Task Edu

T Task

S Solution

M Marking scheme

A23

Введение

Принятые обозначения: Длина вектора $\vec{A}$ обозначается $A \equiv |\vec{A}|$. x-, y- и z-компоненты вектора обозначаются как A_x, A_y и A_z соответственно. Производная величины по времени обозначается точкой: $\dot{\vec{A}} \equiv d\vec{A}/dt$, $\dot{A} \equiv dA/dt$. Единичный вектор в направлении $\vec{A}$ обозначается $\hat{A}$. Единичные векторы вдоль осей декартовой системы координат, таким образом, — $\hat{x}$, $\hat{y}$ и $\hat{z}$. Определения скалярного и векторного произведений:

$$\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) = \left(\vec{B}\cdot\vec{A}\right) = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = AB\cos\theta$$
$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = -\left(\vec{B}\times\vec{A}\right) = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\hat{x} + \left(A_zB_x - A_xB_z\right)\hat{y} + \left(A_xB_x - A_yB_x\right)\hat{z}\ |\vec{A}\times\vec{B}| = AB\sin\theta,$$

где θ — угол между $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Тройные произведения векторов:

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C} = \left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\vec{A},\ \left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C} = \left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\cdot\vec{A} = \left(\vec{C}\times\vec{A}\right)\cdot\vec{B}.$$

Векторные произведения очень полезны при описании многих соотношений в физике. Например:

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r},\ \vec{F}_{Lorentz} = Q\vec{v}\times\vec{B},$$

и зачастую экономят время, позволяя записать три уравнения для компонент векторов в одном.

Постановка задачи

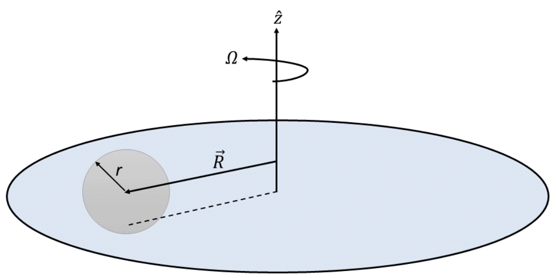

Рис. 1. Шарик, катящийся без проскальзывания по вращающемуся диску

Шарик массой m и радиусом r катится без проскальзывания по горизонтальному вращающемуся диску (см. рис. 1). Его масса распределена сферически симметрично, т.е. плотность зависит только от расстояния до центра. Момент инерции шарика I. В части B, в которой диск вращается свободно, момент инерции диска равен I_d.

Цель задачи — исследовать движение и траекторию шарика в лабораторной системе отсчёта. При решении задачи считайте диск достаточно большим, и что шарик с него не скатывается. Используются следующие обозначения:

- Ω — модуль угловой скорости вращающегося диска,
- $\vec{\omega}$ — угловая скорость шарика относительно его оси вращения,
- $\vec{R}$ — горизонтальное положение центра шарика относительно оси вращения диска,
- $\vec{v}$ — скорость шарика в точке $\vec{R}$ в лабораторной системе отсчёта.

Начальные положение $\vec{R}_0 \equiv \vec{R}(0)$ и скорость $\vec{v}_0 \equiv \vec{v}(0)$ шарика, а также угловая скорость диска $\Omega_0 \equiv \Omega(0)$ известны.

В векторных выражениях можно использовать орт $\hat{z}$. Если нужно выразить ответ через известные величины, можно использовать m, r, I и I_d. Подставляйте I в общем виде, если не указано иное.

Также рекомендуется использовать следующие обозначения:

$$\alpha = \frac{I}{I+mr^2},\quad \delta = \frac{I_d}{mr^2},$$

Ответы, представляющие собой векторные величины, можно выражать через векторное и скалярное произведения, а также единичные векторы в направлении осей системы координат.

Часть A. Шарик на диске, вращающемся с постоянной угловой скоростью (1.5 балла)

Рассмотрим сначала простейший случай, когда угловая скорость диска вертикальна и постоянна, т.е. $\Omega = \Omega_0$.

A1 [0.10] Записав кинематическую связь, выразите скорость шарика $\vec{v}$ через Ω, $\vec{\omega}$, r и $\vec{R}$.

A2 [0.20] Записав второй закон Ньютона и закон изменения момента импульса относительно центра шарика, выразите ускорение шарика $\vec{a} \equiv \dot{\vec{v}}$ через Ω, $\vec{v}$, r, m и I.

A3 [0.20] Выразите скорость $\vec{v}$ через Ω, $\vec{R}$, $\vec{v}_0$, $\vec{R}_0$, r, m и I.

A4 [0.50] Запишите явное выражение для траектории шарика с начальными условиями $\vec{v}_0$ и $\vec{R}_0$.

A5 [0.50] Пусть теперь шарик однороден, т.е. $I = 2mr^2/5$. Траектория, найденная в предыдущем пункте, представляет собой круг радиусом R_t. Пусть начальные условия подобраны так, что этот радиус равен R_0. Каково минимально возможное время, необходимое шарику для того, чтобы его центр приблизился к своему исходному положению на диске (в момент времени $t = 0$) на минимальное расстояние? Направление начальной скорости шарика может быть выбрано произвольным образом.

Часть B. Шарик на свободно вращающемся диске (4.0 балла)

В этой части задачи диск может вращаться вокруг оси z без трения. Следовательно, на вращение диска влияет только трение о шарик.

B1 [0.20] Выразите скорость $\vec{v}$ шарика через $\vec{v}_0$, Ω, $\vec{R}$, Ω_0, $\vec{R}_0$, r, m и I. Выразите ускорение $\dot{\vec{v}}$ шарика через через Ω, $\vec{R}$, $\dot{\Omega}$, $\vec{v}$, r, m и I.

B2 [0.60] Выразите модуль углового ускорения диска $\dot{\Omega}$ через Ω, Ω_0, $\vec{R}$, $\vec{R}_0$, $\vec{v}_0$, r, m, I и I_d. В ответе могут присутствовать величины α и δ, определённые в начале задачи.

B3 [0.60] Выразите модуль угловой скорости диска Ω как функцию R, а также Ω_0, R_0, r, m, I и I_d.

B4 [0.10] Из результатов пункта B3 получите выражение для максимально возможной Ω при заданных Ω_0 и R_0.

B5 [2.50] Запишите выражение для вертикальной компоненты момента импульса $\hat{z} M_z$ всей системы. Некоторые слагаемые в этом выражении — постоянные величины. Вычтя их из $\hat{z} M_z$, обозначьте оставшееся выражение как $\hat{z} L$. Скорость шарика $\vec{v}$, полученную в пункте B1, можно записать как сумму постоянного вектора и слагаемого, зависящего от $\vec{R}$. Обозначьте этот постоянный вектор как $\vec{c}$. Выберем направление оси x вдоль вектора $\vec{c}$, а направление оси y — вдоль вектора $\hat{z} \times \vec{c}$. В этой системе отсчёта выразите Ω через L, $\vec{R}$, $\vec{c}$, $\hat{z}$, R^2, r, m, I и I_d. Добавив к этому результат пункта B3, запишите уравнение, связывающее величины R^2 и y с помощью L, r, m, I, c и I_d. Здесь c — модуль $\vec{c}$. Подставив $R^2 = x^2 + y^2$, запишите выражение, содержащее x и y, которое описывает некоторую кривую. Отсюда найдите и перечислите все возможные типы траекторий шарика. При анализе видов траекторий вы можете использовать любые введённые величины.

Часть C. Шарик на вращающемся диске в магнитном поле (4.5 балла)

В этой части задачи рассмотрим шарик, у которого $I = mr^2/10$. Этого можно добиться, если заполнить шарик однородным веществом до половины его радиуса, а оставшуюся часть — пренебрежимо легким веществом. Более того, будем считать, что поверхность шарика заряжена однородно с плотностью заряда $Q/(4\pi r^2)$, где Q — суммарный заряд шарика. Вся система находится в однородном магнитном поле $\vec{B}$, направленном по оси $\hat{z}$. Диск вращается с постоянной угловой скоростью Ω так же, как в части A.

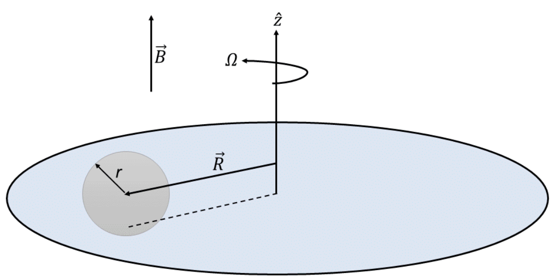

Рис. 2. Шарик, катящийся по вращающемуся диску в постоянном магнитном поле $\vec{B}$.

C1 [0.50] Запишите второй закон Ньютона и закон изменения момента импульса относительно центра шарика. Выразите момент сил $\vec{\tau}_s$, действующий на шарик из-за его вращения, через Q, r, $\vec{\omega}$ и $\vec{B}$.

C2 0.50 Уравнение для линейного ускорения представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка на $\vec{R}$ вида:

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} - \gamma\frac{d\vec{R}}{dt} \times \hat{z} + \beta\vec{R} = 0.$$

Выразите постоянные γ и β через Q, r, B, I, m, Ω.

C3 1.00 Перейдите от компонент $\vec{R}$ к полярным координатам:

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t)\cos(\eta(t)), \\ y(t) = \rho(t)\sin(\eta(t)), \end{cases}$$

и получите систему уравнений на $\rho(t)$ и $\eta(t)$, эквивалентную уравнению выше. Далее считайте, что полярный угол $\eta(t)$ представляет собой некоторую линейную функцию времени. Найдите вид этой функции, считая, что $\eta(0) = \eta_0$. Выразите коэффициент β' при $\rho(t)$ в полученном вами уравнении на $\rho(t)$ через γ и β. Запишите условия, при которых реализуются различные характерные зависимости $\rho(t)$: гармоническая, экспоненциальная и т.д.

C4 0.90 Рассмотрим следующие начальные условия для решения, найденного в C3: $x(0) = 1$ м, $y = 0$ м, $v_x(0) = \dot{x}|_{t=0} = 1$ м/с , $v_y(0) = \dot{y}|_{t=0} = -1$ м/с. Для $\beta' = 0$ найдите β и γ, соответствующие этим начальным условиям, а также зависимости $x(t)$ и $y(t)$. Найдите отсюда соответствующую Ω. Схематично изобразите траекторию шарика. Как заряжена поверхность шарика: положительно или отрицательно? Запишите в листах ответов «$-$» в случае отрицательного и «$+$» в случае положительного заряда.

C5 1.60 Рассмотрим решение, полученное в пункте C4. Если решение получено правильно, вектор $\vec{R}$ должен вращаться. Получите выражения для изменения энергии системы за время t и за один оборот после $N \gg 1$ оборотов. Членами малыми по сравнению с N можно пренебречь. В этом пункте можно считать, что масса шарика $m = 1$ кг, а его радиус $r = 1$ м, поэтому $I = 1/10$ кг·м^2.