Task Edu

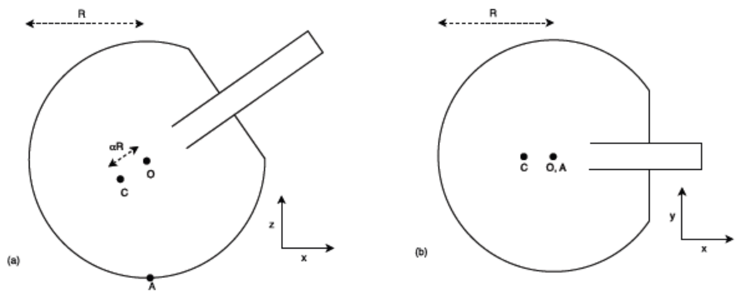
T Task

S Solution

M Marking scheme

A19

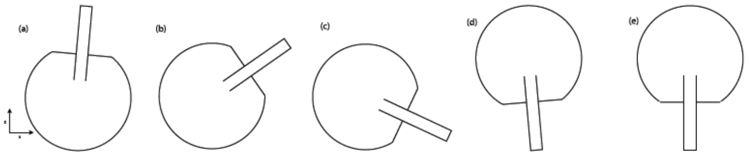
Китайский волчок — это особый волчок, который переворачивается при вращении. Представьте волчок, как усеченную сферу радиуса R со стержнем на оси. Волчок симметричен относительно этой оси. Центр масс C волчка сдвинут относительно геометрического центра сферы на расстояние αR, как показано на рисунке 1a. Отклонение стержня от вертикали в любой момент времени характеризуется углом θ. Точка A — точка касания волчка с полом. Если волчок такой формы раскрутить достаточно быстро, то стержень начнёт опускаться до тех пор, пока волчок не встанет и не начнёт вращаться на нём. Далее волчок начнёт замедляться и остановится.



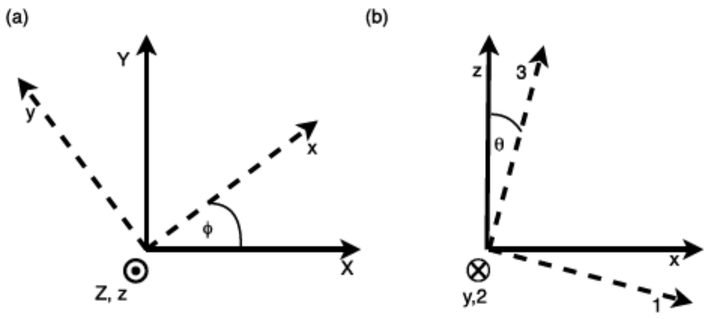
Определим xyz как вращающуюся систему координат, в которой $\hat{\mathbf{z}}$ стационарна и направлена вверх. При этом ось симметрии волчка всегда располагается в плоскости xz (см. рисунок 1b). При виде сверху ось волчка всегда совпадает с осью x.

На рисунке 2 показаны фазы движения волчка после раскручивания:

- (a) **фаза I**: сразу после начала вращения $(\theta \sim 0)$
- (b) **фаза II**: через небольшое время после начала $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$
- (c) **фаза III**: стержень впервые касается пола $(\theta > \frac{\pi}{2})$
- (d) **фаза IV**: после переворота волчок вращается на стержне $(\theta \sim \pi)$
- (e) **фаза V**: установившееся вращение на стержне $(\theta = \pi)$.



Определим XYZ, как неподвижную инерциальную систему координат. Плоскость XY — пол, на котором находится волчок. Выше определена система координат xyz, она получается из XYZ вращением относительно оси Z на угол ϕ (рис. 3a). В частности единичные векторы направляющих $\hat{\mathbf{z}} = \widehat{\mathbf{Z}}$.



Вращение твёрдого тела можно описывать углами Эйлера $(\theta,\ \phi,\ \psi)$. Опишем через эти углы, переходы от неподвижной системы координат XYZ к промежуточной системе координат xyz, и от промежуточной xyz к системе координат 123, жёстко связанной с волчком. Угол θ — угол между осью симметрии волчка и осью Z. Угол ϕ — угол поворота относительно оси Z (угол между промежуточным единичным вектором $\widehat{\mathbf{x}}$ и неподвижным $\widehat{\mathbf{X}}$, а также между $\widehat{\mathbf{y}}$ и $\widehat{\mathbf{Y}}$). Угол ψ — угол вращение относительно оси симметрии волчка.

Система координат 123 жёстко связана с волчком. Она получается из xyz вращением на угол θ относительно единичного вектора $\widehat{\mathbf{y}}$, таким образом вектор $\widehat{\mathbf{3}}$ совпадает с осью симметрии волчка. Переход от системы координат xyz к 123 показан на рисунке 3b. В частности $\widehat{\mathbf{2}} = \widehat{\mathbf{y}}$

В процессе движения китайского волчка все три угла Эйлера $(\theta,\ \phi,\ \psi)$, а также положение центра масс меняются. Нахождение полного решения о движении китайского волчка сложная задача для компьютерного моделирования. В этой задаче требуется требуется записать уравнения движения китайского волчка и сделать некоторые частные выводы из них.

В движении волчка ключевой является сила трения, возникающая между ним и полом. Считайте, что волчок касается пола в точке A до касания пола стержнем. Пусть $\mathbf{v}_A$— скорость движения точки A волчка относительно пола. Коэффициент трения μ_k между волчком и полом — это коэффициент трения скольжения. Сила трения скольжения $|\mathbf{F_f}| = \mu_k N$, где $\mathbf{F}_f = F_{f,x}\hat{\mathbf{x}} + F_{f,y}\hat{\mathbf{y}}$, а N — сила нормальной реакции опоры. Считайте, что изначально волчок только крутится относительно своей оси, начальный импульс волчка равен нулю.

Пусть m — масса волчка. Его моменты инерции: I_3 относительно оси симметрии, а $I_1 = I_2$ относительно взаимно перпендикулярных осей, проходящих через центр масс C в плоскости перпендикулярной оси симметрии. Пусть вектор $\mathbf{s}$ определяет положение центра масс волчка, а $\mathbf{a} = \overrightarrow{CA}$ вектор из центра масс в точку касания волчка и пола.

Все ответы дайте в системе отсчёта связанной с системой координат xyz (если не сказано обратного)! Все моменты сил и моменты импульса рассматриваются относительно центра масс C (если не сказано обратного)! При записи ответов считайте N известным! Кроме части А8, считайте, что $\theta < \frac{\pi}{2}$, и что стержень не касается пола!

A1 1.00 Найдите полную силу $\mathbf{F}_{\text{ext}}$, действующую на китайский волчок. Изобразите все действующие на волчок силы в проекции на плоскости xz и xy. Укажите направление $\mathbf{v}_A$ на вашем рисунке в проекции на плоскость xy.

A2 0.80 Найдите полный внешний момент действующих на волчок сил $\vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}}$ относительно центра масс.

A3 0.40 Покажите, что скорость точки A не имеет z-компоненты, т.е. можно записать $\mathbf{v}_A = v_x\hat{\mathbf{x}} + v_y\hat{\mathbf{y}}$. Если требуется, считайте условие для точки касания $(\mathbf{s} + \mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0$ данным.

A4 0.80 Найдите полную угловую скорость $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ вращения волчка относительно его центра масс C. Ответ выразите через производные углов Эйлера: $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}, \dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$, и $\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt}$. Дайте ответы в двух системах координат: в координатах xyz и в координатах 123 .

A5 1.00 Найдите Полную энергию движения волчка. Выразите ответ через производные углов Эйлера, v_x, и v_y . Если записать ответ через $\dot{\mathbf{s}} = \frac{d\mathbf{s}}{dt}$, то вы получите только часть баллов.

A6 0.40 Найдите скорость изменения z-компоненты момента импульса.

A7 1.40 Какие силы совершают работу кроме силы тяжести? Выразите через $\mathbf{v}_A$ с какой скоростью меняется полная энергия волчка. В пункте А5 полная энергия состояла из нескольких частей. Определите компоненты сил и моментов сил, которые меняют распределение энергии между этими частями.

A8 2.00 Качественно изобразите следующие части полной энергии, как функции времени, в течение всех фаз движения китайского волчка (от **I** до **V**, показаны на рисунке 2): полная энергия E_T, потенциальная гравитационная энергия U_G, кинетическая энергия поступательного движения K_T, кинетическая энергия вращения K_R.

A9 0.50 Покажите, что компоненты момента импульса $\mathbf{L}$ и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, которые перпендикулярны единичному вектору $\widehat{\mathbf{3}}$ пропорциональны друг другу, то есть

$$\mathbf{L} \times \widehat{\mathbf{3}} = k(\boldsymbol{\omega} \times \widehat{\mathbf{3}})$$

Определите коэффициент пропорциональности k.

Интегралы движения — это величины, которые остаются постоянными в процессе движения. Такие величины часто значительно упрощают вычисления. Обычно это энергия, импульс или момент импульса.

A10 1.70 При движении китайского волчка не сохраняется ни энергия, ни момент импульса. Это происходит из-за диссипативных сил и момента внешних сил. Однако, сохраняется постоянной величина λ, которая называется интегралом Желлета. Она показывает сохраняющуюся компоненту момента импульса. Это означает, что существует некоторый вектор $\mathbf{v}$, такой что $\lambda = \mathbf{L} \cdot \mathbf{v}$ постоянно во времени. Используя результаты предыдущих пунктов, найдите $\mathbf{v}$. Покажите, что производная λ по времени равна нулю.