



Task Edu

(1) Градиент функции координат $f(\vec{r})$, $\vec{\nabla} f(\vec{r})$, задается в компонентах $\vec{\nabla} f \equiv (\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}) f(\vec{r})$, где $\frac{\partial}{\partial x} f(\vec{r})$ обозначает частную производную $f(\vec{r})$ по x при постоянных y и z . Здесь \hat{x} - единичный вектор вдоль оси x , для других осей аналогично. (2) Интеграл:

$$\int_0^{\infty} dt \frac{(a+pt)}{[(a+pt)^2 + (b+qt)^2]^{3/2}} = \frac{1}{bp-aq} \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \right).$$

Task

Solution

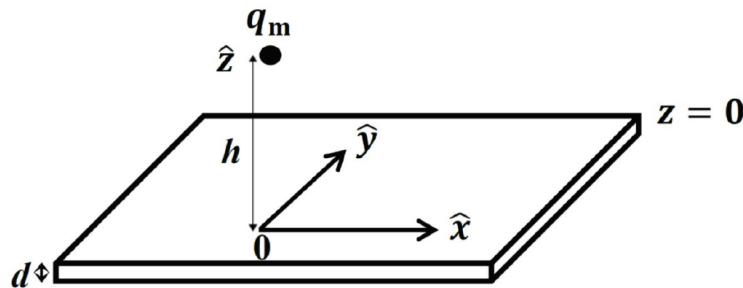
Marking scheme

A21

Мы будем изучать движение маленького магнитного диполя рядом с тонкой проводящей пленкой. В этой задаче под диполем и монополем мы будем понимать магнитный диполь и магнитный монополь соответственно. Диполь представляет собой сферический постоянный магнит с постоянной намагниченностью \vec{M} (магнитный момент единицы объема вещества) и постоянной плотностью ρ_0 . Его можно рассматривать как точечный при условии, что его радиус R мал. Дипольное приближение хорошо описывает магнитное поле, создаваемое везде вне магнита. Также дипольное приближение хорошо описывает силу, действующую на диполь со стороны внешнего магнитного поля, если расстояние до источников поля много больше R . Точечный диполь можно рассматривать как пару монополей с отрицательным и положительным магнитными зарядами $-q_m$ и q_m соответственно. Эта пара находится на бесконечно малом расстоянии друг от друга, но обладает конечным дипольным моментом $\vec{m} = q_m \vec{\delta}_m$. Здесь $\vec{\delta}_m$ - вектор, направленный от южного монополя ($-q_m$) к северному монополю ($+q_m$). Магнитное поле \vec{B}_{mp} создаваемое монополем q_m задается законом, аналогичным закону Кулона

$$\vec{B}_{mp} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi r^2} \hat{r},$$

где \vec{r} - радиус-вектор, направленный от монополя q_m к точке, в которой наблюдается поле, \hat{r} - единичный вектор $\hat{r} = \vec{r}/r$, а μ_0 - магнитная постоянная. Приложенное магнитное поле \vec{B}' действует на монополь q_m с силой $\vec{F} = q_m \vec{B}'$. Магнитное поле монополя можно получить из скалярного потенциала Φ , оно задается формулой $\vec{B} = -\vec{\nabla} \Phi$. Скалярный потенциал Φ также называется магнитным потенциалом. Тонкая проводящая пленка имеет постоянную толщину d в направлении z (Рис. 1). Она расположена горизонтально и продолжается вдоль направлений x и y до бесконечности. Ее верхняя поверхность находится на расстоянии h от точечного монополя или диполя. Мы будем рассматривать только случай $h \gg d$. Поэтому можно считать, что объемная плотность индукционного тока в пленке не зависит от z . Токами смещения можно пренебречь.



В задаче 3 части. В Части А система состоит из монополя и тонкой пленки, а в Частях В и С из движущегося диполя и тонкой пленки. Плоскость $z = 0$ совпадает с верхней поверхностью тонкой пленки. Вектор $\vec{\rho} = x\hat{x} + y\hat{y} = \rho\hat{\rho}$ - радиус вектор точки в плоскости.

Часть А. Внезапное появление магнитного монополя: начальный отклик и последующая эволюция во времени отклика в тонкой пленке (3.0 балла)

Рассмотрим отклик тонкой проводящей пленки, когда в момент времени $t = 0$ северный монополь q_m внезапно появляется в точке $\vec{r}_{mp} = h\hat{z}$ ($h > 0$), как показано на Рис. 1. В дальнейшем монополь остается неподвижным ($t > 0$).

Вам нужно будет найти начальное полное магнитное поле $\vec{B}(\vec{\rho}, z)$ в областях $z \geq 0$ и $z \leq -d$, и плотность индуцированного тока в тонкой пленке. Полное магнитное поле $\vec{B} = \vec{B}_{mp} + \vec{B}'$, где магнитные поля \vec{B}_{mp} и \vec{B}' создаются соответственно монополем и индуцированным током в пленке. Начальное поле $\vec{B}(\vec{\rho}, z)$ существует в момент времени t_0 , которое лежит в интервале $h/c \leq t_0 \ll \tau_c$. Здесь τ_c - характерное время, за которое меняется распределение тока в пленке, а c - скорость света в вакууме. В этой задаче мы рассматриваем предел $h/c \rightarrow 0$ и считаем $t_0 = 0$.

Вычисление начального магнитного поля $\vec{B}(\vec{\rho}, z)$ (при $t_0 = 0$) упрощается, если ввести изображение монополя. Для $\vec{B}(\vec{\rho}, z)$ в области $z \geq 0$, изображение монополя имеет магнитный заряд q_m и расположено в точке $z = -h$. С другой стороны, для $\vec{B}(\vec{\rho}, z)$ в области $z \leq -d$, изображение магнитного монополя имеет заряд $-q_m$ и расположено в точке $z = h$.

Начальный отклик

- A1^{0.40} Получите начальное магнитное поле $\vec{B}(\vec{\rho}, z)$ при $z \geq 0$ в момент времени $t_0 = 0$.
- A2^{0.20} Получите начальное магнитное поле $\vec{B}(\vec{\rho}, z)$ при $z \leq -d$ в момент времени $t_0 = 0$.
- A3^{0.40} Найдите начальный магнитный поток Φ_B через поверхности пленки, расположенные в $z = 0$, и в $z = -d$.
- A4^{0.60} Получите начальное распределение объемной плотности тока $\vec{j}(\vec{\rho})$ в тонкой проводящей пленке при $t_0 = 0$.

При $t > 0$, полное магнитное поле \vec{B} по принципу суперпозиции становится равным $\vec{B}(\vec{\rho}, z; t) = \vec{B}_{\text{мп}}(\vec{\rho}, z) + \vec{B}'(\vec{\rho}, z; t)$, где $\vec{B}'(\vec{\rho}, z; t)$ создается индукционным током в тонкой пленке. Вам нужно получить уравнение на $B'_z(\rho, z; t)$ рядом с поверхностью $z = 0$ тонкой пленки. Зависимость B'_z от времени покажет, что поле \vec{B}' рядом с поверхностью $z \approx 0$ при $t > 0$ можно получить, считая, что изображение монополя движется.

Уравнение для B'_z внутри тонкой пленки приведено ниже,

$$\frac{\partial^2 B'_z(\rho, z; t)}{\partial z^2} = \mu_0 \sigma \frac{\partial B'_z(\rho, z; t)}{\partial t}.$$

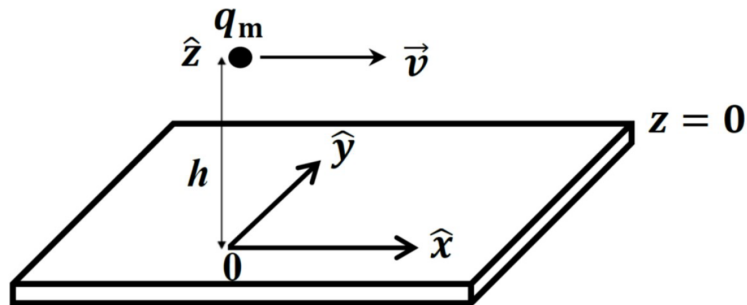
Это уравнение было получено с помощью уравнений Максвелла для области внутри пленки, а также из закона Ома ($\vec{j} = \sigma \vec{E}$, где σ - удельная проводимость), но без учета эффектов тока смещения. В левой части уравнения (2) мы пренебрегли членом $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial B'_z}{\partial \rho})$, с учетом условия $h \gg d$.

Последующий отклик

- A5^{0.60} Получите из уравнения (2) уравнения для $B'_z(\rho, z; t)$ рядом с поверхностью $z \approx 0$. Такое уравнение содержит первые частные производные $B'_z(\rho, z; t)$ по z и (отдельно) по t .
- A6^{0.40} Найдите общий вид $B'_z(\rho, z; t)$ рядом с поверхностью $z \approx 0$ при $t > 0$.
- A7^{0.40} Покажите, что ваше решение A6 для $B'_z(\rho, z \approx 0; t)$ соответствует тому, что изображение монополя движется со скоростью, направленной вниз. Найдите скорость движения изображения монополя v_0 через известные параметры из условия задачи.

Часть В. Магнитная сила, действующая на точечный диполь, движущийся с постоянной скоростью при постоянном h (4.0 балла)

Идею движущегося изображения монополя, рассмотренная в А.7 для B'_z в области $z \approx 0$ можно применить для вычисления поля \vec{B}' во всей области $z \geq 0$. Это предположение годится при условии, что изменение тока в проводящей пленке достаточно медленное.



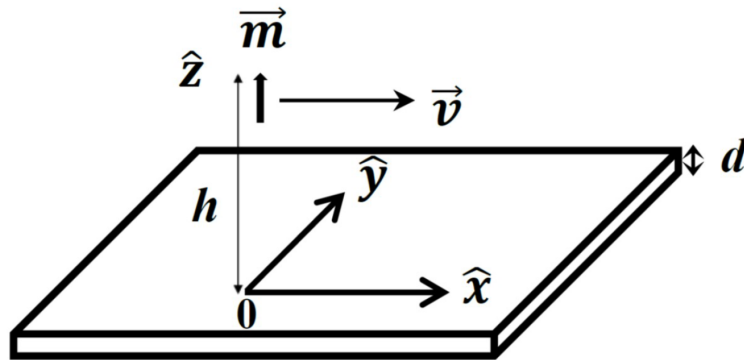
Монополь q_m (Рис. 2) движется с постоянной скоростью $v\hat{x}$, с $v \ll c$, и на постоянной высоте, координата $z = h$, движение происходило бесконечно долго до настоящего момента времени ($t = 0$). Его координаты (x, y) в данный момент времени - $(0, 0)$. Будем рассматривать магнитный потенциал Φ_+ создаваемый всеми изображениями монополя, создаваемыми этим движущимся монополем вдоль своей траектории.

Разбив траекторию монополя q_m на дискретные шаги по времени (очень маленький шаг по времени обозначим τ), заменим движение q_m перепрыгиваниями в начале каждого шага. Каждое перепрыгивание – это одновременное уничтожение монополя в одной точке и создание в другой точке. Положение созданного монополя совпадает с точкой на траектории в момент начала следующего шага по времени. Положение уничтожаемого монополя совпадает с точкой траектории в начале предыдущего шага по времени. Это достигается одновременным внезапным добавлением двух монополей: q_m и $-q_m$ в точках траектории, отвечающих начальным моментам этого и предыдущего шагов по времени. Эти две точки расположены на расстоянии $\Delta x = v\tau$. На каждом шаге магнитные монополи создают изображения. Магнитное поле будет создаваться всеми изображениями, возникшими на предыдущих шагах.

Движущийся монополь

V1^{0.80} Запишите координаты всех изображений монополей ($t = 0$) с зарядами q_m и $-q_m$. Шаги по времени начинаются в моменты времени $t = -n\tau$, где $n \geq 0$.

V2^{0.70} Найдите выражение в виде суммы для магнитного потенциала $\Phi_+(x, z)$ в момент времени $t = 0$, создаваемого всеми монополями-изображениями из V.1. Вычислите $\Phi_+(x, z)$.



Рассмотрим движение точечного диполя, показанного на Рис. 3. Диполь с дипольным моментом $\vec{m} = m\hat{z}$, движется с постоянной скоростью $v\hat{x}$, и на постоянной высоте ($z = h$) движение происходило до настоящего момента времени ($t = 0$), в настоящий момент времени его координаты $(0, 0)$. Точечный диполь можно представить как два смещенных друг относительно друга монополя, как было сказано во введении к задаче. Положением магнитного диполя считаем положение его северного монополя, считаем что магнитный момент \vec{m} постоянен.

Движущийся диполь

V3^{1.50} Найдите силу \vec{F} действующую на точечный магнитный диполь со стороны проводящей пленки в момент времени $t = 0$.

Соотношение между v_0 и v

В этой Части ниже для нахождения численных значений мы рассмотрим тонкую пленку из меди, такую что $\sigma = 5.9 \times 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, $d = 0.50 \text{ см}$, и $h = 5.0 \text{ см}$.

V4^{0.30} Найдите значение v_0 , скорость движения изображения диполя, как в A7.

Известно, что глубина проникновения δ – расстояние, на которое электромагнитная волна может проникнуть вглубь проводника, зависит от циклической частоты ω волны. Эта зависимость дается формулой

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}}.$$

В дальнейшем мы будем считать, что $\omega = v_L/h$, где скорость v_L равна большей из скоростей v и v_0 .

V5^{0.40} Получите зависимость $v_0(v)$ и в режиме малых скоростей v , и в режиме больших скоростей.

V6^{0.30} Найдите критическую скорость $v = v_c$ при которой два случая из V.5 переходят друг в друга.

Часть С. Движение магнитного диполя в случае сверхпроводящей тонкой пленки (3.0 балла)

Рассмотрение выше можно применить к случаю сверхпроводника первого рода, который полностью выталкивает из себя магнитное поле (эффект Мейсснера) во все моменты времени. Для этого нужно перейти к пределу бесконечной проводимости $\sigma \rightarrow \infty$.

Здесь мы рассмотрим точечный магнитный диполь с горизонтальным дипольным моментом $\vec{m} = m\hat{x}$, массы M_0 , расположенный в точке $(x, y, z) = (0, 0, h)$. Рассмотрим вертикальное движение диполя под действием гравитационного поля с ускорением свободного падения $\vec{g} = -g\hat{z}$. Предположим, что при движении центра масс диполя его ориентация не меняется. Таким образом мы считаем, что магнитный момент остается постоянным в процессе движения. Также мы предполагаем, что движение происходит в вакууме и остаточное сопротивление воздуха учитывать не нужно.

C1^{1.20} Найдите расстояние h_0 от диполя до сверхпроводящей пленки, на котором он находится в равновесии.

C2^{0.80} Найдите частоту колебаний диполя Ω относительно положения равновесия.

Рассмотрим сферический постоянный магнит со следующими параметрами: радиус $R = 1.0$ мкм, плотность $\rho_0 = 7400 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$, $g = 9.8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Тл} \cdot \text{А}^{-1} \cdot \text{м}$, намагниченность $|\vec{M}| = 75 \times 10^{-2} \text{ Тл}/\mu_0$.

C3^{0.70} Вычислите значение h_0 .

C4^{0.30} Вычислите значение Ω .

Т

Электromagnetизм

Магнитостатика

2021

Азиатские

Метод изображений

Магнитный диполь

Магнитный монополь