Task Edu

T Task

S Solution

M Marking scheme

A23

Введение

Кавитация — это явление образования пузырьков с паром или «полостей» (англ. cavity) в жидкой среде из-за понижения давления. Этим кавитация отличается от кипения, при котором пузырьки возникают за счет увеличения температуры. Когда давление снова повышается, пузырьки с паром схлопываются и создают ударные волны и сверхзвуковые струи.

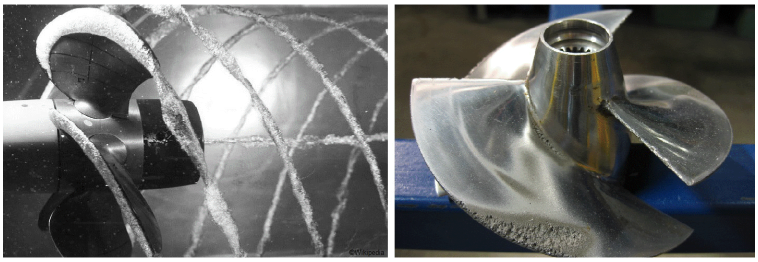


Рис.1. (a) Кавитирующий винт; (b) повреждения из-за кавитации.

Кавитация как правило происходит из-за микроскопических пузырьков, *кавитационных зародышей*, которые всегда есть в жидкости. Размер этих микропузырьков порядка нескольких микрон, они содержат как воздух, так и пар. Если давление в жидкости становится достаточно маленьким, зародыш увеличивается до макроскопического размера, начинается кавитация. Если очистить жидкость от таких зародышей, кавитация не начнется даже при отрицательном давлении.

В этой задаче изучаются идеализированные модели кавитации. Один из параметров, которые можно определить — *критическое (или пороговое) давление*, то есть минимальное значение давления воды, при котором зародыши не увеличиваются до макроскопических размеров. Критическое давление приближенно равно давлению водяного пара при заданной температуре, но его точное значение несколько ниже из-за поверхностного натяжения и воздуха в зародыше.

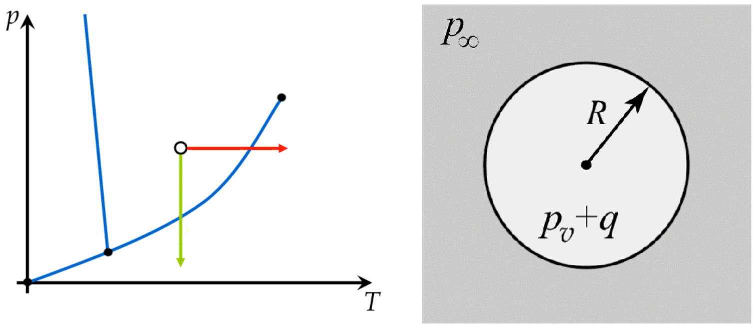


Рис. 2. (a) Кавитация (стрелка вниз) и кипение (стрелка направо) на фазовой диаграмме; (b) типичный пузырек (см. обозначения в таблице 1)

Если внешнее давление внезапно уменьшится и станет меньше критического давления, зародыш начнет расширяться и скорость расширения быстро достигнет установившегося значения. Обычно к тому времени, когда пузырек достигает макроскопического размера, давление возвращается к исходному значению, и пузырек начинает схлопываться. Рассмотрим следующую модель: макроскопический пузырек находится в равновесии, а давление внезапно повышается. Тогда если внутри пузырька есть воздух, он сначала схлопнется, а затем начнет расширяться, достигнув некоторого минимального размера. Если же пузырек содержит только водяной пар, он полностью исчезнет, причем скорость сжатия пузырька будет неограниченно возрастать, когда его размер стремится к 0. На самом деле в конце схлопывания пузырек не будет сферическим и нужно будет учитывать сжимаемость воды. Однако если не сказано обратного, этими эффектами можно пренебречь. Когда звуковая волна проходит через воду с пузырьками, эта волна заставляет пузырьки пульсировать за счет изменения давления, а также вызывает поступательное движение пузырьков. Теория предсказывает, что из-за диффузии воздуха через границу пузырька, он полностью растворится, если только раствор воздуха в воде не насыщенный. Однако на самом деле в воде существуют зародыши микронного размера, и от них крайне сложно избавиться. Поэтому само существование зародышей представляет собой парадокс. Рассмотрим одно из возможных разрешений этого парадокса, а именно предположение, что маленькие полости в стенках или твердых частицах содержат микроскопические объемы воздуха и пара.

Полезная информация

Давление пара

Рассмотрим замкнутый сосуд, содержащий воду и воздух. Если воздух слишком сухой, его влажность будет возрастать за счет испарения воды. Если воздух слишком влажный, его влажность уменьшится за счет конденсации. Оказывается, что в равновесии парциальное давление водяного пара $p_v = p_v(T)$ — функция температуры.

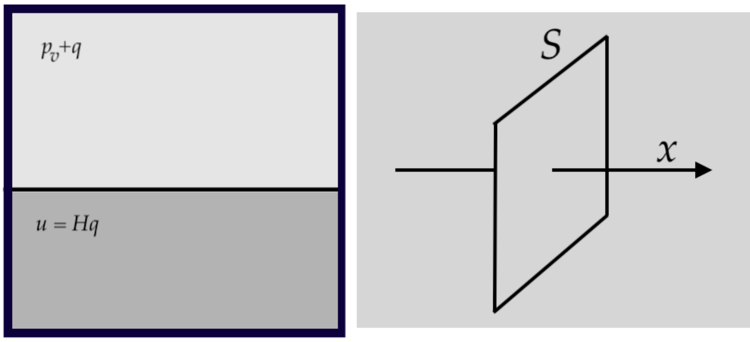


Рис. 3. (a) Замкнутый сосуд, содержащий воду и пар в равновесии; (b) диффузионный поток через поверхность S пропорционален градиенту концентрации.

Если объем пузырька мгновенно изменяется, влажность внутри пузырька выйдет из равновесия с окружающей водой, и система должна прийти в новое положение равновесия путем испарения или конденсации. В реальности этот процесс настолько быстрый, что мы можем считать, что пар все время находится в равновесии. Поскольку количеством тепла, которое получает или отдает окружающая вода в этом процессе, можно пренебречь, температура остается постоянной. Поэтому можно считать, что парциальное давление пара в пузырьке все время остается равным p_v.

Закон Генри

Закон Генри позволяет описывать поведение воздуха в пузырьке. Он утверждает, что концентрация воздуха, растворенного в воде, в равновесии пропорциональна давлению воздуха над поверхностью воды:

$$u = Hq,$$

где u — концентрация воздуха в воде, H — постоянная Генри, q — парциальное давление воздуха над поверхностью воды. Как и раньше, будем считать, что воздух в пузырьке находится в равновесии и не происходит никаких изменений температуры.

Закон Фика

Растворенный в воде воздух перемещается из областей с высокой концентрацией в области с низкой концентрацией. Закон Фика утверждает, что поток за счет диффузии через элемент поверхности S пропорционален скорости изменения концентрации в направлении, перпендикулярном к S:

$$J = \kappa \frac{\partial u}{\partial x}$$

Здесь J — диффузионный поток, количество молекул воздуха, которые проходят через единицу площади поверхности в единицу времени, κ — коэффициент диффузии, координата x перпендикулярна S. Если u — функция x и возможно других переменных, обозначение $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ означает производную по x, при постоянных остальных переменных.

Уравнение диффузии

Если вам нужно найти функцию $w = w(x, t)$ в первой координатной четверти Q (то есть при $x > 0$ и $t > 0$), которая удовлетворяет в Q уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

а также условиям

$$\begin{cases} w(x, 0) = f(x), \quad x > 0, \\ w(0, t) = 0, \quad t > 0, \end{cases}$$

то решение имеет вид

$$w(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^\infty \left(e^{-(x-y)^2/(4t)} - e^{-(x+y)^2/(4t)} \right) f(y) dy.$$

Гауссовы интегралы

Вам могут потребоваться следующие интегралы:

$$\int_0^\infty e^{-bx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b}}, \qquad \int_0^\infty x^2 e^{-bx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4b\sqrt{b}} \qquad (b > 0).$$

Обозначения и значения параметров

В таблице 1 приводится список обозначений, используемых в задаче, и стандартные значения некоторых постоянных

Символ	Значение	Стандартное численное значение
ρ	плотность воды	997 кг/м^3
p_∞	давление воды вдали от пузырька	101 кПа
p_v	давление пара	2340 Па
σ	коэффициент поверхностного натяжения воды	$72.8 \cdot 10^{-3}$ Н/м
R	радиус пузырька	
R_0	начальный радиус пузырька	10^{-5} м
δ	плотность воздуха	1.29 кг/м^3
q	парциальное давление воздуха в пузырьке	
q_0	начальное значение q	
γ	показатель адиабаты воздуха	1.4
u	концентрация растворенного воздуха в воде	
κ	коэффициент диффузии воздуха в воде	$2 \cdot 10^{-9}$ м^2/с
H	постоянная Генри для воздуха в воде	$0.24 \cdot 10^{-6}$ с^2/м^2
t	время	
f_0	собственная/резонансная частота	

Предположения

Если не указано обратное, используйте следующие предположения.

- Вода несжимаемая, невязкая, однородная.
- Вода заполняет все пространство.
- Изменением давления за счет гравитации можно пренебречь.
- Температура постоянна во всем пространстве и не зависит от времени.
- Есть только один пузырек.
- Пузырек всегда остается сферическим, его центр неподвижен.
- Не происходит переноса воздуха между пузырьком и окружающей его водой.
- Воздух — идеальный газ.

Часть A. Предварительный анализ (1.5 балла)

A1 0.50 Используя метод размерностей, оцените время T схлопывания пузырька, содержащего только пар. Выразите ответ через начальный радиус пузырька R_0, плотность воды ρ, давление воды p_∞ и давление пара p_v. Найдите численное значение времени, считая, что коэффициент пропорциональности в полученной формуле равен 1, $R_0 = 1$ мм, а значения ρ, p_∞, и p_v возьмите из таблицы обозначений. Поверхностное натяжение не учитывайте, $\sigma = 0$.

A2 1.00 Пусть пузырек радиуса $R_0 = 10^{-5}$ м, состоящий из воздуха и пара, находится в равновесии, когда внешнее давление равно $p_\infty = 101$ кПа. Найдите парциальное давление q_0 воздуха в пузырьке. Пусть теперь внешнее давление p_∞ постепенно уменьшают, а процесс для воздуха в пузырьке изотермический. Найдите критическое давление p_c, которое определяется тем условием, что при $p_\infty < p_c$ размер пузырька неограниченно возрастает. Значения p_v и σ считайте равными их стандартным значениям из таблицы обозначений.

Часть B. Динамика пузырька (6.0 баллов)

Изучим динамику сферического пузырька, содержащего смесь воздуха и пара. Считайте, что воздух не перемещается через границу пузырька и поэтому для описания поведения пузырька достаточно определить давление в нем. Тем не менее испарение и конденсация пара будет происходить на стенках пузырька, и эти процессы поддерживают давление пара p_v внутри пузырька.

B1 [1.50] Пусть один сферический пузырек находится в воде, которая заполняет все пространство. Пузырек может менять размер (например из-за изменения внешнего давления p_∞), при этом все время оставаясь сферическим. Получите уравнение, которое связывает радиус пузырька $R(t)$ и его производные по времени $R'(t)$ и $R''(t)$, поверхностное натяжение σ, плотность воды ρ, давление вдали от пузырька p_∞, и давление внутри пузырька p. Затем разбейте давление p внутри пузырька на два слагаемых, считая, что пузырек содержит пар (с парциальным давлением p_v) и воздух. Процесс для воздуха адиабатический, показатель адиабаты γ. Начальное давление воздуха q_0, начальный радиус пузырька R_0. Считайте, что испарение, конденсация, или перенос воздуха между пузырьком и окружающей его водой не влияют на объем воды.

B2 [1.00] Бак с водой с давлением $p_\infty^- = 101$ кПа содержит пузырек радиуса $R_0 = 10^{-5}$ м, изначально находящийся в состоянии равновесия. В некоторый момент времени давление мгновенно уменьшается до $p_\infty = 0$. Оцените предельное (асимптотическое) значение скорости роста пузырька R', а также время, за которое скорость достигнет этого значения.

B3 [1.00] Бак с водой с давлением $p_\infty^- = 1.600$ кПа содержит пузырек радиуса $R_0 = 10^{-5}$ м, изначально находящийся в состоянии равновесия. В некоторый момент времени давление стало равно $p_\infty = 101$ кПа. Оцените минимальный радиус пузырька перед тем, как он начнет расширяться.

B4 [0.50] Если внутри пузырька находится только водяной пар, пузырек полностью схлопнется за конечное время. Определите показатель степени α в зависимости

$$R(t) \sim (T-t)^\alpha,$$

где T — время схлопывания.

B5 [1.00] Используя уравнение, полученное в B3, найдите собственную частоту сферически-симметричных колебаний пузырька радиуса $R_0 = 0.1$ мм.

B6 [1.00] Пусть пузырек, описанный в предыдущем пункте, находится в области, в которой есть стоячая звуковая волна. Давление в волне меняется вдоль оси x как

$$p(x,t) = p_0 + A\sin\left(\frac{2\pi f}{c}(x+a)\right)\sin(2\pi f t),$$

где f — частота, c — скорость звука. Параметры p_0, A и a — постоянные, смысл которых можно понять из уравнения. Найдите среднюю силу, действующую на пузырек. Он расположен в начале системы координат xyz, его размер много меньше длины волны звука.

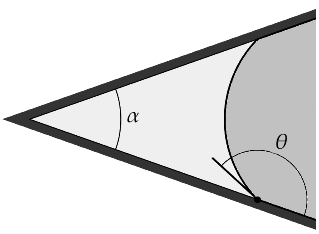
Часть C. Исчезновение зародышей из-за диффузии (2.5 балла)

В этой части рассмотрим диффузию воздуха через границу пузырька.

C1 [2.00] Пусть пузырек радиуса $R_0 = 10^{-5}$ м, содержащий воздух и пар, находится в растворе воздуха в воде, в котором растворенный воздух находится в равновесии с воздухом при атмосферном давлении. Парциальное давление воздуха в пузырьке $q = 1.70 \cdot 10^5$ Па, давлением пара можно пренебречь. Оцените время, за которое пузырек полностью растворится в воде. Значения величин p_∞, κ, δ и σ возьмите в таблице 1. Считайте, что область вокруг пузырька, в которой происходит диффузия воздуха, мгновенно становится много больше самого пузырька.

C2 [0.50]

Рассмотрим коническую трещину в стенке бака с водой, угол при вершине конуса α, см. рис. Небольшое количество пара и воздуха находится в конусе. Запишите условия механического равновесия и равновесия по отношению к диффузии. Определите, при каком условии воздух останется в щели. Угол смачивания поверхности водой θ.



Коническая трещина