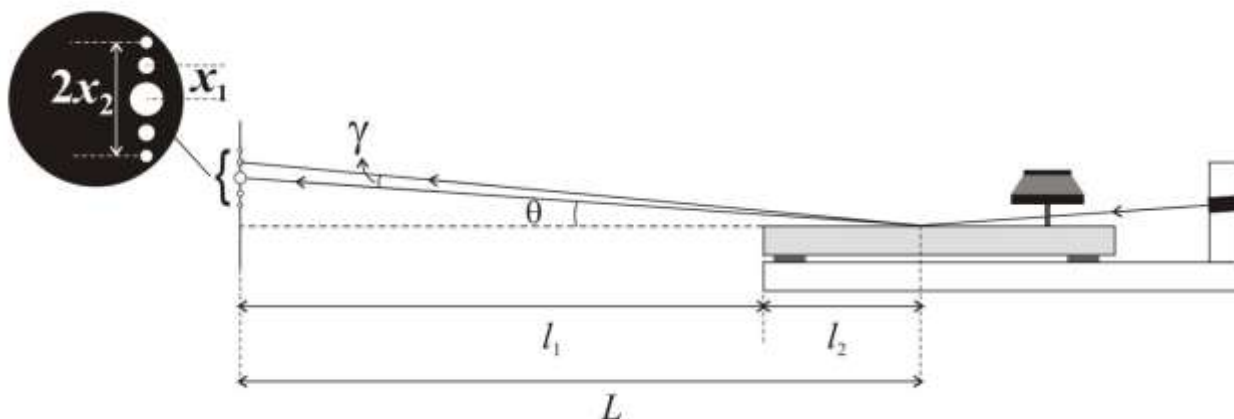
Итак: генератор возбуждает волны на поверхности воды, на эти волны падает скользящий пучок лазерного света и отражается. Поверхность волны можно рассматривать как отражающую



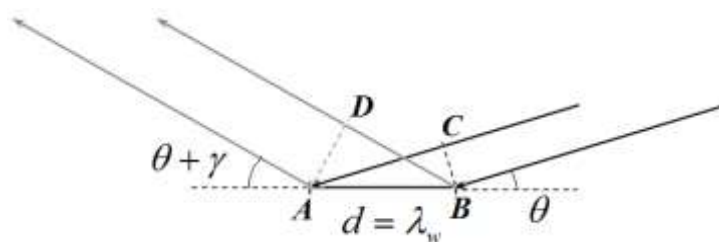
дифракционную решетку. Поэтому, в принципе, по дифракционной картине можно определить длину волны! В условии приведена формула, связывающая эту длину волны (или волновое число) с частотой, задаваемой генератором. Следовательно, исследуя зависимость длины волны от ее частоты можно определить коэффициенты этой зависимости и затем коэффициент поверхностного натяжения!

Вторая идея – капиллярные волны затухают (как и любые другие). Причина затухания – вязкость жидкости. Приведены формулы, которые связывают амплитуду волны с расстоянием до источника, поэтому изучение зависимости амплитуды волны от расстояния позволит рассчитать коэффициент затухания, а затем и вязкость воды. Как все просто!?

Углубимся в теоретическую часть задачи. В условии приведена формула $k = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \cdot \sin \gamma$, на основе которой и строятся все расчеты, поэтому с ней стоит разобраться, тем более, что есть рисунок, поясняющий входящие величины.



Из этого рисунка видно, что θ угол падения луча (отсчитываемый от горизонта), угол отражения на первый максимум есть $\theta + \gamma$. Условие максимума интерференции – разность хода равна целому числу длин волн. Нарисуем пути лучей, отразившихся от двух соседних гребней капиллярной волны. На этом рисунке видно, что разность хода (при условии, что экран находится очень далеко – там, где пересекаются отраженные параллельные лучи²)



¹ Интересно отметить, что эта тема была одной из первых в творчестве знаменитого датского физика, лауреата Нобелевской премии Нильса Бора.

² О пересечении «параллельных» прямых мы уже говорили ранее!

равно разности длин отрезков $|AC| - |DB|$. Выразить ее через указанные углы не сложно:

$$\begin{aligned} \Delta &= |AC| - |DB| = d \cos \theta - d \cos(\theta + \gamma) = -d \cdot 2 \sin\left(\theta + \frac{\gamma}{2}\right) \sin \frac{\gamma}{2} = \\ &= -2d \left(\sin \theta \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \theta \sin \frac{\gamma}{2} \right) \sin \frac{\gamma}{2} = -2d \sin \theta \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2} - 2d \cos \theta \sin^2 \frac{\gamma}{2} \approx \\ &\approx -d \sin \theta \sin \gamma \end{aligned} \quad (1)$$

При выводе пришлось использовать известные тригонометрические формулы и (самое важное) пренебречь малой величиной $\sin^2 \frac{\gamma}{2}$ - действительно, угол дифракции γ мал, а $\frac{\gamma}{2}$ в два раза меньше, а синус еще меньше, а его квадрат уже и не заметен! Если теперь учесть, что период решетки равен длине капиллярной волны, а разность хода должна быть равна длине волны световой, то получим приведенную формулу

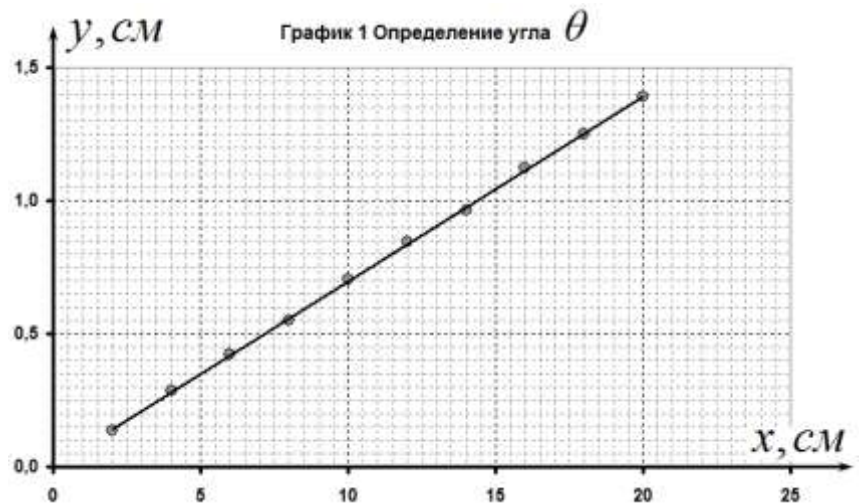
$$\lambda_w \sin \theta \sin \gamma = \lambda_L \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \sin \gamma = \frac{2\pi}{\lambda_w} = k \quad (2)$$

В эту формулу входит угол падения, поэтому, его нужно измерить в первую очередь.

C1-C2. В таблице 1 приведены результаты измерения³ зависимости координаты y отраженного луча на экране от смещения последнего x . Рядом показан график полученной зависимости.

Таблица 1.

№	$x, \text{см}$	$y, \text{см}$
1	2,0	0,136
2	4,0	0,285
3	6,0	0,425
4	8,0	0,549
5	10,0	0,703
6	12,0	0,846
7	14,0	0,965
8	16,0	1,124
9	18,0	1,251
10	20,0	1,390



Коэффициент наклона графика равен 0,0695, это же тангенс угла падения луча, поэтому сам угол падения равен $4,0^\circ$.

Следующий шаг – измерение зависимости волнового числа от частоты волны. Из рисунка видно, что

$$\sin \gamma \approx \frac{x_1}{L}, \quad (3)$$

Так величина $x_1 \ll L$, и, что не маловажно, угол θ также мал.

Можно получить и более точное выражение, учитывающее конечность угла θ . Для этого запишем координату точки падения луча на экране, отсчитываемую от поверхности воды.

³ Мы приводим авторское решение данной задачи, с экспериментальными данными также полученными авторами, но оставляем за собой право снабдить их своими комментариями, которые далее в тексте выделяются курсивом.

$$X = L \operatorname{tg}(\theta + \gamma) \approx L \operatorname{tg} \theta + \frac{L}{\cos^2 \theta} \gamma. \quad (4)$$

Последнее слагаемое в этой формуле равно x_1 . Поэтому в формулу (3) следует добавить множитель $\cos^2 \theta \approx 0,995$, который отличается от 1 всего на 0,5%

Подставляя полученное выражение (3) в формулу (2), получим расчетную формулу для волнового числа капиллярной волны

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \cdot \frac{x_1}{L} \quad (5)$$

Авторы рекомендуют для повышения точности измерять расстояние $2x_2$ между максимумами ± 2 порядков. Очевидно, что в рамках сделанных приближений $x_1 = \frac{2x_2}{4}$.

Можно было и не мудрить, а сразу записать формулу для координат максимумов второго порядка.

В результате проведенных измерений получены следующие численные данные.

D1. Расстояние от точки падения луча на поверхность воды до экрана равно $L = 1,04$ м.

D2. В таблице 2 приведены измеренные значения величины $2x_2$ в зависимости от задаваемой частоты генератора f , а также рассчитанной значение x_1 и логарифмов этих величин. Также приводим график полученной зависимости, хотя по условию задачи он не требуется.

Таблица 2.

№	$f, \text{Гц}$	$2x_2, \text{см}$	$x_1, \text{м}$	$\ln f$	$\ln x_1$
1	60	0,782	0,00196	4,0943	-6,2374
2	70	0,880	0,00220	4,2485	-6,1193
3	80	0,966	0,00242	4,3820	-6,0261
4	90	1,030	0,00258	4,4998	-5,9619
5	100	1,096	0,00274	4,6052	-5,8998
6	110	1,184	0,00296	4,7005	-5,8226
7	120	1,253	0,00313	4,7875	-5,7659
8	130	1,336	0,00334	4,8675	-5,7018
9	140	1,415	0,00354	4,9416	-5,6443
10	150	1,489	0,00372	5,0106	-5,5934
11	160	1,545	0,00386	5,0752	-5,5564

Трудно сказать, является ли данная зависимость нелинейной – все точки лежат практически на одной прямой! Но извлечь необходимую информацию (например, значение поверхностного натяжения) из этой зависимости затруднительно.



D3. Поэтому продолжим движение по пути, указанному авторами задачи. Воспользуемся приведенной формулой, связывающей волновое число с частотой капиллярной волны

$$\omega = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho} k^q} . \quad (6)$$

Прежде всего, следует определить показатель степени q .

Проще всего воспользоваться методом размерностей. Выразим размерности входящих величин через основные единицы системы СИ:

$$[\omega] = c^{-1}; \quad [\sigma] = \frac{H}{m} = \frac{\kappa\mathcal{Z} \cdot m}{c^2} \cdot \frac{1}{m} = \frac{\kappa\mathcal{Z}}{c^2}; \quad [\rho] = \frac{\kappa\mathcal{Z}}{m^3}; \quad [k] = m^{-1} \quad (7)$$

и подставим их в формулу (6):

$$c^{-1} = \left(\frac{\kappa\mathcal{Z}}{c^2} \cdot \frac{m^3}{\kappa\mathcal{Z}} \cdot m^{-q} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

Очень не сложно заметить, что размерности обеих частей этого равенства будут совпадать только при $q = 3$.

Однако авторы не ищут легких путей и требуют определить показатель степени на основе результатов измерений. Предположим, что мы забыли, в каких единицах измеряется плотность, поэтому выразим в явном виде зависимость между непосредственно измеряемыми величинами f и x_1

$$(2\pi f)^2 = \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \cdot \frac{x_1}{L} \right)^q = \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{2\pi \sin \theta}{\lambda L} \right)^q x_1^q . \quad (9)$$

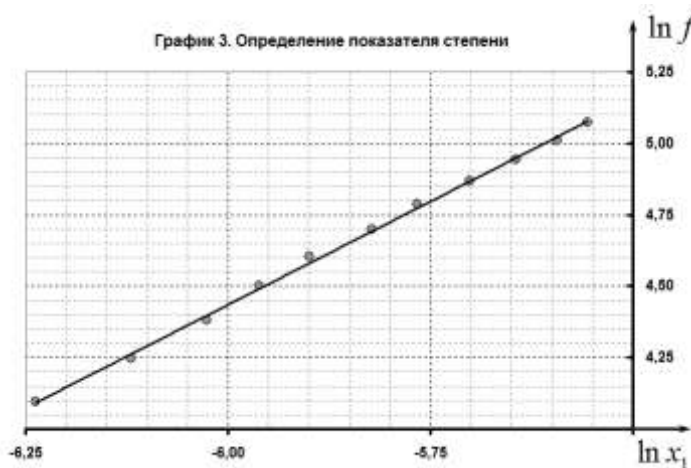
И прологарифмируем ее:

$$\ln f = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{2\pi \sin \theta}{\lambda L} \right)^q \right) + \frac{q}{2} \ln x_1 \quad (10)$$

Таким образом, традиционный прием определения показателя степени (по графику в двойном логарифмическом масштабе⁴) «работает» и в данном случае: коэффициент наклона линейной зависимости между логарифмами исходной степенной зависимости равен показателю ее степени. На следующем рисунке приведен график этой зависимости (значения логарифмов приведены в Таблице 2).

Визуально сравнивая с графиком 2, «убеждаемся», что эта зависимость «более линейна», чем «нелинейная зависимость» на предыдущем графике.

Отметим одно важное обстоятельство: мы вычисляем логарифмы от размерных величин! Какую размерность он имеет? Поступим формально. Пусть $f = F \cdot c^{-1}$ (где F - численное значение, c^{-1} - размерность), тогда $\ln f = \ln F - \ln c$?! Чему равен логарифм секунды? Не известно, но это постоянная величина. Аналогично, с логарифмом $\ln x_1$. Но дополнительные постоянные слагаемые в функции (10) приводят только к параллельному сдвигу прямой и не меняют его наклона. Следовательно, при расчете показателя степени с помощью



⁴ В английском языке используется красивый термин – «log-log scale»

этого метода размерности величин не имеют значения, эти величины можно измерять в любых единицах! Тем не менее, во избежание подобных вопросов, предпочтительнее логарифмировать безразмерные величины. Второй вариант – использовать одну систему единиц, тогда при обратных преобразованиях от логарифмов к самим величинам мы будем возвращаться к тем же системным единицам. Именно так и поступили авторы данной задачи. Это обстоятельство мы используем в дальнейшем.

Коэффициент наклона этой прямой (рассчитанный по МНК) равен 1,445, поэтому показатель степени в формуле (6) $q = 2,89 \approx 3$. Округлить эту экспериментально найденную величину необходимо, потому, что метр^{2,89} величина совсем уж непривычная!

D4. Найденное значение показателя степени позволяет линеаризовать зависимость (9), определить ее параметры и тем самым найти значение поверхностного натяжения. Перепишем формулу (9) в виде

$$f^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{2\pi \sin \theta}{\lambda L} \right)^3 x_1^3 \quad (11)$$

И построим график зависимости $f^2(x_1^3)$.



Коэффициент наклона этого графика равен $K = 4,33 \cdot 10^{11} \text{с}^{-2} \cdot \text{м}^{-3}$.

Из его равенства теоретическому значению (11), находим

$$\frac{1}{4\pi^2} \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{2\pi \sin \theta}{\lambda L} \right)^3 = K \Rightarrow \quad (12)$$

$$\sigma = 4\pi^2 \rho \left(\frac{2\pi \sin \theta}{\lambda L} \right)^3 \approx 59,2 \frac{\text{мН}}{\text{м}}$$

Казалось бы, искомую величину σ можно определить из зависимости (10), при этом исчезает необходимость еще одного пересчета, еще одного графика функции (11). Однако этому есть серьезное оправдание.

Проведенный расчет параметров и их погрешностей зависимости $\ln f = a \ln x_1 + b$, дает следующие значения: $a = 1,44 \pm 0,04$, $b = 13,1 \pm 0,2$. Величина сдвига теоретически выражается формулой

$$b = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{2\pi \sin \theta}{\lambda L} \right)^3 \right). \quad (13)$$

Из которой можно рассчитать численное значение

$$\sigma = \rho \left(\frac{\lambda L}{2\pi \sin \theta} \right)^3 \exp(2b) = 1,00 \cdot 10^3 \left(\frac{635 \cdot 10^{-9} \cdot 1,04}{2\pi \cdot \sin 4^\circ} \right)^3 \cdot \exp(2 \cdot 13,107) = 8,3 \cdot 10^{-4} \frac{H}{м}$$

и его погрешность $\Delta\sigma = 2\sigma\Delta b = 3,7 \cdot 10^{-4} \frac{H}{м}$, что составляет 44%.

Расчет коэффициентов зависимости $f^2(x_1^3) = Ax_1^3 + B$ дает результаты (в единицах СИ):

$A = (4,33 \pm 0,12) \cdot 10^{11}$; $B = (6,1 \pm 4,2) \cdot 10^2$. В этом случае относительная погрешность найденного коэффициента поверхностного натяжения оказывается равной

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{\Delta A}{A} = 3\%$$

Такое существенное различие обусловлено двумя причинами: первая, как правило расчет по МНК дает большую погрешность в параметре сдвига, чем в коэффициенте наклона; вторая – при расчете σ по зависимости (10) требует вычисление значения быстро возрастающей функции $Y = \exp(2b)$, для которой относительно малое изменение аргумента приводит к весьма заметному изменению самой функции. Еще раз обратите внимание, значение аргумента $b = 13,1 \pm 0,2$ задано с погрешностью 1,5%. При этом

относительная погрешность самой функции $\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{Y'\Delta b}{Y} = 2\Delta b$ возрастает почти в 30

раз!

Выводы делайте самостоятельно!

Е. Определение коэффициента затухания и вязкости воды.

Понятно, что все волны затухают. Знакомо, что амплитуда волны h убывает с увеличением расстояния до источника s по экспоненциальному закону

$$h = h_0 \exp(-\delta s). \quad (14)$$

Следовательно, надо измерить зависимость высоты волны от расстояния до источника. Но... как ее измерить, можно только измерять интенсивность дифрагировавшей волны, по-видимому, есть какая-то зависимость интенсивности от амплитуды волны, но она не известна никому! Поэтому авторы находят «хитрый ход» добиваться того, что бы интенсивность отраженного сигнала, а, следовательно, и амплитуда волны в области отражения оставались постоянными. Но при удалении источника волны от неизменной области отражения амплитуда должна уменьшаться, это уменьшение можно компенсировать увеличением амплитуды колебаний источника и, как следствие, амплитуды волны непосредственно рядом с источником.

Все эти рассуждения легко переводятся на язык формул:

- в области отражения амплитуда волны поддерживается постоянной

$$h = h_0 \exp(-\delta s) = const; \quad (15)$$

- начальная амплитуда пропорциональна напряжению, прикладываемому к источнику в «экзотической» степени 0,4 (а как с размерностью?), поэтому

$$(V)^{0,4} \exp(-\delta s) = const; \quad (16)$$

- логарифмируем

$$0,4 \ln V - \delta s = const; \quad (17)$$

- выражаем

$$\ln V = const + \frac{8}{0,4 \cdot 3} \frac{\pi \eta}{\sigma} f = af + b. \quad (18)$$

Итак, зависимость логарифма напряжения от расстояния⁵ позволяет определить показатель затухания и вязкость воды.

В таблице 3 приведены результаты измерений зависимости напряжения на источнике волны от расстояния до области падения света. Рядом показан график полученной зависимости в полулогарифмическом масштабе.

Таблица 3.

№	s, см	V, В	ln V (мВ)
1	8	0,0276	3,3178
2	8,5	0,0330	3,4965
3	9,0	0,0385	3,6507
4	9,5	0,0441	3,7865
5	10,0	0,0534	3,9778
6	10,5	0,0622	4,1304
7	11,0	0,0745	4,3108
8	11,5	0,0870	4,4659
9	12,0	0,1050	4,6540
10	12,5	0,1215	4,7999
11	13,0	0,1412	4,9502



По коэффициенту наклона этого графика $a = 0,329 \text{ см}^{-1}$, находим коэффициент затухания $\delta = 0,4 \cdot a = 0,132 \text{ см}^{-1}$ и вязкость воды

$$a = \frac{20}{3} \frac{\pi \eta}{\sigma} \Rightarrow \eta = \frac{3\sigma}{20\pi} a = 0,93 \text{ мПа} \cdot \text{с}. \quad (19)$$

⁵ Такой масштаб называют полулогарифмическим; на английском: semi log scale.