Task Edu

T Task

S Solution

M Marking scheme

A21

В этой задаче изучается поведение давления в жидкости, связанное с волнами в трубе. В заданиях рассматривается гидравлический удар, который проявляется при медленном и быстром перекрытии управляющих клапанов.

В задаче изучаются невязкие жидкости и их течение. Оно одномерное. Считайте, что трубы и клапаны жесткие, однако сжимаемость жидкости нужно иногда учитывать. Пусть элемент жидкости объема V_0 находится в равновесии при давлении P_0. Тогда если давление изменится на ΔP, то его объем изменится на ΔV, и он будет пропорционален ΔP:

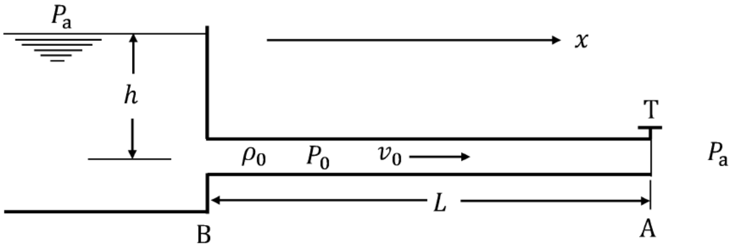
$$\Delta P = -B\,\frac{\Delta V}{V_0}$$

где B – модуль всестороннего сжатия жидкости. Для воды можно считать, что плотность в состоянии равновесия равна$\rho_0 = 1.0\times 10^3\ \text{кг}/\text{м}^3$ и $B = 2.2\ \text{ГПа}$.

Часть A. Избыточное давление и распространение волны давления (2.2 балла)

По цилиндрической трубе длины L в установившемся режиме течет вода в направлении $+x$. Ее скорость v_0, плотность ρ_0 и давление P_0. Как показано на рисунке 1, труба соединена с резервуаром глубины h, а второй конец трубы открывается в атмосферу, где давление равно P_a.

Пусть клапан на конце трубы мгновенно закрывают, и прилегающий к клапану элемент воды испытывает скачок давления $\Delta P_s \equiv P_1 - P_0$ и скорости $\Delta v = v_1 - v_0$, причем $v_1 \le 0$. Это вызывает продольную волну избыточного давления ΔP_s, распространяющуюся в направлении $-x$ со скоростью c.



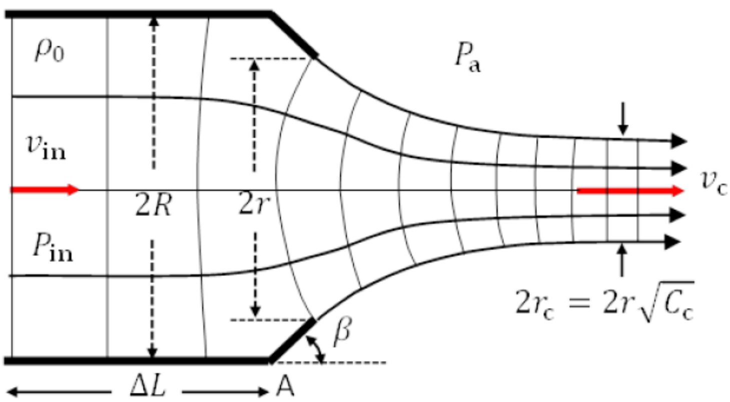
A1 1.60 Избыточное давление ΔP_s и скачок скорости Δv связаны следующим образом: $\Delta P_s = \alpha\rho_0 c\Delta v$. Скорость распространения c представима в виде $c = \beta + \sqrt{\gamma B/\rho_0}$. Найдите α, β и γ.

A2 0.60 Рассчитайте c и ΔP_s, если параметры течения воды следующие: $v_0 = 4.0\ \text{м}/\text{с}$ и $v_1 = 0$.

Часть B. Модель клапана, управляющего потоком (1 балл)

На рисунке 2 показана модель клапана T и поток жидкости через него. Клапан представляется в виде короткого отрезка ΔL, радиуса R на конце A трубы. Выходное отверстие клапана имеет коническую форму, радиус суженной части равен r. Клапан открывается в атмосферу, где давление равно P_a. Силой тяжести, действующей на текущую жидкость, можно пренебречь.

Жидкость считать несжимаемой, а поток установившимся. Элемент жидкости на входе в клапан имеет скорость v_{in}, давление P_{in} и плотность ρ_0. На рисунке 2 линии тока и нормали к ним приведены только в качестве иллюстрации общей картины потока.



Известно, что после выхода струи из клапана в атмосферу, ее сечение будет уменьшаться, пока не достигнет минимального значения, когда линии тока оказываются снова параллельными. В этот момент скорость потока равна v_c, а радиус сечения потока равен $r_c = r\sqrt{C_c}$. Здесь C_c – **коэффициент сжатия**, и он зависит от отношения r/R и угла β. Зависимость приведена в Таблице 1.

r/R	$C_c\ (\beta = 45^\circ)$	$C_c\ (\beta = 90^\circ)$
0.00	0.746	0.611
0.20	0.747	0.616
0.30	0.748	0.622
0.40	0.749	0.631
1.00	1.000	1.000

B1 1.00 Найдите избыточное давление $\Delta P_{\text{in}} = P_{\text{in}} - P_{\text{a}}$ на входе в клапан, где линии тока параллельны. Ответ выразите через ρ_0, v_{in}, r, R и C_c.

Во всех заданиях частей C и D рассматривается система труба-резервуар, приведенная на рисунке 1. Также используйте следующие предположения:

Часть C. Гидравлический удар при быстром закрытии клапана (1.8 балла)

Рассмотрим снова систему труба-резервуар (рис. 1). Если перегородить поток (полностью или частично закрыв клапан), возникнет волна давления, распространяющаяся в обратном направлении. Она отразится от конца B трубы, вернется к клапану и отразится от него. Таким образом, возникнет другая волна, и описанный процесс повторится. Поэтому наблюдается серия всплесков и падений давления, испытываемого элементом жидкости вблизи клапана. Это и называется **гидравлическим ударом**.

C1 0.60 Найдите давление P_0 и скорость v_0 установившегося потока в трубе, когда клапан T полностью открыт ($r = R$) (см. рис. 1 и 2). Ответ выразите через ρ_0, g, h и P_{a}.

C2 1.20 Рассмотрим установившийся поток, описанный в пункте C1 (давление P_0 и скорость v_0). Затем в $t = 0$ клапан мгновенно перекрывают ($r = 0$). Волна давления распространяется к резервуару со скоростью c. Давление $P_h = P_0 + \rho_0 g h$. Пусть $\tau = 2L/c$. Чему равны давления $P(t)$ и скорости потока $v(t)$ в трубе, когда t очень близко к $\tau/2$ и τ?

Часть D. Гидравлический удар при медленном закрытии клапана (5.0 баллов)

Рассмотрим установившийся поток, описанный в пункте C1 (давление P_0 и скорость v_0). Теперь клапан закрывается медленно. Чтобы смоделировать процесс закрытия, разобьем его на шаги.

Начиная с момента времени $t = 0$, и далее каждые $\tau = 2L/c$ происходит мгновенное изменение радиуса r клапана. Сразу после каждого изменения радиуса поток вблизи клапана считайте установившимся (как в части B). Таким образом, давление и скорость потока вблизи клапана отличаются от этих величин в остальных частях трубы.

Для каждого шага n в таблице 2 приведены значения длительности этого шага и значение радиуса r_n. Также указаны обозначения давления в жидкости P_n и скорости потока v_n вблизи клапана.

Шаг n	Временной интервал шага n	Отношение r_n/R	Давление у клапана в $t = (n-1)\tau$	Скорость потока у клапана в $t = (n-1)\tau$
$n = 0$	$t < 0$	1.00	P_0	v_0
$n = 1$	$0 \le t < \tau$	0.40	P_1	v_1
$n = 2$	$\tau \le t < 2\tau$	0.30	P_2	v_2
$n = 3$	$2\tau \le t < 3\tau$	0.20	P_3	v_3
$n = 4$	$3\tau \le t < 4\tau$	0.00	P_4	$v_4 = 0$

Плотность жидкости ρ_0 и скорость распространения волны c можно считать постоянными. Пусть $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Определим $\Delta P_n = P_n - P_0$ и $\Delta v_n = v_n - v_0$. Работайте в приближении, что $P_h = P_0$.

D1 3.00 Выразите $\Delta P_n/(\rho_0 c)$ через $\Delta P_{n-1}/(\rho_0 c)$, v_{n-1} и v_n. Выражение должно быть справедливо для всех $n > 0$, приведенных в таблице 2. Для $n = 1, 2, 3$ получите также выражение для расчета v_n, если v_{n-1} и $\Delta P_{n-1}/(\rho_0 c)$ известны.

D2 [2.00] Используйте результаты пункта D1 для потока, движущегося со скоростью $v_0 = 4.0$ м/с. На миллиметровке в листах ответов постройте график зависимости ΔP от $\rho_0 c v$. Точки пересечения ваших отрезков и участков кривых должны давать координаты $\rho_0 c v_n$ и ΔP_n для $n = 1, 2, 3, 4$. Подпишите точки пересечения $(\rho_0 c v_n, \Delta P_n)$ для всех n. Из графика оцените значения $\rho_0 c v_n$ и ΔP_n (все в МПа) для $n = 1, 2, 3, 4$.