Task Edu

T Task

S Solution

M Marking scheme

A21

Пусть $\vec{E}$ – напряженность электрического поля, $\vec{H}$ – напряженность магнитного поля, $\vec{D}$ – электрическая индукция, $\vec{B}$ – индукция магнитного поля. Известно, что $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, где $\vec{P}$ – вектор поляризации вещества, ϵ_0 – электрическая постоянная. Будем рассматривать только немагнитные вещества, для них $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, где μ_0 – магнитная постоянная. Плотность энергии электромагнитного поля вычисляется по формуле $u_{em} = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$, плотность потока энергии (вектор Пойнтинга) $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$. Плоская монохроматическая световая волна в однородной среде задаётся величинами: угловая частота ω, волновой вектор $\vec{k}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$. Из уравнений Максвелла: $\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$ и $\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D}$. В такой волне векторы $\vec{D}$ и $\vec{B}$ меняются в пространстве и во времени по синусоиде с фазой $(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$.

Часть A. Распространение света в изотропном диэлектрике (1.0 балл)

В изотропной среде $\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$ и $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, где χ – магнитная восприимчивость, $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi)$ – магнитная проницаемость. Фазовая скорость волны равна $v_p = c/n$, где c – скорость света в вакууме, n – показатель преломления. Можно также представлять свет набором лучей, направленных вдоль переноса энергии и имеющих скорость v_r, с которой переносится плотность энергии. Рассмотрим плоскую световую волну с угловой частотой ω и волновым вектором $\vec{k}$ в однородной изотропной диэлектрической среде.

A1 0.40 Получите выражение для фазовой скорости v_p через ϵ и μ_0.

A2 0.20 Напишите, как выражается показатель преломления n.

A3 0.40 В каком направлении $\hat{S} \equiv \vec{S}/S$ переносится энергия? Какова скорость лучей v_r?

Часть B. Распространение света в одноосной среде (4.8 балла)

Теперь предположим, что среда имеет выделенное направление z ({\it оптическую ось}): $D_x = \epsilon E_x$, $D_y = \epsilon E_y$, $D_z = \epsilon' E_z$, где все оси попарно ортогональны. Тогда фазовая скорость зависит еще и от направлений $\vec{k}$ и $\vec{D}$. Обозначив $n_o = c\sqrt{\mu_0 \epsilon}$ и $n_e = c\sqrt{\mu_0 \epsilon'}$, выполните пункты {\bf B.1}, {\bf B.2}, и {\bf B.3}.

B1 1.50 Пусть волновой вектор $\vec{k}$ лежит в плоскости xz: $\vec{k} = k(\sin\theta, 0, \cos\theta)$. При заданном θ плоская монохроматическая волна может распространяться только при определенных направлениях $\vec{D}$ и $\vec{B}$. Найдите эти возможные направления. Выразите также все соответствующие показатели преломления через θ, n_o и n_e. При каком угле θ возможно лишь одно значение показателя преломления?

B2 0.80 Поляризация световой волны (направление колебаний $\vec{E}$) может быть перпендикулярна плоскости xz ({\it обыкновенная волна}, {\it обыкновенный луч}) или лежать в этой плоскости ({\it обыкновенная волна/луч}). Для каждой из волн, найденных вами в {\bf B.1}, запишите единичный вектор в направлении поляризации. Укажите, какая из них обыкновенная, а какая – необыкновенная. Вычислите $\tan\alpha$, где α – угол между $\vec{E}$ и $\vec{D}$ (α положительный, если вектора $\vec{E}$ и $\vec{D}$ лежат в плоскости xz и поворот от $\vec{E}$ к $\vec{D}$ происходит по часовой стрелке).

B3 0.60 Используйте результаты пунктов {\bf B.1} и {\bf B.2} в случае, когда $\vec{k}$ по-прежнему составляет угол θ с положительным направлением оси z, но не лежит в плоскости xz. Укажите возможные значения показателя преломления и соответствующие поляризации.

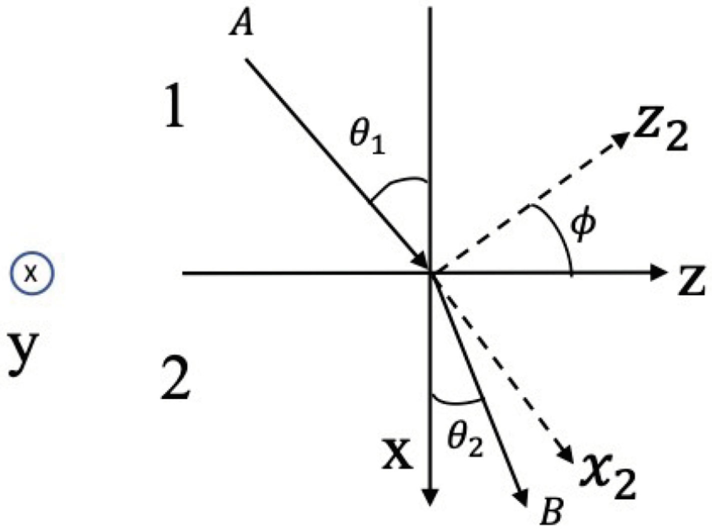
В одноосных средах направление светового луча может отличаться от направления вектора $\vec{k}$. Фазовая скорость по-прежнему вычисляется как c/n (n соответствует направлению $\vec{k}$). А скорость лучей определяется с учетом направления и плотности потока энергии.

B4 0.80 Пусть $\vec{k} = k(\sin\theta, 0, \cos\theta)$, как в пунктах {\bf B.1-3}. Угол между $\hat{k} \equiv \vec{k}/k$ и направлением луча, $\hat{S}$, обозначим α_r (α_r положительный, если вектора $\hat{S}$ и $\hat{k}$ лежат в плоскости xz и поворот от $\hat{S}$ к $\hat{k}$ происходит по часовой стрелке). Найдите возможные значения $\tan\alpha_r$, скорости лучей v_r и вектора Пойнтинга $\hat{S}$. Используя эти результаты, выразите величину $n_s = c/v_r$ через $\hat{S}$, $\hat{x}$, $\hat{z}$, n_o, n_e.

Пусть луч света идет из A в B через границу раздела изотропной (1) и анизотропной (2) сред (см. рис. 1). Плоскость yz – граница раздела, xz – плоскость падения, и в ней же лежит направление поляризации. Угол падения θ_1. Показатель преломления (1) равен n, показатели преломления (2) для направлений z_2, y_2, x_2 равны n_e, n_o, n_o соответственно. Причем ось y_2 совпадает с осью y. Из принципа Ферма следует:

$$\bar{A}(\tan\theta_2)^2 + \bar{B}\tan\theta_2 + \bar{C} = 0$$

B5 1.10 Получите выражения для $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ через P_1, P_2, P_3 и $n\sin\theta_1$, где $P_1 = n_o^2\cos^2\phi + n_e^2\sin^2\phi$, $P_2 = n_o^2\sin^2\phi + n_e^2\cos^2\phi$, $P_3 = (n_o^2 - n_e^2)\sin\phi\cos\phi$. С помощью уравнения (1) найдите $\tan\theta_2$ для двух случаев ориентации: $\phi = 0$ и $\phi = \pi/2$.



Часть C. Запутанность света (4.2 балла)

В нелинейной среде напряженность электрического поля $\vec{E}$ связана с вектором поляризации $\vec{P}$ выражением $P_i = (\epsilon - \epsilon_0)E_i + \sum_j \sum_k \chi^{(2)}_{ijk} E_j E_k$. Здесь i, j, k каждый может быть любым из трёх компонент x, y, z. $\chi^{(2)}_{ijk}$ есть константы, представляющие нелинейную восприимчивость среды второго порядка. Ненулевые $\chi^{(2)}_{ijk}$ приводят к тому, что при прохождении через нелинейную среду световая волна может расщепиться на две световые волны.

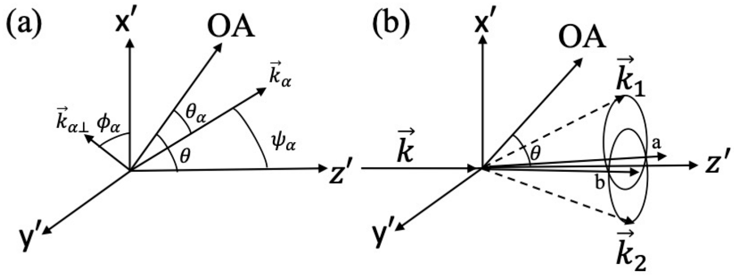
Предположим, что поскольку не все $\chi^{(2)}_{ijk}$ равны нулю, электрическое поле в среде является суперпозицией трёх плоских волн с угловыми частотами ω, ω_1, и ω_2, распространяющиеся с волновыми векторами $\vec{k}$, $\vec{k}_1$, и $\vec{k}_2$, соответственно. Будем считать, что $\omega \geq \omega_2$ и $\omega_1 \geq \omega_2$.

C1 [0.80] Найдите все возможные отношения (известные как {\it условия фазового синхронизма}) между этими угловыми частотами и волновыми векторами. Если рассматривать свет состоящим из фотонов, какие законы сохранения подразумевают эти условия для трех указанных фотонов? Запишите уравнения, выражающие эти законы сохранения для случая, когда фотон с угловой частотой ω и волновым вектором $\vec{k}$ расщепляется на два фотона с угловыми частотами ω_1и ω_2, распространяясь с волновыми векторами $\vec{k}_1$и $\vec{k}_2$, соответственно.

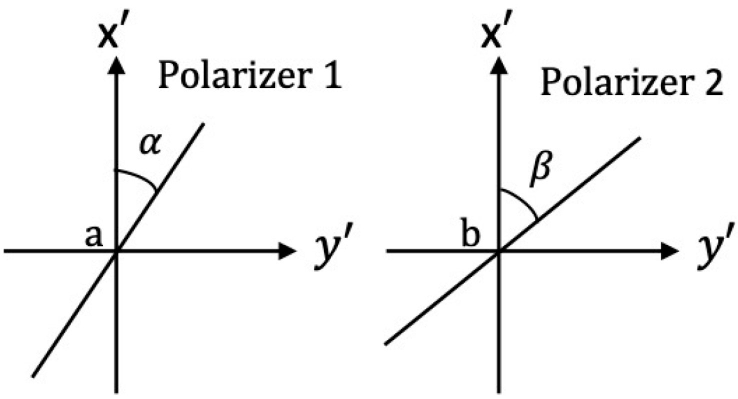
C2 [0.80] Рассмотрим световую волну в одноосной среде. Обозначим обыкновенный луч как $\mathbf{o}$ и необыкновенный луч как $\mathbf{e}$. Есть 8 возможных путей расщепления световой волны: $\mathbf{o} \to \mathbf{o} + \mathbf{o}$, $\mathbf{o} \to \mathbf{e} + \mathbf{o}$, $\mathbf{o} \to \mathbf{o} + \mathbf{e}$, $\mathbf{o} \to \mathbf{e} + \mathbf{e}$, $\mathbf{e} \to \mathbf{o} + \mathbf{o}$, $\mathbf{e} \to \mathbf{e} + \mathbf{o}$, $\mathbf{e} \to \mathbf{o} + \mathbf{e}$, и $\mathbf{e} \to \mathbf{e} + \mathbf{e}$. Предположим, что коэффициенты преломления n_o и n_e оба являются возрастающей функцией от ω. Используя те же обозначения как и в вопросе C1 и считая что $\vec{k}$, $\vec{k}_1$, и $\vec{k}_2$ коллинеарны, укажите какие из 8 путей расщепления не могут быть возможны.

Рассмотрим падающий $\mathbf{e}$ луч распространяющийся вдоль направления оси z' с волновыми вектором $\vec{k}$ и $\omega = \Omega_p$ в одноосной среде с показателем преломления $n_e < n_o$. Предположим, что при коллинеарном расщеплении $\mathbf{e} \to \mathbf{e} + \mathbf{o}$, условие фазового синхронизма выполняется для $k_1 = K_e$, $\omega_1 = \Omega_e$, $k_2 = K_o$, и $\omega_2 = \Omega_o$. Здесь индексы 1 и 2 относятся к $\mathbf{e}$ лучу и к $\mathbf{o}$ лучу. Векторы $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$ и $\vec{k}$ все сонаправлены с направлением z'. Как показано на рис. 2(a), оптическая ось (the optic axis, OA) среды лежит в плоскости $x'z'$ и имеет угол $\theta < \pi/2$ с осью z'. Поэтому, получается что n_e есть функция от ω и θ, т.е., $n_e = n_e(\omega, \theta)$. Для того же падающего луча $\mathbf{e}$ с волновым вектором $\vec{k}$ и $\omega = \Omega_p$, предположим неколлинеарное расщепление лучей $\mathbf{e} + \mathbf{o}$. Такое расщепление двух последних указанных лучей приводит к тому, что они расщепляются но остаются на двух конусах с $\omega_1 = \omega_2 = \Omega$, $k_1 = k_2$, как показано на рис. 2(b). Отметим, что при коллинеарном расщеплении, Ω_e уже близко к Ω_o, и здесь Ω лишь немного меньше Ω_e. В плоскости перпендикулярной к $\vec{k}$, два круговых сечения конусов $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$ пересекаются в точках a и b так, что линия $\overline{ab}$ параллельна оси y'. Как показано на рис. 2(a), $\vec{k}_\alpha(\alpha = 1, 2$) составляет угол θ_α с оптической осью и имеет угловые координаты $(\psi_\alpha, \phi_\alpha)$. Здесь $\vec{k}_{\alpha\perp}$ является проекцией на плоскость $x'y'$. Каждый вектор $\vec{k}_\alpha$ отклоняется от оси z'только на малую величину $|(\Omega - \Omega_e)/\Omega_e| \ll 1$, $|\vec{k}_{\alpha\perp}|/k_\alpha \ll 1$ и $|\theta_\alpha - \theta| \ll 1$. Используя приближение, которые согласуются с z' компонентой $\vec{k}_\alpha$ до членов порядка $k^2_{\alpha\perp}$ и угол θ_α до $(\theta_\alpha - \theta)^2$, можно показать что $\vec{k}_{2\perp} = (q_{x'}, q_{y'})$ удовлетворяет выражению $M(q_{x'} + N)^2 + M q^2_{y'} = L$.

C3 [1.30] Пусть $M > 0$. Выразите M, N, и L через Ω, Ω_e, Ω_o, K_e, K_o и $N_e(\omega, \theta) = \frac{1}{n_e(\omega,\theta)} \frac{dn_e(\omega,\theta)}{d\theta}$ и групповые скорости $u_o = \frac{dw_2}{dk_2}$ и $u_e = \frac{d\omega_1}{dk_1}$ для $\mathbf{o}$ и $\mathbf{e}$ лучей. Оцените угол между осью конуса и осью z', и также оцените угол между осью и образующей конуса через L, M, N and K_o.



Вопрос C3 показывает, что фотон может разделиться на два фотона, которые при прохождении через точки a и b поляризованы в перпендикулярных направлениях. Эти два фотона называются *запутанной парой фотонов*, потому что если один фотон, проходящий через a (называемый a-фотоном), поляризован в направлении $\hat{x}'$, то другой, который проходит через b (называемый b-фотоном), будет поляризован в направлении $\hat{y}' \perp \hat{x}'$, и если a -фотон поляризован в $\hat{y}'$, то b-фотон будет поляризован в $\hat{x}'$. Запутанное состояние пары фотонов может быть получено экспериментально. Это суперпозиция двух вышеуказанных альтернативных состояний и может быть выражена как $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\hat{x}'_a\rangle|\hat{y}'_b\rangle + |\hat{y}'_a\rangle|\hat{x}'_b\rangle)$. Здесь $|\hat{x}'_a\rangle|\hat{y}'_b\rangle$представляет состояние когда a-фоторн поляризован в направлении $\hat{x}'$ и b-фотон поляризован в направлении $\hat{y}'$; аналогичное значение имеет $|\hat{y}'_a\rangle|\hat{x}'_b\rangle$. Коэффициент $1/\sqrt{2}$ может рассматриваться как произведение амплитуд электрического поля (выраженное в соответсвующих единицах) для a- и b-фотонов. Как показано на рис. 3, два линейных поляризатора 1 и 2 имеют оси пропускания под углами α и β соответственно относительно $\hat{x}'$. Мы можем использовать их для измерения совпадений двух фотонов, прошедших через a и b. Пусть вероятность одновременного обнаружения двух фотонов, проходящих через поляризаторы 1 и 2, равна $P(\alpha, \beta)$. Другими словами, $P(\alpha, \beta)$ можно также рассматривать как величину, пропорциональную произведению интенсивностей (после соответствующих суперпозиций) света, проходящего через два поляризатора. Обозначим $\alpha + \pi/2$ и $\beta + \pi/2$ как $\alpha_\perp$ и $\beta_\perp$ соответственно.



C4 0.80 Рассмотрим полное электрическое поле, создаваемое линейными поляризаторами. Найдите вероятности $P(\alpha, \beta)$, $P(\alpha, \beta_\perp)$, $P(\alpha_\perp, \beta)$, и $P(\alpha_\perp, \beta_\perp)$.

C5 0.50 Обозначим $\sigma_a = 1$ когда поляризатор 1 с углом α находит a-фотон и $\sigma_a = -1$ когда поляризатор 1 с углом $\alpha_\perp$ находит a-фотон. Аналогично, $\sigma_\beta = 1$ или -1 обозначают случаи когда поляризатор 2 с углами β или $\beta_\perp$ находят b-фотон. Если $E(\alpha, \beta)$ обозначает среднее от $\sigma_a \sigma_b$, то величина $S = |E(\alpha, \beta) - E(\alpha, \beta')| + |E(\alpha', \beta) - E(\alpha', \beta')|$ имеет чрезвычайно важное значение. Для классической теории света $S \leq 2$. Это одна из формулировок неравенства Белла (CHSH-неравенства, полученного Клаузером, Хорном, Шимони и Хольтом). Получите выражение для S и вычислите S для случая $\alpha = \frac{\pi}{4}$,$\alpha' = 0$, $\beta = -\frac{\pi}{8}$, $\beta' = \frac{\pi}{8}$. Укажите, согласуется ли результат для S с классической теорией.

Т | Оптика | Волновая оптика | 2021 | Азиатские | Поляризация | Двулучепреломление