

Road to IPhO

Форма фонтана

Введение

Распылители воды используются в различных местах, таких как фермы, парки и т. п. Рассмотрим распылитель полусферической формы радиусом r , расположенный на высоте h от земли, как показано на **Рис. 1**. Будем считать, что радиус полусферы много меньше расстояний R , поэтому распылитель можно считать точечным. Вода вытекает из небольших одинаковых отверстий в корпусе распылителя. Пусть $\rho(\theta)$ – количество этих отверстий на единицу площади при угле θ . Вода разбрызгивается с одинаковой начальной скоростью v_0 во всех направлениях.

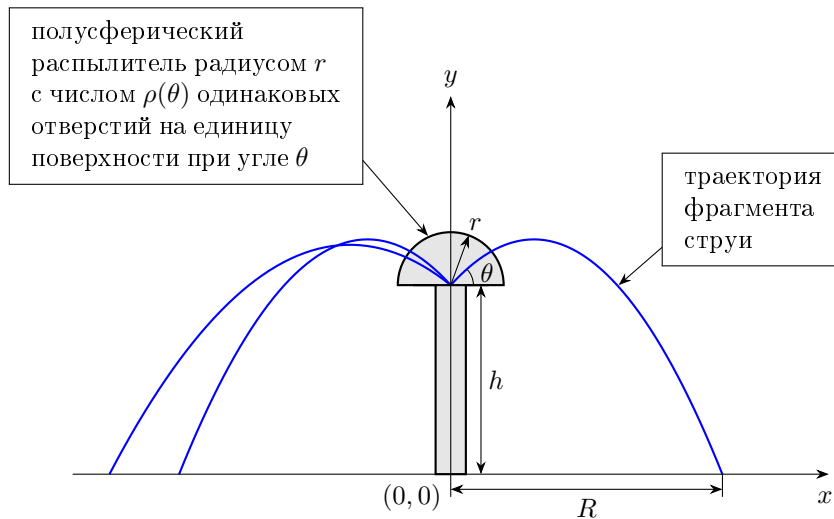


Рис. 1. Схема распылителя

Часть А. Равномерное распределение (6.0 баллов)

Рассмотрим равномерное распределение отверстий по поверхности полусферы (то есть $\rho(\theta)$ является постоянной величиной).

A1 Найдите зависимость от времени t координат $x(t)$ и $y(t)$ небольшого фрагмента струи, выпущенного под углом θ с начальной скоростью v_0 . **0.5**

A2 Найдите уравнение траектории струи $y(x, \theta)$. В ответе используйте только одну тригонометрическую функцию (например, только синус, косинус или тангенс). Считайте, что $\theta > 0$. **1.0**

A3 Огибающая – граничная кривая, охватывающая все траектории движения воды (т.е. за неё вода в процессе движения попасть не может). Получите уравнение огибающей $y(x)$. Зарисуйте возможные траектории и их огибающую. **3.0**

A4 Найдите зависимость $R = R(\theta)$ (см. **Рис. 1**). **1.0**

A5 Покажите, что в пределе $h \rightarrow 0$ верно $R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$. **0.5**

Road to IPhO

Часть В. Неравномерное распределение (4.0 балла)

Теперь рассмотрим неравномерное распределение $\rho(\theta)$.

В1 Рассмотрим тонкое кольцо радиусом R и шириной dR , на которое попадает вода, вылетающая из распылителя. Найдите площадь dA_W этого кольца. Ответ выразите через R , R' и $d\theta$, где $R' \equiv \frac{dR}{d\theta}$. **1.0**

В2 Найдите $\rho(\theta)$, при котором земля поливается равномерно по площади. Выразите ответ через R , R' и другие величины. Рассмотрите только те значения θ , при которых выполнено $R' > 0$. **1.0**

В3 Найдите $\rho(\theta)$, при котором земля поливается равномерно в случае $h = 0$ и $\theta < 45^\circ$. **2.0**