

Введение

Метеороид это небольшая часть (обычно меньше 1 метра в поперечнике) от кометы или астероида. Метеороид, который столкнулся с поверхностью Земли, называется метеоритом.

Ночью 17 января 2009 года многие люди, находящиеся вблизи Балтийского моря, наблюдали яркий след и огненный шар метеороида, падающего в атмосфере Земли. Камера наблюдения в Швеции зафиксировала на видео это событие, рис.1.1(a). С помощью этих снимков и свидетельств очевидцев стало возможным сузить возможную область падения, и шесть недель позже метеорит массой 0,025 кг был найден в окрестности города Марибо в южной Дании. Измерения метеорита, получившего название Марибо, и орбиты его полета в небе зафиксировали интересные результаты. Его скорость при входе в атмосферу была необычайно высокой. Его возраст, 4.567×10^9 лет, показал, что он сформировался вскоре после рождения Солнечной системы. Метеорит Марибо, возможно, является частью кометы Энке.

Скорость Марибо

Огненный шар двигался в западном направлении, направляясь под углом 285° относительно севера в точку, где он был впоследствии обнаружен, как показано на рис. 1.1. Метеорит был найден на расстоянии 195 км от камеры наблюдения в направлении 230° относительно севера

1.1	Используя эти данные и данные на рис.1.1 вычислите скорость Марибо. Кривизной поверхности Земли можно пренебречь.	1.3
-----	---	-----

Проходя сквозь атмосферу и плавясь?

Сопротивление воздуха в верхних слоях атмосферы, действующее на метеороид, зависит сложным образом от формы и скорости метеороида, а также от температуры и плотности атмосферы. В качестве разумного приближения для силы сопротивления F в верхних слоях атмосферы можно использовать формулу $F = k\rho_{\text{atm}}Av^2$, где k - некоторая константа, ρ_{atm} - плотность атмосферы, A - площадь поперечного сечения метеорита и v - его скорость.

Используйте следующие допущения, чтобы упростить анализ процессов, происходящих с метеороидом: объект, вошедший в атмосферу, считайте шаром массой $m_M = 30$ кг, радиусом $R_M = 0.13$ м, температурой $T_0 = 200$ К, движущийся со скоростью $v_M = 2.91 \times 10^4$ м/с. Плотность атмосферы считайте постоянной (равной значению на высоте 40 км над поверхностью Земли) $\rho_{\text{atm}} = 4.1 \times 10^{-3}$ кг/м³, коэффициент сопротивления $k = 0.60$.

1.2a	Оцените какое время требуется, чтобы скорость метеорита уменьшилась на 10%: с v_M до $0.90 v_M$.	0.7
1.2b	Вычислите во сколько раз кинетическая энергия метеорита, вошедшего в земную атмосферу E_{kin} больше энергии E_{melt} , требуемой для полного расплавления метеорита.	0.3

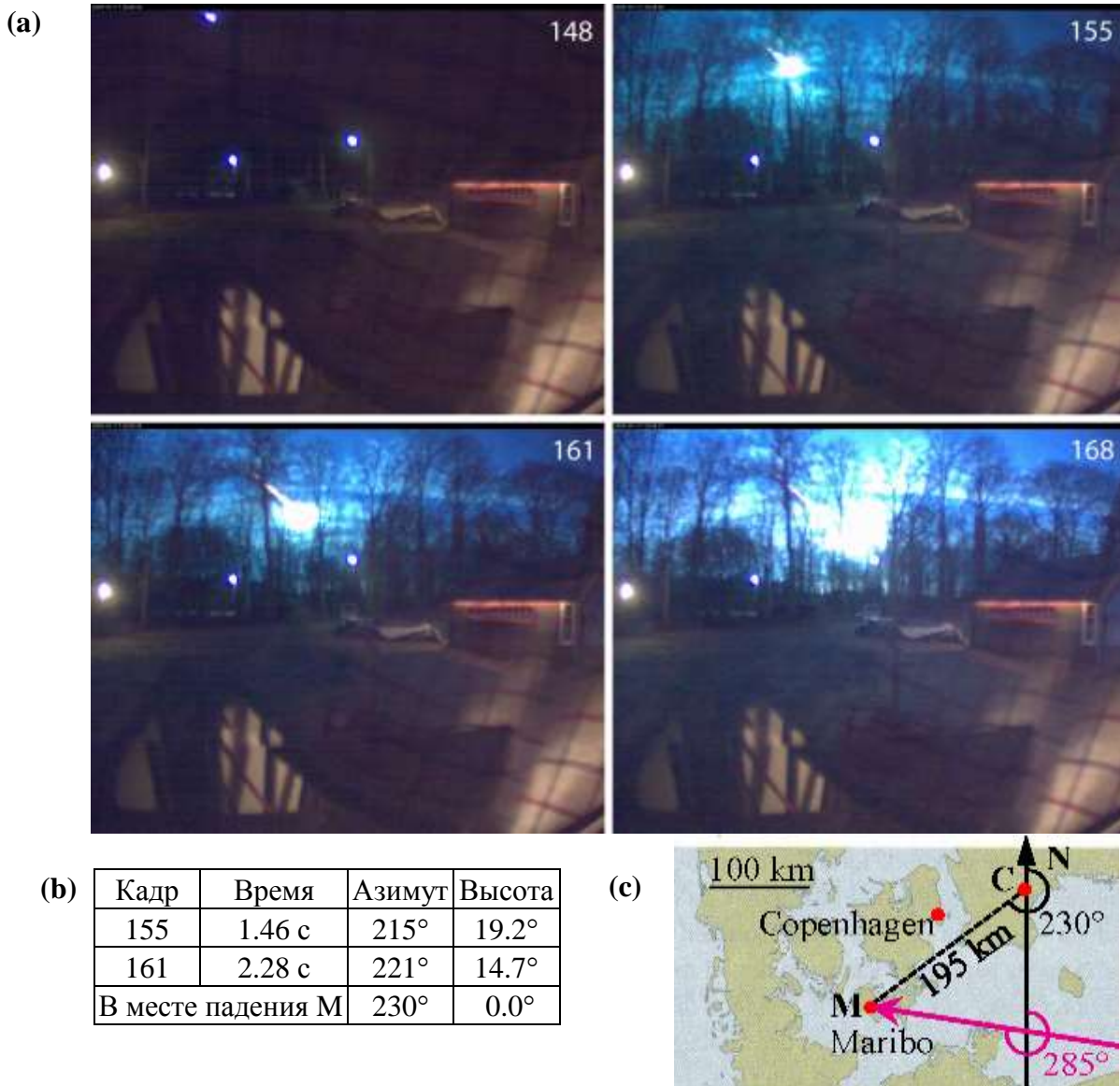


Рисунок 1.1 (a) Серия снимков, сделанных камерой наблюдения в Швеции, показывает полет метеорита Марибо (огненный шар) в атмосфере. (b) Данные с двух кадров, показывающие время, направление (азимут) в градусах и высоту над горизонтом в градусах. (c) Эскиз, показывающий траекторию Марибо (малиновая стрела) относительно севера (N) и место падения (M) в Дании видимых камерой (C) в Швеции.

Нагревание Марибо во время падения в атмосфере

Когда каменный метеороид Марибо вошел в атмосферу на сверхзвуковой скорости он выглядел, как огненный шар, благодаря светящемуся вокруг него воздуху. Тем не менее, только внешний слой Марибо был разогрет. Предположим, что Марибо представляет собой однородный шар плотностью ρ_{sm} , удельной теплоемкостью c_{sm} , и теплопроводностью k_{sm} (значения приводятся в таблице данных). Кроме того, при входе в атмосферу его температура была $T_0 = 200$ К, а при падении сквозь атмосферу температура его поверхности была постоянной и равной $T_s = 1000$ К из-за сопротивления воздуха, что привело к постепенному нагреванию метеорита внутри.

После движения в атмосфере в течение времени t , внешняя оболочка Марибо толщиной x была разогрета до температуры, существенно превышающей T_0 . Эта толщина может быть оценена с помощью метода размерностей как произведение степеней термодинамических параметров: $x \approx t^\alpha \rho_{sm}^\beta c_{sm}^\gamma k_{sm}^\delta$.

1.3a	Определите методом размерностей значения степеней α , β , γ , и δ .	0.6
1.3b	Вычислите толщину x после $t = 5$ с падения и определите отношение x/R_M .	0.4

Возраст Марибо

Химические свойства радиоактивных изотопов и продуктов их распада различаются. Поэтому в течение затвердевания минералов в данном метеорите одна часть минералов будет иметь высокое содержание определенного радиоактивного изотопа и низкое – продуктов его распада, другая – наоборот. Этот эффект может быть использован для определения возраста метеорита путем радиометрических измерений его минералов.

В качестве конкретного примера рассмотрим изотоп ^{87}Rb (элемент № 37), который после распада превращается в стабильный изотоп ^{87}Sr (элемент № 38) с периодом полураспада $T_{1/2} = 4.9 \times 10^{10}$ лет. В момент затвердевания отношение числа изотопов $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ было одинаковым для всех минералов, в то время как отношение $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ было различным. Со временем, количество изотопов ^{87}Rb сокращается из-за распада, а количество изотопов ^{87}Sr соответственно растет. В итоге, отношение изотопов $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ сейчас будет другим. На Рис.1.2(a), точки по оси абсцисс относятся к числу $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ в различных минералах в момент их затвердевания.

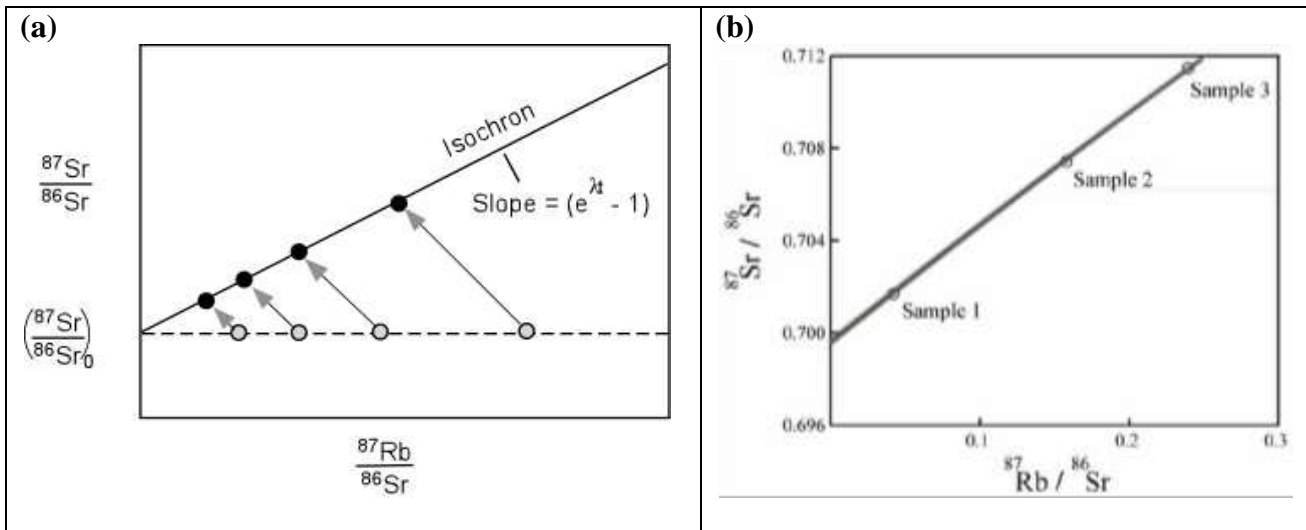


Рисунок 1.2 (a) Отношение $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ в различных минералах в начальный момент кристаллизации (светлые кружки) и в настоящее время (темные кружки). (b) Изохрона для трех образцов минералов, взятых из метеорита в настоящее время.

1.4a	Запишите схему превращения $^{87}_{37}\text{Rb}$ в $^{87}_{38}\text{Sr}$ при распаде.	0.3
1.4b	Покажите, что отношение $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ в настоящее время, построенное в зависимости от отношения $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ в настоящее время для различных образцов одного и того же метеорита, лежит на прямой линии (так называемой изохроне) с углом наклона	0.7

	$a(t) = (e^{\lambda t} - 1)$. Здесь t – это время, исчисляемое с момента создания минералов, а λ – постоянная распада, обратно пропорциональная периоду полураспада $T_{1/2}$.	
1.4c	Определите возраст метеорита τ_M , используя изохрону на рис.1.2(b).	0.4

Комета Энке, от которой мог произойти Марибо

При движении по орбите вокруг Солнца минимальное и максимальное расстояние между кометой Энке и Солнцем равно $a_{\min} = 4.95 \times 10^{10}$ м и $a_{\max} = 6.16 \times 10^{11}$ м, соответственно.

1.5	Рассчитайте период вращения кометы Энке t_{Encke} по орбите.	0.6
-----	---	-----

Последствия столкновения астероида с Землей

65 миллионов лет назад Земля столкнулась с огромным астероидом плотностью $\rho_{\text{ast}} = 3.0 \times 10^3$ кг м⁻³, радиусом $R_{\text{ast}} = 5$ км, и конечной скоростью $v_{\text{ast}} = 2.5 \times 10^4$ м/с. Это столкновение привело к уничтожению почти всего живого на Земле и формированию чудовищного кратера Чикшулуб. Предположим, что такой же астероид сейчас столкнулся бы абсолютно неупруго с Землей. Считайте, что момент инерции Земли равен 0.83 момента инерции однородного шара такой же массы и радиуса.

1.6a	Предположим, что астероид врезался в Северный Полюс. Найдите максимальное изменение угловой ориентации земной оси после столкновения.	0.7
1.6b	Предположим, что астероид упал строго радиально в области экватора. Найдите максимальное изменение продолжительности одного суточного вращения Земли $\Delta\tau_{\text{vrt}}$ после столкновения.	0.7
1.6c	Предположим, что астероид ударился в Землю в области экватора по касательной. Найдите максимальное изменение продолжительности одного суточного вращения Земли $\Delta\tau_{\text{tan}}$ после столкновения.	0.7

Максимальная скорость соударения

Рассмотрим небесное тело, которое удерживается силами гравитации в Солнечной системе. Тело сталкивается с поверхностью Земли со скоростью v_{imp} . Силами сопротивления воздуха в атмосфере пренебречь.

1.7	Рассчитайте v_{imp}^{\max} – наибольшее возможное значение скорости v_{imp} .	1.6
-----	---	-----

Введение

В этой задаче мы исследуем эффективный процесс получения водяного пара, который был реализован в эксперименте. В водном растворе содержатся шарообразные наноразмерные частицы серебра (в концентрации порядка 10^{13} частиц на литр). Раствор освещается сфокусированным пучком света. Часть света поглощается наночастицами, которые при этом нагреваются и превращают воду в пар вблизи своей поверхности, не нагревая при этом основной объем жидкости. Пар выходит из раствора пузырьками. В настоящее время не все детали этого процесса полностью понятны, но точно известно, что в основе процесса лежит поглощение света с последующим возбуждением так называемых коллективных колебаний электронов в металлических наночастицах. Это устройство получило название плазменного парогенератора.

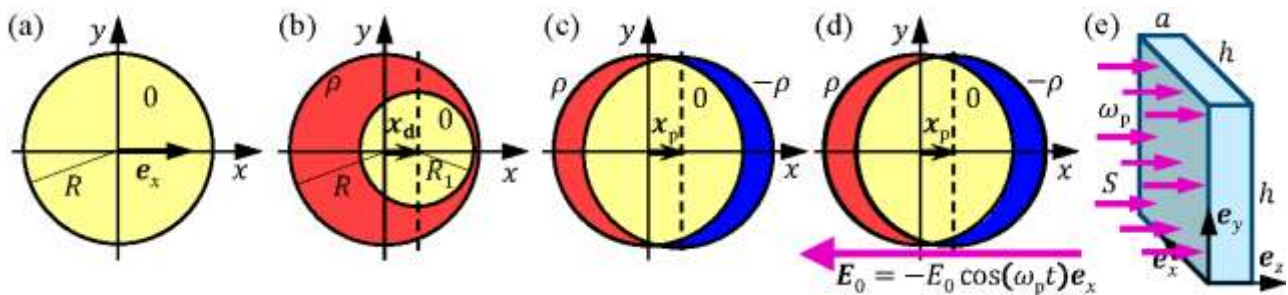


Рис. 2.1 (а) Шарообразная незаряженная частица радиусом R помещена в начало системы координат. (б) Шарообразная частица, однородно заряженная с положительной плотностью заряда ρ (красный цвет), содержит внутри себя незаряженную шарообразную полость (0, желтый цвет) радиуса R_1 , центр которой находится в точке с радиус-вектором $\mathbf{x}_d = x_d \mathbf{e}_x$, где \mathbf{e}_x - единичный вектор. (в) Неподвижная шарообразная область с положительной плотностью зарядов ρ , образована ионами серебра и расположена в центре системы координат, а также шарообразная область с отрицательной плотностью зарядов $-\rho$ (синий цвет), образована электронным облаком, центр которой смещен на вектор \mathbf{x}_p , где $x_p \ll R$. (д) Система находится в области внешнего однородного электрического поля $\mathbf{E}_0 = -E_0 \mathbf{e}_x$. В случае нестационарного поля \mathbf{E}_0 электронное облако движется со скоростью $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_p/dt$. (е) Прямоугольный сосуд ($h \times h \times a$), содержащий водный раствор наночастиц, освещен монохроматическим пучком света, распространяющимся вдоль оси z ; его циклическая частота равна ω_p , а интенсивность S .

Одиночная сферическая частица серебра

Во всех пунктах задачи мы рассматриваем шарообразную наночастицу серебра радиусом $R = 10.0$ нм с центром, зафиксированным в начале координат, см. рис. 2.1(а). Все движения, силы или движущие поля параллельны горизонтальной оси x . Наночастица содержит свободные электроны (электроны проводимости), которые могут перемещаться во всем объеме наночастицы, не будучи привязаны ни к одному из атомов серебра. От каждого изначально нейтрального атома серебра высвободилось по одному электрону проводимости, в результате чего все атомы стали положительными ионами.

2.1	Определите объём V и массу M наночастицы, число N и плотность зарядов ρ ионов серебра в частице, а для свободных электронов – их концентрацию n , суммарный заряд Q и суммарную массу m_0 .	0.7
-----	--	-----

Электрическое поле в нейтральной полости внутри заряженного шара

В дальнейшем будем считать, что относительная диэлектрическая проницаемость ϵ всех материалов равна 1. Внутри заряженного шара радиусом R с однородной плотностью зарядов ρ создана небольшая сферическая нейтральная область радиусом R_1 , путем добавления зарядов противоположной плотности $-\rho$. Центр полости смещен на $\mathbf{x}_d = x_d \mathbf{e}_x$ от центра шара, рис. 2.1(b).

2.2	Покажите, что электрическое поле внутри нейтральной области однородно и имеет вид $\mathbf{E}_{\text{ind}} = A (\rho/\epsilon_0) \mathbf{x}_p$. Определите константу A .	1.2
-----	---	-----

Возвращающая сила, действующая на смещенное электронное облако

Изучим коллективное движение свободных электронов. Про моделируем их однородно заряженным шаром с отрицательной плотностью заряда $-\rho$ с центром в точке \mathbf{x}_p . Шар может двигаться вдоль оси x относительно центра неподвижного положительно заряженного шара из ионов серебра, находящегося в начале системы координат, рис. 2.1(c). Предположим, что внешняя сила \mathbf{F}_{ext} смещает электронное облако в новое положение равновесия $\mathbf{x}_p = x_p \mathbf{e}_x$, где $|x_p| \ll R$. Практически весь ее объем является электрически нейтральным, за исключением малых областей зарядов, скапливающихся на противоположных концах наночастицы. Это соответствует предельному случаю $R_1 \rightarrow R$ в предыдущем задании.

2.3	Выразите через x_p и n следующие две величины: возвращающую силу F , действующую на электронное облако, и работу W_{el} , совершенную над электронным облаком в процессе смещения.	1.0
-----	---	-----

Шарообразная наночастица серебра в постоянном внешнем электрическом поле

Наночастица находится в вакууме. Под действием внешней силы \mathbf{F}_{ext} (вызванной однородным электростатическим полем $\mathbf{E}_0 = -E_0 \mathbf{e}_x$), электронное облако смещается на небольшое расстояние $|x_p|$, где $|x_p| \ll R$.

2.4	Выразите смещение электронного облака x_p через E_0 и n . Определите величину заряда электронов $-\Delta Q$ прошедшего через плоскость yz , проходящую через центр наночастицы. Выразите ее через n , R и x_p .	0.6
-----	---	-----

Эквивалентные емкость и индуктивность серебряной наночастицы

В случае как постоянного, так и переменного поля \mathbf{E}_0 наночастица может быть представлена эквивалентным электрическим контуром. Определим эквивалентную емкость. Для этого свяжем работу W_{el} по разделению зарядов ΔQ с энергией конденсатора, несущего заряды $\pm \Delta Q$. Разделение зарядов приведет к появлению напряжения V_0 на конденсаторе.

2.5a	Выразите эквивалентную емкость наночастицы C через ϵ_0 и R , и найдите ее численное значение.	0.7
2.5b	Для данной емкости выразите через E_0 и R эквивалентное напряжение V_0 , которое следует подать на конденсатор, чтобы накопить заряд ΔQ .	0.4

В переменном поле \mathbf{E}_0 электронное облако движется как единое целое со скоростью $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$, рис. 2.1(d). Облако обладает кинетической энергией W_{kin} и при своем движении создает электрический ток I , протекающий через плоскость уз. Кинетическая энергия электронного облака может быть представлена в виде энергии эквивалентной катушки индуктивности L с током I .

2.6a	Выразите W_{kin} и I через скорость v .	0.7
2.6b	Выразите эквивалентную индуктивность L через радиус частицы R , заряд электрона e и его массу m_e , концентрацию свободных электронов n и найдите ее численное значение.	0.5

Плазмонный резонанс наночастицы серебра

Из вышеприведенного анализа следует, что движение электронного облака, предоставленного самому себе, после смещения из положения равновесия может быть описано свободными колебаниями в идеальном колебательном LC -контуре. Такое колебательное движение свободного электронного облака известно как плазмонный резонанс с соответствующей плазмонной частотой ω_p .

2.7a	Выразите плазмонную частоту ω_p колебаний электронного облака через заряд электрона e и его массу m_e , плотность электронов n и диэлектрическую проницаемость вакуума ϵ_0 .	0.5
2.7b	Вычислите ω_p в рад/с и длину волны света в вакууме λ_p в нм, частота которой $\omega = \omega_p$.	0.4

Наночастица серебра, освещенная светом плазмонной частоты

В оставшейся части задачи наночастица освещается монохроматическим светом с циклической частотой ω_p и с интенсивностью $S = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 = 1.00 \text{ МВт} \cdot \text{м}^{-2}$. Поскольку длина волны света велика по сравнению с размерами частицы $\lambda_p \gg R$, можно считать, что частица находится в однородном внешнем поле $\mathbf{E}_0 = -E_0 \cos(\omega_p t) \mathbf{e}_x$. Под действием поля \mathbf{E}_0 электронное облако осциллирует с той же самой частотой и постоянной амплитудой x_0 . Центр электронного облака $\mathbf{x}_p(t)$ движется с переменной скоростью $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_p/dt$. Такие колебания электронного облака приводят к поглощению света частицей. Энергия, принятая частицей, либо превращается в теплоту за счет джоулевых потерь в самой частице, либо переизлучается частицей в виде рассеянного света.

Джоулево тепло выделяется за счет случайных, полностью неупругих столкновений свободных электронов с ионами серебра. Вся кинетическая энергия превращается в энергию колебаний ионов, то есть в тепло. Среднее время между двумя последующими столкновениями для одного электрона $\tau \gg 1/\omega_p$. Для наночастицы серебра оно равно $\tau = 5.24 \times 10^{-15}$ с.

2.8a	Найдите выражение для усредненной по времени мощности джоулевых потерь P_{heat} в наночастице, а также усредненный по времени квадрат силы тока $\langle I^2 \rangle$. Приведите их явную зависимость от среднего квадрата скорости $\langle v^2 \rangle$ электронного облака.	1.0
2.8b	Моделируя наночастицу омическим сопротивлением, на котором выделяется джоулево тепло мощностью P_{heat} при протекании тока I электронного облака, найдите выражение для эквивалентного омического сопротивления R_{heat} . Вычислите его численное значение.	1.0

Падающий пучок света теряет некоторую среднюю по времени мощность P_{scat} за счет рассеяния на осциллирующем электронном облаке (переизлучение). P_{scat} зависит от характеристик источника рассеянных волн (амплитуды x_0 , заряда Q , циклической частоты ω_p) и свойств световых волн (скорости света c и диэлектрической проницаемости вакуума ϵ_0). Выражение для P_{scat} можно записать так $P_{\text{scat}} = \frac{1}{12\pi} (Qx_0)^2 \omega_p^4 c^{-3} \epsilon_0^{-1}$.

2.9	Используя P_{scat} , найдите выражение для эквивалентного сопротивления рассеяния R_{scat} в эквивалентной модели с сопротивлением (по аналогии с R_{heat}) и вычислите его значение.	1.0
-----	---	-----

Для моделирования наночастицы серебра все вышеперечисленные элементы электрических цепей можно собрать в единый эквивалентный последовательный LCR -контур. Гармонический источник напряжения в цепи $V = V_0 \cos(\omega_p t)$ определяется электрическим полем E_0 падающего света.

2.10a	Получите выражения для средних по времени мощностей потерь P_{heat} и P_{scat} через амплитуду электрического поля E_0 падающего света на частоте плазмонного резонанса $\omega = \omega_p$.	1.2
2.10b	Вычислите значения E_0 , P_{heat} , и P_{scat} .	0.3

Парообразование с помощью света

Водный раствор содержит наночастицы серебра с концентрацией $n_{\text{np}} = 7.3 \times 10^{15} \text{ м}^{-3}$. Раствор находится внутри прозрачного прямоугольного сосуда размером $h \times h \times a = 10 \times 10 \times 1.0 \text{ см}^3$. Сосуд освещается нормально падающим пучком монохроматического света на частоте плазмонного резонанса с интенсивностью $S = 1.00 \text{ МВт} \cdot \text{м}^{-2}$, рис. 2.1(е). Температура воды $T_{\text{wa}} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Предположим, что в установившемся состоянии все джоулево тепло в наночастице идет на парообразование (с конечной температурой пара $T_{\text{st}} = 110 \text{ }^\circ\text{C}$). Температура воды при этом остается постоянной.

Термодинамический к.п.д. плазмонного парообразователя определяется как $\eta = P_{st}/P_{tot}$, где P_{st} – мощность, идущая на производство пара во всем сосуде, а P_{tot} – полная мощность светового потока, падающего на сосуд.

Большую часть времени каждая наночастица окружена паром, а не водой, поэтому частицу можно описывать как находящуюся в вакууме.

2.11a	Вычислите полную массу пара μ_{st} , произведенного в плазмонном парогенераторе за одну секунду при облучении световым пучком с плазмонной частотой и интенсивностью S , как дано выше.	0.6
2.11b	Вычислите значение к.п.д. η плазмонного парогенератора.	0.2

Введение

Эта задача связана с физикой ледяного щита Гренландии, второго по размерам ледяного массива в мире, Рис. 3.1(a). Для упрощения будем считать, что Гренландия представляет собой прямоугольный остров шириной (с запада на восток) $2L$ и длиной (с севера на юг) $5L$, в котором земля, находящаяся на уровне моря, полностью покрыта несжимаемым льдом (с постоянной плотностью ρ_{ice}), Рис. 3.1(b). Профиль высоты $H(x)$ ледяного щита не зависит от координаты y . Высота растет от нуля на побережье $x = \pm L$ до максимального значения H_m вдоль срединной оси север - юг (собственно оси y), известной как линия разделения льда, Рис. 3.1(c).

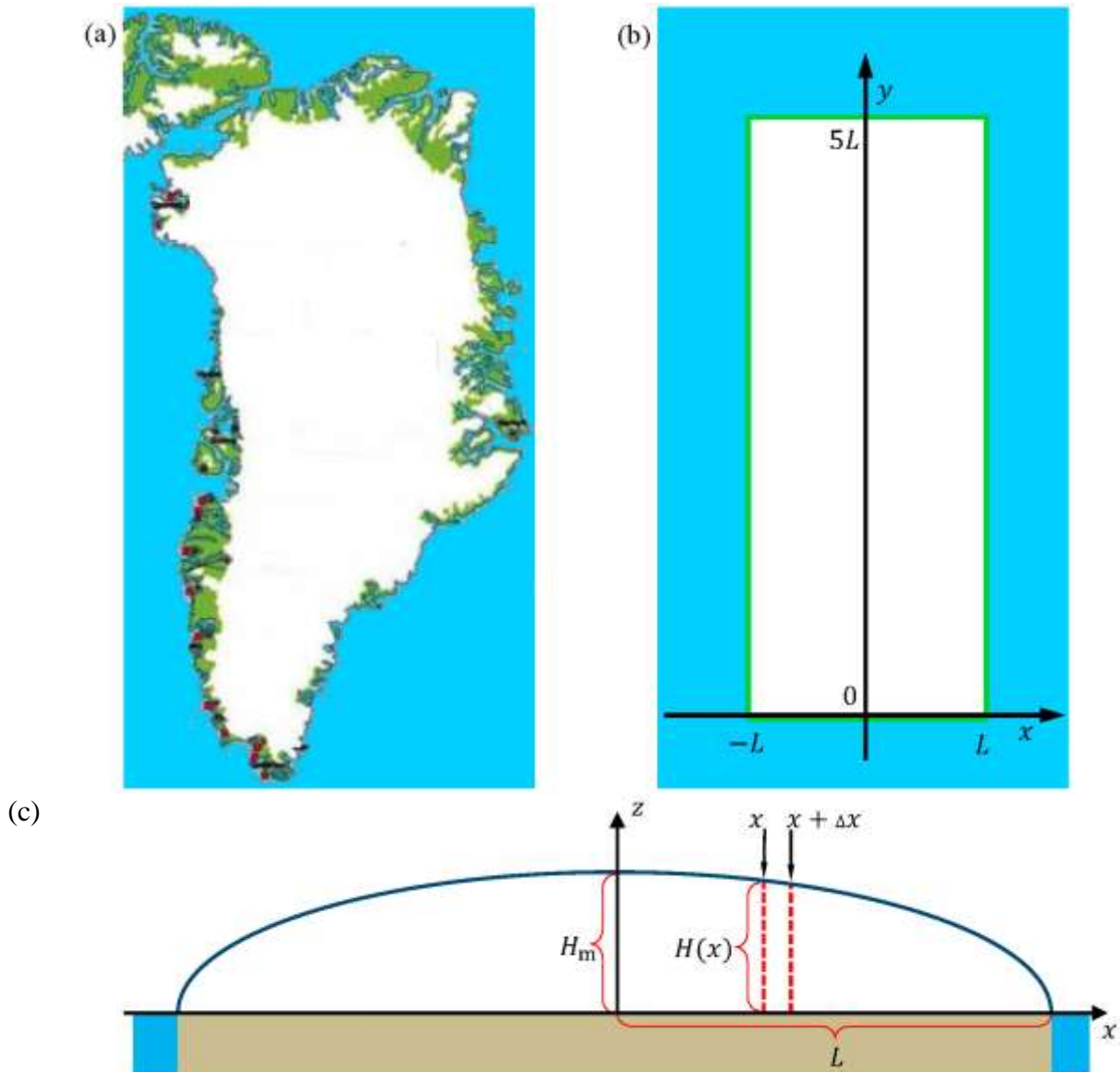


Рисунок 3.1 (a) Карта Гренландии, показывающая ледяной покров (белый цвет), свободную от ледяного покрова прибрежную территорию (зеленый) и окружающий океан (голубой). (b) Грубая модель ледяного щита Гренландии, как прямоугольной области в плоскости xy размерами $2L$ на $5L$. Линия разделения льда, или линия максимальной высоты ледового покрова H_m совпадает с осью y . (c) Вертикальное сечение (в плоскости xz) ледяного щита, показывающее профиль высоты

$H(x)$ (синяя линия). $H(x)$ не зависит от координаты y при $0 < y < 5L$, а в точках $y = 0$ и $y = 5L$ резко падает до нуля. Ось z обозначает положение линии разделения льда. Для удобства все вертикальные размеры на схеме многократно увеличены по сравнению с горизонтальными. Плотность льда ρ_{ice} есть величина постоянная.

Две полезные формулы

В этой задаче вам может пригодиться интеграл

$$\int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \frac{2}{3}$$

и приближенная формула $(1+x)^a \approx 1+ax$, справедливая при условии $|ax| \ll 1$.

Профиль высоты ледяного щита

На коротких промежутках времени ледяной щит можно рассматривать как несжимаемую гидростатическую систему с фиксированным профилем высоты $H(x)$.

3.1	Запишите выражение для давления внутри ледяного щита $p(x, z)$ как функцию высоты над уровнем моря z и расстояния x от линии разделения льда. Давлением атмосферы пренебречь.	0.3
-----	---	-----

Рассмотрим некоторую вертикальную пластину ледяного щита, находящуюся в положении равновесия. Пластина опирается на малую горизонтальную площадку $\Delta x \Delta y$ между координатами x и $x + \Delta x$ и обозначена красными штриховыми линиями на рис. 3.1(с). Размер Δy несущественен. Из-за разности высот двух сторон пластины, возникает горизонтальная компонента силы ΔF , действующая на вертикальные стороны. Она уравновешена силой трения $S_b \Delta x \Delta y$ льда о землю на площадке $\Delta x \Delta y$, где $S_b = 100 \text{ кПа}$.

3.2a	Для произвольного x покажите, что в пределе $\Delta x \rightarrow 0$ $S_b = kH dH/dx$, и найдите k .	0.9
3.2b	Выразите высоту $H(x)$ через ρ_{ice} , g , S_b и расстояние x от линии разделения льда. Результат должен подтвердить, что наибольшая высота ледяного щита H_m зависит от его полуширины L как $H_m \sim L^{1/2}$.	0.8
3.2c	Определите показатель степени γ , который показывает, как полный объем ледяного покрова V_{ice} зависит от площади A прямоугольного острова, $V_{ice} \sim A^\gamma$.	0.5

Динамический ледяной щит

На более длинных промежутках времени лед является вязкой несжимаемой жидкостью, которая под действием гравитации течет из центральной части к береговым. В рамках этой модели профиль высоты $H(x)$ сохраняется за счет того, что прирост льда из-за снегопадов в

центральной части уравновешивается таянием льда в береговой части. Дополнительно к геометрии ледяного щита, изображенного на рис. 3.1(b) и (c), сделаем следующие допущения:

- 1) Лед течет в плоскости xz от линии разделения льда (ось y).
- 2) Скорость нарастания льда c (м/год) в центральной части постоянна.
- 3) Лед покидает ледник только за счет таяния вблизи берегов $x = \pm L$.
- 4) Горизонтальная (x -)компонента $v_x(x) = dx/dt$ вектора скорости течения льда не зависит от координаты z .
- 5) Вертикальная (z -)компонента $v_z(x) = dz/dt$ вектора скорости течения льда не зависит от координаты x .

Рассмотрим только центральную область $|x| \ll L$ вблизи середины ледяного щита, где изменения высоты ледяного массива очень малы и ими можно пренебречь, т.е. $H(x) \approx H_m$.

3.3	Используйте неизменность массы, чтобы найти выражение для горизонтальной компоненты скорости течения льда $v_x(x)$ через c , x и H_m .	0.6
-----	--	-----

Из условия несжимаемости, т.е. постоянной плотности ρ_{ice} , следует, что закон сохранения массы накладывает следующее ограничение на компоненты вектора скорости течения:

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_z}{dz} = 0.$$

3.4	Запишите выражение для зависимости вертикальной компоненты $v_z(z)$ вектора скорости течения льда от координаты z .	0.6
-----	---	-----

Небольшая частичка льда, вначале находившаяся на поверхности льда в точке (x_i, H_m) , с течением времени будет двигаться вместе с потоком всего льда по некоторой траектории $z(x)$ в вертикальной xz плоскости.

3.5	Получите выражение для этой траектории $z(x)$.	0.9
-----	---	-----

Возрастные и климатические индикаторы в динамическом ледяном щите

Используя компоненты вектора скорости течения льда $v_x(x)$ и $v_z(z)$, можно оценить возраст льда $\tau(z)$ на некоторой глубине $H_m - z$ от поверхности ледяного щита.

3.6	Найдите выражение для возраста льда $\tau(z)$ как функции высоты над уровнем поверхности земли z непосредственно на линии разделения льда $x = 0$.	1.0
-----	---	-----

Ледовый керн, высверленный из внутренней части гренландского ледяного щита, содержит слои снега, образовавшегося в различные времена в прошлом. Такой керн может быть использован для анализа климатических изменений. Одним из лучших индикаторов служит так называемый параметр $\delta^{18}O$, определяемый как

$$\delta^{18}O = \frac{R_{ice} - R_{ref}}{R_{ref}} 1000 \text{‰},$$

где $R = \left[\frac{^{18}O}{^{16}O} \right]$ обозначает относительное количество двух стабильных изотопов кислорода ^{18}O и ^{16}O . опорное значение R_{ref} определяется из соотношения количества изотопов в мировом океане вблизи экватора. Наблюдения за гренландским ледяным щитом показали, что $\delta^{18}O$ снега приблизительно линейно зависит от температуры, рис. 3.2(a). Предполагая, что такая зависимость существовала всегда, можно оценить температуру T вблизи Гренландии во времена $\tau(z)$, вычисляя параметр $\delta^{18}O$, определенный по ледяному керну для глубины $H_m - z$.

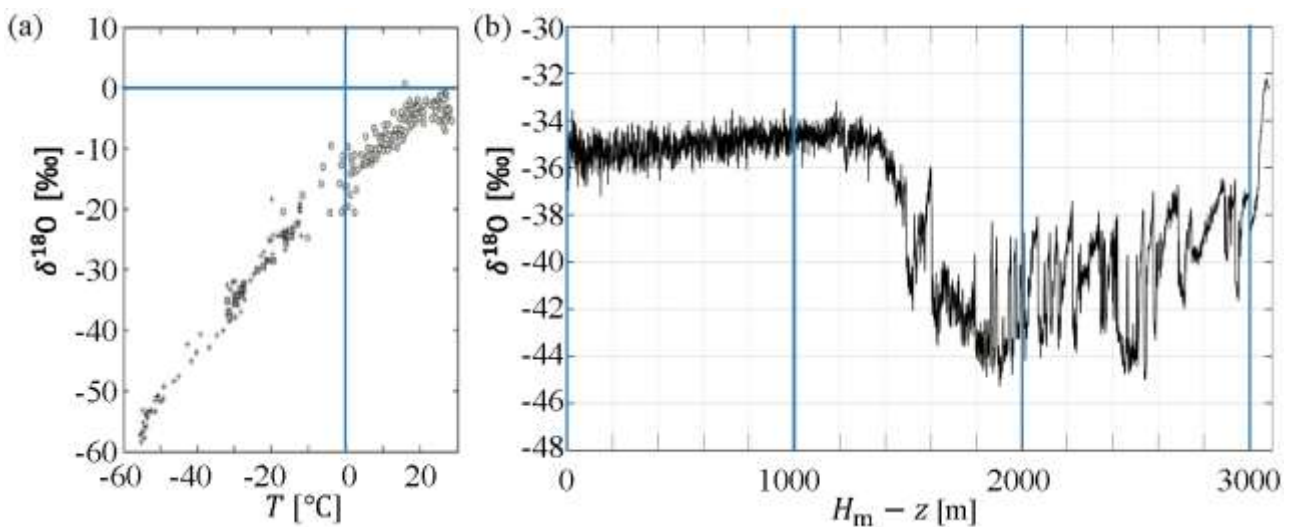


Рисунок 3.2 (а) Наблюдаемое соотношение между $\delta^{18}O$ в снегу и среднегодовой температурой T на поверхности. **(б)** Параметр $\delta^{18}O$, измеренный в зависимости от глубины $H_m - z$ от поверхности, полученный из анализа ледяного керна, высверленного от поверхности до гранитного основания в определенном месте на линии разделения льда в Гренландии, где $H_m = 3060$ м.

Измерения $\delta^{18}O$ в гренландском ледяном керне длиной 3060 м зафиксировали резкое изменение $\delta^{18}O$ на глубине 1492 м, рис. 3.2(b), отметившее конец последнего ледникового периода. Ледниковый период начался 120 000 лет назад, что соответствует глубине 3040 м, а современный межледниковый период начался 11 700 лет назад, что соответствует глубине 1492 м. Предположим, что эти два периода могут быть описаны двумя различными скоростями нарастания льда, c_{ia} (ледниковый период) и c_{ig} (межледниковый период), соответственно. Вы можете считать величину H_m постоянной в течение этих 120 000 лет.

3.7a	Определите скорости нарастания льда, c_{ig} и c_{ia} .	0.8
3.7b	Используйте данные на рис. 3.2, чтобы найти изменение температуры при переходе от ледникового периода к межледниковому.	0.2

Подъем уровня моря вследствие таяния ледяного щита Гренландии

Если льды Гренландии полностью растают, это вызовет подъем уровня мирового океана. Для грубой оценки подъема уровня моря можно рассматривать однородный подъем всего мирового океана с постоянной площадью $A_0 = 3.61 \cdot 10^{14} \text{ м}^2$.

3.8	Вычислите средний подъем уровня мирового океана в результате полного таяния ледяного щита Гренландии площадью $A_G = 1.71 \cdot 10^{12} \text{ м}^2$ и напряжением сдвига в основании щита $S_b = 100 \text{ кПа}$.	0.6
-----	--	-----

Массивный ледяной щит Гренландии оказывает гравитационное притяжение на окружающий океан. Если ледяной щит растает, то высокий местный прилив исчезнет, соответственно уровень моря вблизи Гренландии упадет, что частично скомпенсирует подъем уровня моря, вычисленный выше.

Для того, чтобы оценить величину гравитационного притяжения воды, представим ледяной щит Гренландии в виде точечной массы, расположенной на поверхности Земли и соответствующей полной массе ледяного щита Гренландии. Копенгаген находится на расстоянии 3500 км вдоль поверхности Земли от этой точечной массы. Представим также Землю (без точечной массы) как сферически симметричное тело, полностью покрытое мировым океаном. Полная площадь поверхности Земли $A_E = 5.10 \cdot 10^{14} \text{ м}^2$. Всеми эффектами вращения Земли можно пренебречь.

3.9	В рамках этой модели определите разность $h_{CPH} - h_{OPP}$ уровней моря в Копенгагене (h_{CPH}) и в точке, диаметрально противоположной Гренландии (h_{OPP}).	1.8
-----	---	-----

Solutions

	<p>1.1</p> <p>Top view: Triangle MCB: $CM = 195 \text{ km}$, $\angle MCB = 230^\circ - 180^\circ = 50^\circ$, and $\angle MBC = 75^\circ$, so $\angle CMB = 180^\circ - 75^\circ - 50^\circ = 55^\circ$.</p> <p>Then $CB = \frac{ CM \sin(\angle CMB)}{\sin(\angle MBC)} = 165.4 \text{ km}$.</p> <p>Triangle DCB: $CB = 165.4 \text{ km}$, $\angle DCB = 215^\circ - 180^\circ = 35^\circ$, and $\angle DBC = 75^\circ$, so $\angle CDB = 180^\circ - 75^\circ - 35^\circ = 70^\circ$.</p> <p>Then $CD = \frac{ CB \sin(\angle DBC)}{\sin(\angle CDB)} = 170.0 \text{ km}$.</p> <p>Triangle ECB: $CB = 165.4 \text{ km}$, $\angle ECB = 221^\circ - 180^\circ = 41^\circ$, and $\angle EBC = 75^\circ$, so $\angle CEB = 180^\circ - 75^\circ - 41^\circ = 64^\circ$.</p> <p>Then $CE = \frac{ CB \sin(\angle EBC)}{\sin(\angle CEB)} = 177.7 \text{ km}$.</p> <p>Triangle ECD: $\angle ECD = 41^\circ - 35^\circ = 6^\circ$. Horizontal distance travelled by Maribo: $DE = \frac{ DC \sin(\angle ECD)}{\sin(\angle CED)} = 19.77 \text{ km}$</p> <p>Side view: Triangle CFD: $FD = CD \tan(\angle FCD) = 59.20 \text{ km}$</p> <p>Triangle CGE: $GE = CE \tan(\angle GCE) = 46.62 \text{ km}$</p> <p>Thus vertical distance travelled by Maribo: $FD - GE = 12.57 \text{ km}$.</p> <p>Total distance travelled by Maribo from frame 155 to 161: $FG = \sqrt{ DE ^2 + (FD - GE)^2} = 23.43 \text{ km}$.</p> <p>The speed of Maribo is $v = \frac{23.43 \text{ km}}{2.28 \text{ s} - 1.46 \text{ s}} = 28.6 \text{ km/s}$</p>	
1.2a	<p>Newton's second law: $m_M \frac{dv}{dt} = -k\rho_{\text{atm}}\pi R_M^2 v^2$ yields $\frac{1}{v^2} dv = -\frac{k\rho_{\text{atm}}\pi R_M^2}{m_M} dt$.</p> <p>By integration $t = \frac{m_M}{k\rho_{\text{atm}}\pi R_M^2} \left(\frac{1}{0.9} - 1 \right) \frac{1}{v_M} = 0.88 \text{ s}$.</p>	0.7
1.2b	$\frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{melt}}} = \frac{\frac{1}{2} v_M^2}{c_{\text{sm}}(T_{\text{sm}} - T_0) + L_{\text{sm}}} = \frac{4.2 \times 10^8}{2.1 \times 10^6} = 2.1 \times 10^2 \gg 1.$	0.3

1.3a	$[x] = [t]^\alpha [\rho_{sm}]^\beta [c_{sm}]^\gamma [k_{sm}]^\delta = [s]^\alpha [kg\ m^{-3}]^\beta [m^2\ s^{-2}\ K^{-1}]^\gamma [kg\ m\ s^{-3}\ K^{-1}]^\delta$, so $[m] = [kg]^\beta [m]^{-3\beta+2\gamma+\delta} [s]^{\alpha-2\gamma-3\delta} [K]^{-\gamma-\delta}$. Thus $\beta + \delta = 0$, $-3\beta + 2\gamma + \delta = 1$, $\alpha - 2\gamma - 3\delta = 0$, and $-\gamma - \delta = 0$. From which $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \left(+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$ and $x(t) \approx \sqrt{\frac{k_{sm}t}{\rho_{sm}c_{sm}}}$.	0.6
1.3b	$x(5\ s) = 1.6\ mm$ $x/R_M = 1.6\ mm/130\ mm = 0.012$.	0.4

1.4a	Rb-Sr decay scheme: ${}_{37}^{87}\text{Rb} \rightarrow {}_{38}^{87}\text{Sr} + {}_{-1}^0\text{e} + \bar{\nu}_e$	0.3
1.4b	$N_{87\text{Rb}}(t) = N_{87\text{Rb}}(0)e^{-\lambda t}$ and Rb→Sr: $N_{87\text{Sr}}(t) = N_{87\text{Sr}}(0) + [N_{87\text{Rb}}(0) - N_{87\text{Rb}}(t)]$. Thus $N_{87\text{Sr}}(t) = N_{87\text{Sr}}(0) + (e^{\lambda t} - 1)N_{87\text{Rb}}(t)$, and dividing by $N_{86\text{Sr}}$ we obtain the equation of a straight line: $\frac{N_{87\text{Sr}}(t)}{N_{86\text{Sr}}} = \frac{N_{87\text{Sr}}(0)}{N_{86\text{Sr}}} + (e^{\lambda t} - 1) \frac{N_{87\text{Rb}}(t)}{N_{86\text{Sr}}}$	0.7
1.4c	Slope: $e^{\lambda t} - 1 = a = \frac{0.712-0.700}{0.25} = 0.050$ and $T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} = 4.9 \times 10^{10}$ year. So $\tau_M = \ln(1 + a) \frac{1}{\lambda} = \frac{\ln(1+a)}{\ln(2)} T_{1/2} = 3.4 \times 10^9$ year .	0.4

1.5	Kepler's 3rd law on comet Encke and Earth, with the orbital semi-major axis of Encke given by $a = \frac{1}{2}(a_{\min} + a_{\max})$. Thus $t_{\text{Encke}} = \left(\frac{a}{a_E}\right)^{3/2} t_E = 3.30$ year = 1.04×10^8 s.	0.6
-----	---	-----

1.6a	For Earth around its rotation axis: Angular velocity $\omega_E = \frac{2\pi}{24\ \text{h}} = 7.27 \times 10^{-5}\ \text{s}^{-1}$. Moment of inertia $I_E = 0.83 \frac{2}{5} m_E R_E^2 = 8.07 \times 10^{37}\ \text{kg}\ \text{m}^2$. Angular momentum $L_E = I_E \omega_E = 5.87 \times 10^{33}\ \text{kg}\ \text{m}^2\ \text{s}^{-1}$. Astroid $m_{\text{ast}} = \frac{4\pi}{3} R_{\text{ast}}^3 \rho_{\text{ast}} = 1.57 \times 10^{15}\ \text{kg}$ and angular momentum $L_{\text{ast}} = m_{\text{ast}} v_{\text{ast}} R_E = 2.51 \times 10^{26}\ \text{kg}\ \text{m}^2\ \text{s}^{-1}$. L_{ast} is perpendicular to L_E , so by conservation angular momentum: $\tan(\Delta\theta) = L_{\text{ast}}/L_E = 4.27 \times 10^{-8}$. The axis tilt $\Delta\theta = 4.27 \times 10^{-8}$ rad (so the north pole move $R_E \Delta\theta = 0.27$ m).	0.7
1.6b	At vertical impact $\Delta L_E = 0$ so $\Delta(I_E \omega_E) = 0$. Thus $\Delta\omega_E = -\omega_E(\Delta I_E)/I_E$, and since $\Delta I_E/I_E = m_{\text{ast}} R_E^2/I_E = 7.9 \times 10^{-10}$ we obtain $\Delta\omega_E = -5.76 \times 10^{-14}\ \text{s}^{-1}$. The change in rotation period is $\Delta T_E = 2\pi \left(\frac{1}{\omega_E + \Delta\omega_E} - \frac{1}{\omega_E}\right) \approx -2\pi \frac{\Delta\omega_E}{\omega_E^2} = 6.84 \times 10^{-5}$ s.	0.7
1.6c	At tangential impact L_{ast} is parallel to L_E so $L_E + L_{\text{ast}} = (I_E + \Delta I_E)(\omega_E + \Delta\omega_E)$ and thus $\Delta T_E = 2\pi \left(\frac{1}{\omega_E + \Delta\omega_E} - \frac{1}{\omega_E}\right) = 2\pi \left(\frac{I_E + \Delta I_E}{L_E + L_{\text{ast}}} - \frac{1}{\omega_E}\right) = -3.62 \times 10^{-3}$ s.	0.7

1.7a	Minimum impact speed is the escape velocity from Earth: $v_{\text{imp}}^{\text{min}} = \sqrt{\frac{2Gm_E}{R_E}} = 11.2 \text{ km/s}$	0.5
1.7b	<p>Maximum impact speed $v_{\text{imp}}^{\text{max}}$ arises from three contributions:</p> <p>(I) The velocity v_b of the body at distance a_E (Earth orbit radius) from the Sun, $v_b = \sqrt{\frac{2Gm_S}{a_E}} = 42.1 \text{ km/s}$.</p> <p>(II) The orbital velocity of the Earth, $v_E = \frac{2\pi a_E}{1 \text{ year}} = 29.8 \text{ km/s}$.</p> <p>(III) Gravitational attraction from the Earth and kinetic energy seen from the Earth:</p> $\frac{1}{2}(v_b + v_E)^2 = -\frac{Gm_E}{R_E} + \frac{1}{2}(v_{\text{imp}}^{\text{max}})^2.$ <p>In conclusion: $v_{\text{imp}}^{\text{max}} = \sqrt{(v_b + v_E)^2 + \frac{2Gm_E}{R_E}} = 72.8 \text{ km/s}$.</p>	1.2
	Total	9.0

Solutions

A single spherical silver nanoparticle

2.1	<p>Volume of the nanoparticle: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4.19 \times 10^{-24} \text{ m}^3$.</p> <p>Mass of nanoparticles: $M = V \rho_{\text{Ag}} = 4.39 \times 10^{-20} \text{ kg}$</p> <p>Number of ions: $N = N_A \frac{M}{M_{\text{Ag}}} = 2.45 \times 10^5$.</p> <p>Charge density $\rho = \frac{eN}{V} = 9.38 \times 10^9 \text{ C m}^{-3}$</p> <p>Electron concentration $n = \frac{N}{V} = 5.85 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$, so charge density $\rho = en$</p> <p>Total charge of free electrons $Q = eN = 3.93 \times 10^{-14} \text{ C}$,</p> <p>Total mass of free electrons $m_0 = m_e N = 2.23 \times 10^{-25} \text{ kg}$.</p>	0.7
-----	---	-----

The electric field in a charge-neutral region inside a charged sphere

2.2	<p>For a sphere with radius R and constant charge density ρ, for any point inside the sphere designated by radius-vector $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ ($r < R$) Gauss's law yields directly $4\pi r^2 \epsilon_0 \mathbf{E}_+ = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \mathbf{e}_r$, where \mathbf{e}_r is the unit radial vector pointing away from the center of the sphere. Thus, $\mathbf{E}_+ = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}$.</p> <p>Likewise, inside another sphere of radius R_1 and charge density $-\rho$ the field is $\mathbf{E}_- = \frac{-\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}'$, where \mathbf{r}' is the radius-vector of the point in the coordinate system with the origin in the center of this sphere.</p> <p>Merging the two charge configurations gives the setup we want with $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_d$. So inside the charge-free region $\mathbf{r} - \mathbf{x}_p < R_1$ the field is $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r} + \frac{-\rho}{3\epsilon_0} (\mathbf{r} - \mathbf{x}_d)$ or $\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{x}_d$ with the pre-factor $A = \frac{1}{3}$</p>	1.2
-----	---	-----

The restoring force on the displaced electron cloud

2.3	<p>With $\mathbf{x}_p = x_p \mathbf{e}_x$ and $x_p \ll R$ we have from above that approximately the field induced inside the particle is $\mathbf{E}_{\text{ind}} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{x}_p$. The number of electrons that produced \mathbf{E}_{ind} is negligibly smaller than the number of electrons inside the particle, so $\mathbf{F} \cong Q\mathbf{E}_{\text{ind}} = (-eN) \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{x}_p = -\frac{4\pi}{9\epsilon_0} R^3 e^2 n^2 x_p \mathbf{e}_x$ (like for a harmonic oscillator).</p> <p>The work done on the electrons to shift the electron cloud is $W_{\text{el}} = -\int_0^{x_p} F(x') dx' = \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{9\epsilon_0} R^3 e^2 n^2 \right) x_p^2$</p>	1.0
-----	--	-----

The spherical silver nanoparticle in an external constant electric field

2.4	<p>Inside the metallic particle in the steady state the electric field must be equal to 0. The induced field (from 2.2 or 2.3) compensates the external field: $\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{\text{ind}} = 0$, so $x_p = \frac{3\epsilon_0}{\rho} E_0 = \frac{3\epsilon_0}{en} E_0$.</p> <p>Charge displaced through the yz-plane is the total charge of electrons in the cylinder of</p>	0.6
-----	--	-----

	radius R and height x_p : $-\Delta Q = -\rho \pi R^2 x_p = -\pi R^2 n e x_p$.	
--	--	--

The equivalent capacitance and inductance of the silver nanoparticle

2.5a	The electric energy W_{el} of a capacitor with capacitance C holding charges $\pm\Delta Q$ is $W_{el} = \frac{\Delta Q^2}{2C}$. The energy of such capacitor is equal to the work (see 2.3) done to separate the charges (see 2.4), thus $C = \frac{\Delta Q^2}{2W_{el}} = \frac{9}{4} \epsilon_0 \pi R = 6.26 \times 10^{-19}$ F.	0.7
2.5b	Equivalent scheme for a capacitor reads: $\Delta Q = C V_0$. Combining charge from (2.4) and capacitance from (2.5a) gives $V_0 = \frac{\Delta Q}{C} = \frac{4}{3} R E_0$.	0.4

2.6a	The kinetic energy of the electron cloud is defined as the kinetic energy of one electron multiplied by the number of electrons in the cloud $W_{kin} = \frac{1}{2} m_e v^2 N = \frac{1}{2} m_e v^2 \left(\frac{4}{3} \pi R^3 n \right)$. The current I is the charge of electrons in the cylinder of area πR^2 and height $v \Delta t$ divided by time Δt , thus $I = -e n v \pi R^2$.	0.7
2.6b	The energy carried by current I in the equivalent circuit with inductance L is $W = \frac{1}{2} L I^2$ is, in fact, the kinetic energy of electrons W_{kin} . Taking the energy and current from (2.6a) results $L = \frac{4 m_e}{3 \pi R n e^2} = 2.57 \times 10^{-14}$ H.	0.5

The plasmon resonance of the silver nanoparticle

2.7a	From the LC-circuit analogy we can directly derive $\omega_p = (LC)^{-1/2} = \sqrt{ne^2/3\epsilon_0 m_e}$. Alternatively it is possible to use the harmonic law of motion in (2.3) and get the same result for the frequency	0.5
2.7b	$\omega_p = 7.88 \times 10^{15}$ rad/s, for light with angular frequency $\omega = \omega_p$ wavelength is $\lambda_p = 2\pi c/\omega_p = 239$ nm.	0.4

The silver nanoparticle illuminated with light at the plasmon frequency

2.8a	The velocity of an electron $v = \frac{dx}{dt} = -\omega x_0 \sin \omega t = v_0 \sin \omega t$. For harmonic motion it is enough to average over period of oscillations. The time-averaged kinetic energy on the electron $\langle W_k \rangle = \langle \frac{m_e v^2}{2} \rangle = \frac{m_e}{2} \langle v^2 \rangle$. During time t_0 each electron hits the ions t_0/τ times. So The energy lost in the whole nanoparticle during one period of oscillations is $W_{heat} = N \langle \frac{m_e v^2}{2} \rangle = \frac{4}{3} \pi R^3 n \langle \frac{m_e v^2}{2} \rangle$. Time-averaged Joule heating power $P_{heat} = \frac{1}{\tau} W_{kin} = \frac{1}{2\tau} m_e \langle v^2 \rangle \left(\frac{4}{3} \pi R^3 n \right)$. The expression for current is taken from (2.6a), squared and averaged	1.0
------	--	-----

	$\langle I^2 \rangle = (en \pi R^2)^2 \langle v^2 \rangle = \left(\frac{3Q}{4R}\right)^2 \langle v^2 \rangle .$	
2.8b	The oscillating current $I = I_0 \sin \omega t = \pi R^2 n e v_0 \sin \omega t$ produces the heat in the resistance R_{heat} equal to $P_{\text{heat}} = R_{\text{heat}} \langle I^2 \rangle$, what together with results from (2.8a) leads to $R_{\text{heat}} = \frac{W_{\text{kin}}}{\tau I^2} = \frac{2m_e}{3\pi n e^2 R \tau} = 2.46 \Omega$.	1.0

2.9	$R_{\text{scat}} = \frac{P_{\text{scat}}}{\langle I^2 \rangle}$ and $\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} \omega_p^2 x_0^2$ yields $R_{\text{scat}} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_p^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} \frac{16R^2}{9Q^2 \langle v^2 \rangle} = \frac{8\omega_0^2 R^2}{27\pi \epsilon_0 c^3} = 2.45 \Omega$.	1.0
-----	---	-----

2.10a	Ohm's law for a <i>LCR</i> serious circuit is $I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$. At the resonance frequency time-averaged voltage squared is $\langle V^2 \rangle = Z_R^2 \langle I^2 \rangle = (R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2 \langle I^2 \rangle$. And from (2.5b) $\langle V^2 \rangle = \frac{1}{2} V_0^2 = \frac{8}{9} R^2 E_0^2$, so Ohm's law results in $\langle I^2 \rangle = \frac{8R^2 E_0^2}{9(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2}$. Now time-averaged power loses are $P_{\text{heat}} = R_{\text{heat}} \langle I^2 \rangle = \frac{8R_{\text{heat}} R^2}{9(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2} E_0^2$ and $P_{\text{scat}} = \frac{8R_{\text{scat}} R^2}{9(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2} E_0^2 = \frac{R_{\text{scat}}}{R_{\text{heat}}} \langle P_{\text{heat}} \rangle$.	1.2
-------	--	-----

2.10b	Starting with the electric field amplitude $E_0 = \sqrt{2S/(\epsilon_0 c)} = 27.4 \text{ kV/m}$, we calculate $P_{\text{heat}} = 6.82 \text{ nW}$ and $P_{\text{scat}} = 6.81 \text{ nW}$.	0.3
-------	--	-----

Steam generation by light

2.11a	Total number of nanoparticles in the vessel: $N_{\text{np}} = h^2 a n_{\text{np}} = 7.3 \times 10^{11}$. Then the total time-averaged Joule heating power: $P_{\text{st}} = N_{\text{np}} P_{\text{heat}} = 4.98 \text{ kW}$. This power goes into the steam generation: $P_{\text{st}} = \mu_{\text{st}} L_{\text{tot}}$, with $L_{\text{tot}} = c_{\text{wa}}(T_{100} - T_{\text{wa}}) + L_{\text{wa}} + c_{\text{st}}(T_{\text{st}} - T_{100}) = 2.62 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$. Thus the mass of steam produced in second μ_{st} : $\mu_{\text{st}} = \frac{P_{\text{st}}}{L_{\text{tot}}} = 1.90 \times 10^{-3} \text{ kg s}^{-1}$.	0.6
-------	---	-----

2.11b	The power of light incident on the vessel $P_{\text{tot}} = h^2 S = 0.01 \text{ m}^2 \times 1 \text{ MW m}^{-2} = 10.0 \text{ kW}$, and the power directed for steam production by nanoparticles is given in 2.11a. Thus $\eta = \frac{P_{\text{st}}}{P_{\text{tot}}} = \frac{4.98 \text{ kW}}{10.0 \text{ kW}} = 0.498$.	0.2
-------	---	-----

	Total	12.0
--	--------------	-------------

Solutions

3.1	The pressure is given by the hydrostatic pressure $p(x, z) = \rho_{\text{ice}} g (H(x) - z)$, which is zero at the surface.	0.3
3.2a	<p>The outward force on a vertical slice at a distance x from the middle and of a given width Δy is obtained by integrating up the pressure times the area:</p> $F(x) = \Delta y \int_0^{H(x)} \rho_{\text{ice}} g (H(x) - z) dz = \frac{1}{2} \Delta y \rho_{\text{ice}} g H(x)^2$ <p>which implies that $\Delta F = F(x) - F(x + \Delta x) = -\frac{dF}{dx} \Delta x = -\Delta y \rho_{\text{ice}} g H(x) \frac{dH}{dx} \Delta x$. This finally shows that</p> $S_b = \frac{\Delta F}{\Delta x \Delta y} = -\rho_{\text{ice}} g H(x) \frac{dH}{dx}$ <p>Notice the sign, which must be like this, since S_b was defined as positive and $H(x)$ is a decreasing function of x.</p>	0.9
3.2b	<p>To find the height profile, we solve the differential equation for $H(x)$:</p> $-\frac{S_b}{\rho_{\text{ice}} g} = H(x) \frac{dH}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} H(x)^2$ <p>with the boundary condition that $H(L) = 0$. This gives the solution:</p> $H(x) = \sqrt{\frac{2S_b L}{\rho_{\text{ice}} g}} \sqrt{1 - x/L}$ <p>Which gives the maximum height $H_m = \sqrt{\frac{2S_b L}{\rho_{\text{ice}} g}}$.</p> <p>Alternatively, dimensional analysis could be used in the following manner. First notice that $\mathcal{L} = [H_m] = [\rho_{\text{ice}}^\alpha g^\beta \tau_b^\gamma L^\delta]$. Using that $[\rho_{\text{ice}}] = \mathcal{M} \mathcal{L}^{-3}$, $[g] = \mathcal{L} \mathcal{T}^{-2}$, $[\tau_b] = \mathcal{M} \mathcal{L}^{-1} \mathcal{T}^{-2}$, demands that $\mathcal{L} = [H_m] = [\rho_{\text{ice}}^\alpha g^\beta \tau_b^\gamma L^\delta] = \mathcal{M}^{\alpha+\gamma} \mathcal{L}^{-3\alpha+\beta-\gamma+\delta} \mathcal{T}^{-2\beta-2\gamma}$, which again implies $\alpha + \gamma = 0$, $-3\alpha + \beta - \gamma + \delta = 1$, $2\beta + 2\gamma = 0$. These three equations are solved to give $\alpha = \beta = -\gamma = \delta - 1$, which shows that</p> $H_m \propto \left(\frac{S_b}{\rho_{\text{ice}} g} \right)^\gamma L^{1-\gamma}$ <p>Since we were informed that $H_m \propto \sqrt{L}$, it follows that $\gamma = 1/2$. With the boundary condition $H(L) = 0$, the solution then take the form</p> $H(x) \propto \left(\frac{S_b}{\rho_{\text{ice}} g} \right)^{1/2} \sqrt{L - x}$ <p>The proportionality constant of $\sqrt{2}$ cannot be determined in this approach.</p>	0.8

3.2c	<p>For the rectangular Greenland model, the area is equal to $A = 10L^2$ and the volume is found by integrating up the height profile found in problem 3.2b:</p> $V_{G,ice} = (5L)2 \int_0^L H(x) dx = 10L \int_0^L \left(\frac{\tau_b L}{\rho_{ice} g}\right)^{1/2} \sqrt{1 - x/L} dx = 10H_m L^2 \int_0^1 \sqrt{1 - \tilde{x}} d\tilde{x}$ $= 10H_m L^2 \left[-\frac{2}{3}(1 - \tilde{x})^{3/2}\right]_0^1 = \frac{20}{3} H_m L^2 \propto L^{5/2},$ <p>where the last line follows from the fact that $H_m \propto \sqrt{L}$. Note that the integral need not be carried out to find the scaling with L. This implies that $V_{G,ice} \propto A_G^{5/4}$ and the wanted exponent is $\gamma = 5/4$.</p>	0.5
------	--	-----

3.3	<p>According to the assumption of constant accumulation c the total mass accumulation rate from an area of width Δy between the ice divide at $x = 0$ and some point at $x > 0$ must equal the total mass flux through the corresponding vertical cross section at x. That is: $\rho c x \Delta y = \rho \Delta y H_m v_x(x)$, from which the velocity is isolated:</p> $v_x(x) = \frac{cx}{H_m}$	0.6
-----	--	-----

3.4	<p>From the given relation of incompressibility it follows that</p> $\frac{dv_z}{dz} = -\frac{dv_x}{dx} = -\frac{c}{H_m}$ <p>Solving this differential equation with the initial condition $v_z(0) = 0$, shows that:</p> $v_z(z) = -\frac{cz}{H_m}$	0.6
-----	--	-----

3.5	<p>Solving the two differential equations</p> $\frac{dz}{dt} = -\frac{cz}{H_m} \quad \text{and} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{cx}{H_m}$ <p>with the initial conditions that $z(0) = H_m$, and $x(0) = x_i$ gives</p> $z(t) = H_m e^{-ct/H_m} \quad \text{and} \quad x(t) = x_i e^{ct/H_m}$ <p>This shows that $z = H_m x_i / x$, meaning that flow lines are hyperbolas in the xz-plane. Rather than solving the differential equations, one can also use them to show that</p> $\frac{d}{dt}(xz) = \frac{dx}{dt}z + x\frac{dz}{dt} = \frac{cx}{H_m}z - x\frac{cz}{H_m} = 0$ <p>which again implies that $xz = \text{const}$. Fixing the constant by the initial conditions, again leads to the result that $z = H_m x_i / x$.</p>	0.9
-----	--	-----

3.6	<p>At the ice divide, $x = 0$, the flow will be completely vertical, and the t-dependence of z found in 3.5 can be inverted to find $\tau(z)$. One finds that $\tau(z) = \frac{H_m}{c} \ln\left(\frac{H_m}{z}\right)$.</p>	1.0
-----	---	-----

3.7a	<p>The present interglacial period extends to a depth of 1492 m, corresponding to 11,700 year. Using the formula for $\tau(z)$ from problem 3.6, one finds the following accumulation rate for the interglacial:</p> $c_{ig} = \frac{H_m}{11,700 \text{ years}} \ln \left(\frac{H_m}{H_m - 1492 \text{ m}} \right) = 0.1749 \text{ m/year.}$ <p>The beginning of the ice age 120,000 years ago is identified as the drop in $\delta^{18}\text{O}$ in figure 3.2b at a depth of 3040 m. Using the vertical flow velocity found in problem 3.4, one has $\frac{dz}{z} = -\frac{c}{H_m} dt$, which can be integrated down to a depth of 3040 m, using a stepwise constant accumulation rate:</p> $\begin{aligned} H_m \ln \left(\frac{H_m}{H_m - 3040 \text{ m}} \right) &= -H_m \int_{H_m}^{H_m - 3040 \text{ m}} \frac{1}{z} dz \\ &= \int_{11,700 \text{ year}}^{120,000 \text{ year}} c_{ia} dt + \int_0^{11,700 \text{ year}} c_{ig} dt \\ &= c_{ia}(120,000 \text{ year} - 11,700 \text{ year}) + c_{ig} 11,700 \text{ year} \end{aligned}$ <p>Isolating from this equation leads to $c_{ia} = 0.1232$, i.e. far less precipitation than now.</p>	0.8
3.7b	<p>Reading off from figure 3.2b: $\delta^{18}\text{O}$ changes from $-43,5 \text{ ‰}$ to $-34,5 \text{ ‰}$. Reading off from figure 3.2a, T then changes from -40 °C to -28 °C. This gives $\Delta T \approx 12 \text{ °C}$.</p>	0.2
3.8	<p>From the area A_G one finds that $L = \sqrt{A_G/10} = 4.14 \times 10^5 \text{ m}$. Inserting numbers in the volume formula found in 3.2c, one finds that:</p> $V_{G,ice} = \frac{20}{3} L^{5/2} \sqrt{\frac{2S_b}{\rho_{ice}g}} = 3.45 \times 10^{15} \text{ m}^3$ <p>This ice volume must be converted to liquid water volume, by equating the total masses, i.e. $V_{G,wa} = V_{G,ice} \frac{\rho_{ice}}{\rho_{wa}} = 3.17 \times 10^{15} \text{ m}^3$, which is finally converted to a sea level rise, as $h_{G,rise} = \frac{V_{G,wa}}{A_0} = 8.79 \text{ m}$.</p>	0.6

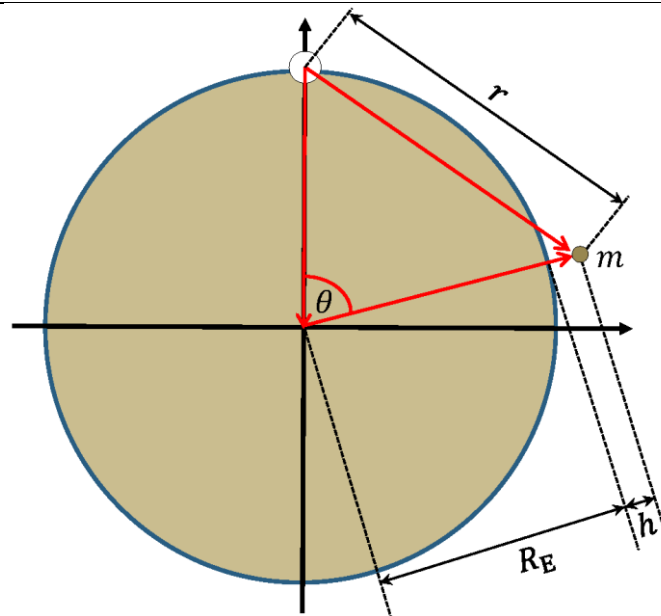


Figure 3.S1 Geometry of the ice ball (white circle) with a test mass m (small gray circle).

The total mass of the ice is

$$M_{\text{ice}} = V_{G,\text{ice}} \rho_{\text{ice}} = 3.17 \times 10^{18} \text{ kg} = 5.31 \times 10^{-7} m_E$$

- 3.9 The total gravitational potential felt by a test mass m at a certain height h above the surface of the Earth, and at a polar angle θ (cf. figure 3.S1), with respect to a rotated polar axis going straight through the ice sphere is found by adding that from the Earth with that from the ice:

1.6

$$U_{\text{tot}} = -\frac{Gm_E m}{R_E + h} - \frac{GM_{\text{ice}} m}{r} = -mgR_E \left(\frac{1}{1 + h/R_E} + \frac{M_{\text{ice}}/m_E}{r/R_E} \right)$$

where $g = Gm_E/R_E^2$. Since $h/R_E \ll 1$ one may use the approximation given in the problem, $(1 + x)^{-1} \approx 1 - x$, $|x| \ll 1$, to approximate this by

$$U_{\text{tot}} \approx -mgR_E \left(1 - \frac{h}{R_E} + \frac{M_{\text{ice}}/m_E}{r/R_E} \right).$$

Isolating h now shows that $h = h_0 + \frac{M_{\text{ice}}/m_E}{r/R_E} R_E$, where $h_0 = R_E + U_{\text{tot}}/(mg)$. Using again that $h/R_E \ll 1$, trigonometry shows that $r \approx 2R_E |\sin(\theta/2)|$, and one has:

$$h(\theta) - h_0 \approx \frac{M_{\text{ice}}/m_E}{2|\sin(\theta/2)|} R_E \approx \frac{1.69 \text{ m}}{|\sin(\theta/2)|}$$

To find the magnitude of the effect in Copenhagen, the distance of 3500 km along the surface is used to find the angle $\theta_{\text{CPH}} = (3.5 \times 10^6 \text{ m})/R_E \approx 0.549$, corresponding to $h_{\text{CPH}} - h_0 \approx 6.25 \text{ m}$. Directly opposite to Greenland corresponds to $\theta = \pi$, which gives $h_{\text{OPP}} - h_0 \approx 1.69 \text{ m}$. The difference is then $h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} \approx 4.56 \text{ m}$, where h_0 has dropped out.

Total

9.0