



Task Edu

В этой задаче мы рассмотрим три основных термоэлектрических эффекта: закон Джоуля-Ленца, эффекты Зеебека и Пельтье.

Task

Закон Джоуля-Ленца. При направленном движении носителей заряда они передают часть энергии в колебательное движение кристаллической решетки, поэтому кристалл нагревается. Этот процесс — необратимый.

Solution

Эффект Зеебека наблюдается в термопаре, состоящей из двух разных проводников A и B , спаянных друг с другом (рис. 1а) либо соединенных через промежуточный материал C (рис. 1б). Когда спаи термопары поддерживаются при разных температурах T_1 и T_2 (рис. 1), в системе возникает ЭДС

Marking scheme

$$\epsilon = \alpha(T_1 - T_2)$$

где α — коэффициент Зеебека термопары и считается, что он не зависит от температуры.

↪ A18

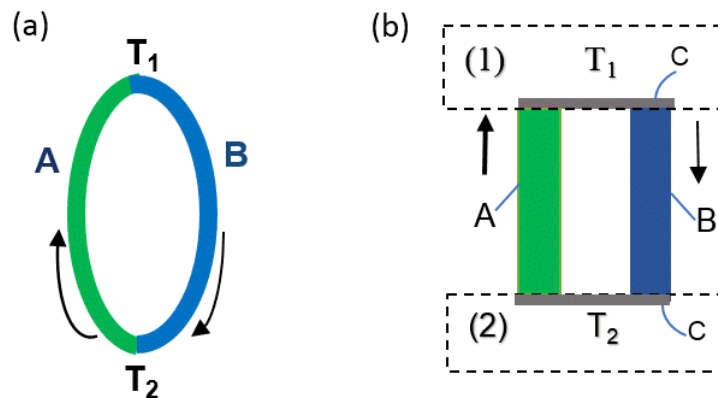


Рис. 1: (а) два спаи термопары; (б) соединение проводников через промежуточный материал. (1) нагреватель (T_1); (2) холодильник (T_2).

Эффект Пельтье. Если через термопару пропустить ток, то, в зависимости от направления, куда он течет, на спае может выделяться или поглощаться тепло. Соединение проводников термопары может быть как прямым (рис. 2а), так и через промежуточный материал (рис. 2б). Выделяемая (или поглощаемая) на спаих мощность q записывается следующим образом:

$$q = \pi I$$

где π — коэффициент Пельтье. Эффекты Зеебека и Пельтье — обратимые. Цепь, показанная на рисунке 2б, может использоваться как холодильник, причем тепло отбирается у одного из спаев и выделяется на другом. Излучением, конвекцией и теплопроводностью можно пренебречь. Вся теплопередача происходит внутри тепловых резервуаров и термопары.

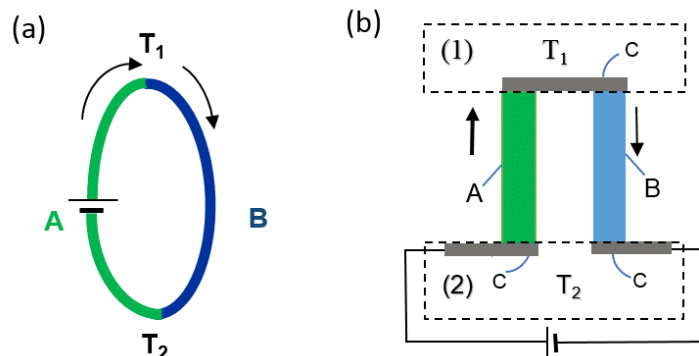


Рис. 2: (а) два спаи термопары; (б) соединение проводников через промежуточный материал.

Для численных расчетов в Таблицах 1 и 2 приведены значения тепловых и электрических характеристик материалов.

Название	Материал	Удельное сопротивление ρ (Ом · м)	Коэффициент теплопроводности k (Вт · м ⁻¹ · К ⁻¹)
A	Bi ₂ Te _{2.7} Se _{0.3}	1.0×10^{-5}	1.4
B	Bi _{0.5} Sb _{1.5} Te ₃	1.0×10^{-5}	1.4

Термопара AB	Длина (м)	Коэффициент Зеебека α (мкВ · К ⁻¹)
	0.02	420

Часть I. Теплопроводность и термоэлектрический генератор (7.5 баллов)

Теплопроводность в однородном проводнике

Вдоль однородного проводника течет ток силой I (рис. 3). Удельное сопротивление материала ρ , коэффициент теплопроводности k . Координаты концов проводника: $x = 0$ и $x = L$. Температуры концов проводника поддерживаются постоянными и равными T_1 при $x = 0$ и T_2 при $x = L$ ($T_1 > T_2$).

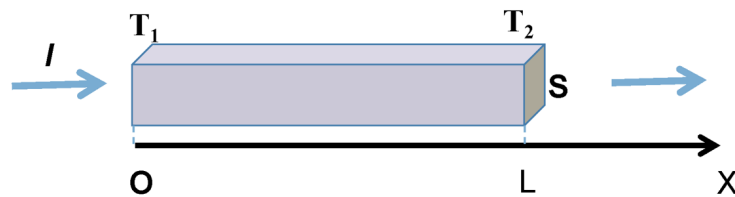


Рис. 3

Тепловой поток $q(x)$, т.е. количество теплоты, проходящее по нормали к площадке S в единицу времени, описывается законом Фурье (одномерный случай):

$$q(x) = -kS \frac{dT(x)}{dx}$$

где k — коэффициент теплопроводности, а S — площадь поперечного сечения.

A1^{0.75} Найдите распределение температуры $T(x)$ вдоль стержня. Считайте, что распределение стационарно, а также что нет потерь тепла в окружающую среду.

Примечание. Уравнение вида $\frac{d^2T(x)}{dx^2} = a$ имеет решение вида

$$T(x) = \frac{1}{2} ax^2 + C_1x + C_2, \text{ где } C_1 \text{ и } C_2 \text{ — постоянные, определяемые из граничных условий.}$$

A2^{1.00} Найдите тепловой поток $q(x)$ в произвольной точке x , а также рассчитайте его на концах: $q(0)$ и $q(L)$.

Связь коэффициентов Зеебека и Пельтье

Рассмотрим термопару (рис. 1b), у которой коэффициент Зеебека равен α . Ее коэффициенты Пельтье равны π_1 и π_2 на горячем (T_1) и холодном (T_2) спаях термопары соответственно. Выделением джоулева тепла можно пренебречь. Считайте, что электронный газ в проводниках термопары совершает идеальный цикл.

B1^{0.25} Какую тепловую мощность q_1 получает газ от нагревателя температурой T_1 ?

B2^{0.25} Какую тепловую мощность q_2 газ отдает холодильнику температурой T_2 ?

B3^{0.50} Какая полная электрическая полезная мощность P производится электронным газом, если коэффициент Зеебека равен α ?

B4^{0.50} Выразите коэффициент Пельтье π на спае термопары через коэффициент Зеебека α и температуру спая T .

Термоэлектрический генератор

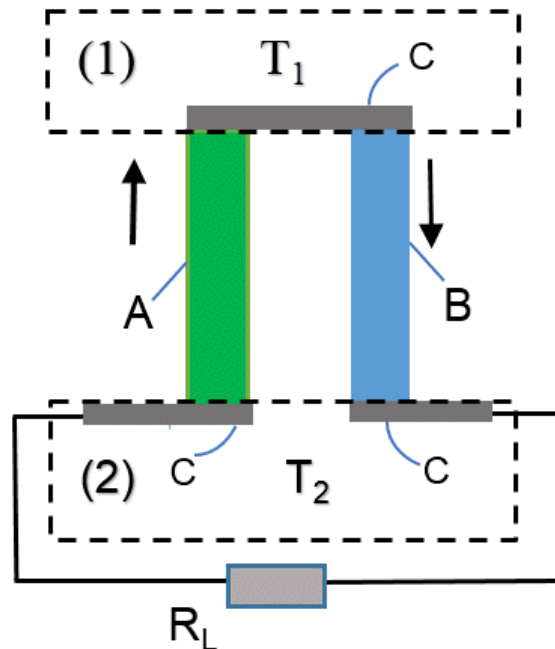


Рис. 4. Термoeлектрический генератор. (1) Нагреватель (T_1); (2) холодильник (T_2).

Внимание! Здесь и далее коэффициент Пельтье π примите равным αT . Также везде нужно будет учитывать выделяющееся джоулево тепло.

Термопара состоит из двух проводников A и B одинаковой длины L (рис. 4). Параметры проводников, соответственно, равны: площади поперечного сечения S_A и S_B , удельные сопротивления ρ_A и ρ_B , коэффициенты теплопроводности k_A и k_B . Нижние концы стержней подключены к нагрузке R_L . Параметры термопары таковы: α — коэффициент Зеебека, $R = \frac{\rho_A L}{S_A} + \frac{\rho_B L}{S_B}$ — ее внутреннее сопротивление, $K = \frac{k_A S_A}{L} + \frac{k_B S_B}{L}$ — ее коэффициент теплопроводности. Верхний спай термопары поддерживается при температуре T_1 , нижний — при T_2 , причем $T_1 > T_2$. Обозначим q_1 полную тепловую мощность, забираемую у нагревателя (T_1), а q_2 — полную тепловую мощность, получаемую холодильником (T_2).

C1^{0.50} Выразите q_1 и q_2 через параметры термопары α , K , R , температуры T_1 , T_2 и силу тока I .

КПД термoeлектрического генератора определяется как $\eta = P_L/q_1$, где P_L — мощность, выделяющаяся на нагрузке. Отношение сопротивлений нагрузки и термопары обозначается $m = R_L/R$.

C2^{0.75} Выразите КПД η генератора через параметры термопары α , K , R , температуры T_1 , T_2 и отношение сопротивлений m .

При производстве термoeлектрических генераторов необходимо удовлетворить следующим условиям: а) минимизировать сопротивление, чтобы уменьшить выделение джоулева тепла; б) обеспечить низкую теплопроводность, чтобы уменьшить теплопередачу между спаями, и в) сохранять большую разность температур. Совместно это характеризуется показателем качества термопары $Z = \alpha^2/KR$.

C3^{0.25} Выразите КПД η генератора через Z , КПД идеального цикла Карно $\eta_c = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$, температуру T_1 и m .

Максимальный КПД генератора

D1^{0.25} Обозначим η_P КПД генератора, когда на нагрузке выделяется максимальная мощность $P_L = P_{\max}$. Выразите η_P через Z , T_1 , T_2 .

D2^{0.75} КПД генератора достигает максимума $\eta = \eta_{\max}$ при некотором значении отношения сопротивлений $m = M$. Выразите это M через Z , T_1 , T_2 .

D3^{0.25} Выразите максимальный КПД η_{\max} через Z , M , T_1 , T_2 .

Максимальный показатель качества термопары

Увеличение показателя качества термопары приводит к увеличению КПД генератора. При производстве термопар площади поперечного сечения S_A и S_B проводников подбираются так, что показатель качества получается максимальным $Z = Z_m$.

E1^{0.50} Найдите отношение площадей поперечного сечения S_A/S_B проводников, когда показатель качества термопары максимален. Ответ выразите через ρ_A , ρ_B , k_A , k_B .

E2^{0.25} Выразите максимальный показатель качества термопары Z_m через $\alpha, \rho_A, \rho_B, k_A, k_B$.

Оптимальный КПД генератора

Если показатель качества термопары и электрическая мощность, выделяющаяся на нагрузке, максимальны одновременно, то такой режим работы генератора называется оптимальным. Обозначим η_{opt} КПД такого генератора.

Пусть нагреватель имеет температуру $T_1 = 423$ К, а холодильник — $T_2 = 303$ К.

F1^{0.50} Вычислите значение η_{opt} термоэлектрического генератора, который изготовлен из материалов, характеристики которых приведены в Таблице 1.

Сравните вычисленное значение с КПД идеальной тепловой машины η_c .

F2^{0.25} Вычислите значение максимального КПД η_{max} термоэлектрического генератора, изготовленного из указанных материалов.

Часть II. Термоэлектрический холодильник (2.5 балла)

Термопара с параметрами α, K, R , определенными в пункте «Термоэлектрический генератор», используется как холодильник (рис. 5). Верхний спай термопары соприкасается с теплым резервуаром начальной температуры T_1 . Резервуар теплоизолирован от окружающей среды, и его хотят охладить. Нижние концы проводников всегда поддерживаются при температуре T_2 и подключены к источнику тока. Направление тока, текущего через спай термопары, такое, что у верхнего, теплого, резервуара теплота поглощается, а выделяется внизу.

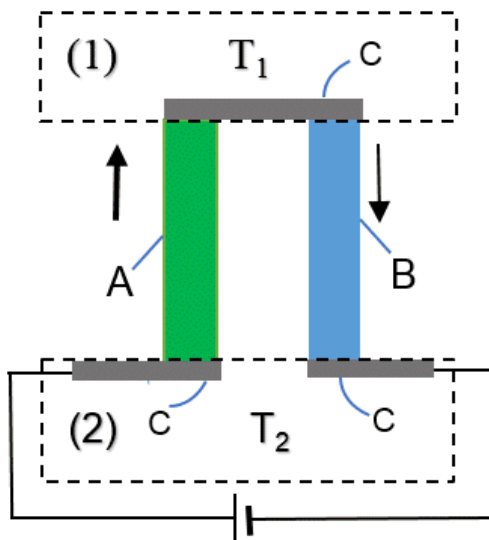


Рис. 5. Термоэлектрический холодильник. (1) Изолированный теплый резервуар (T_1); (2) холодный резервуар (T_2).

G1^{0.25} q_C — это полная тепловая мощность, которая отбирается от теплого резервуара. Выразите q_C через параметры термопары α, K, R и T_1, T_2, I .

G2^{0.50} Найдите максимальную разность температур $\Delta T_{max} = T_2 - T_{1min}$, которой можно достичь, используя термоэлектрический холодильник. Ответ выразите через показатель качества термопары Z и наименьшую температуру T_{1min} верхнего резервуара, до которой его можно охладить.

Термопара изготовлена из материалов A и B с наилучшим показателем качества Z_m (найденным в части А). Эта термопара используется в качестве холодильника.

H1^{0.25} Найдите и рассчитайте численное значение минимальной температуры T_{1min} верхнего резервуара, если нижние концы поддерживаются при температуре $T_2 = 300$ К.

H2^{0.50} Найдите и рассчитайте численное значение рабочей силы тока I_w холодильника, когда верхний резервуар можно охладить до минимальной температуры T_{1min} . Нижние концы поддерживаются при температуре $T_2 = 300$ К. Считайте, что площади поперечного сечения равны $S_A = S_B = 10^{-4}$ м².

Холодильный коэффициент

Когда разность температур меньше своего возможного максимального значения ΔT_{max} , вводится холодильный коэффициент. Он определяется как $\beta = q_C/P$, где P — подводимая электрическая мощность.

I1^{0.50} Выразите холодильный коэффициент β через параметры термопары α, K, R и T_1, T_2, I .

12^{0.25} Когда холодильный коэффициент достигает максимального значения β_{\max} , сила тока, текущего через термопару, равна I_{β} . Выразите I_{β} через параметры термопары α , k , R и T_1 , T_2 .

13^{0.25} Найдите максимальное значение холодильного коэффициента β_{\max} .

T

Термодинамика

Теплопроводность

2018

КПД

Азиатские

Эффект Пельтье

Эффект Зеебека