



Полезный факт:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Ракеты — не самый эффективный способ вывода грузов на орбиту. Космический лифт, если его построить, будет гораздо более эффективной технологией (рис. 1). Основой элемента космического лифта — трос, один конец которого закреплен на поверхности Земли, на экваторе, а другой конец расположен на высоте, большей, чем высота геостационарной орбиты. Геостационарная орбита имеет радиус примерно 42300 км и период обращения такой же, как собственное вращение Земли. Для реализации идеи космического лифта потребуются материалы намного прочнее и легче, чем сталь. Одним из таких материалов могут стать углеродные нанотрубки. В этой задаче мы рассмотрим две конструкции космического лифта, механические свойства углеродных нанотрубок, а также некоторые применения лифта.

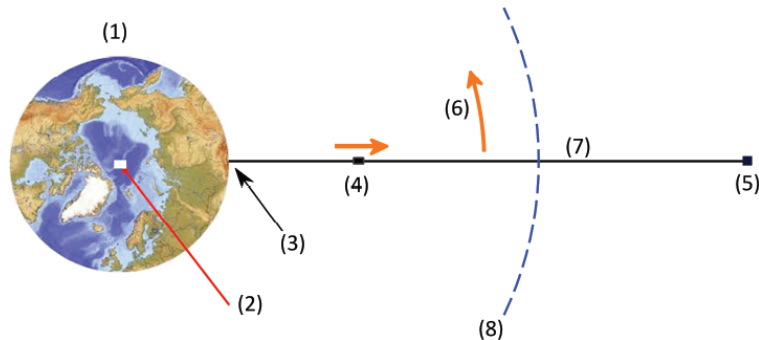


Рис. 1. Космический лифт. (1) Земля; (2) Северный полюс; (3) закрепление на экваторе; (4) кабина; (5) противовес; (6) вращение Земли; (7) трос; (8) геостационарная орбита.

Масса Земли  $M = 5.98 \times 10^{24}$  кг, радиус Земли  $R = 6370$  км, радиус геостационарной орбиты  $R_G = 42300$  км, масса Солнца  $M_S = 2 \times 10^{30}$  кг, радиус орбиты Земли  $R_E = 1.5 \times 10^8 = 1$  а.е. (а.е. – астрономическая единица), скорость орбитального движения Земли 30.9 км/с, угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси  $\omega = 7.27 \times 10^{-5}$  рад/с.

#### Космический лифт с цилиндрическим тросом постоянного сечения

В этой части рассматривается конструкция лифта с цилиндрическим тросом постоянного сечения площадью  $A$ . Плотность материала троса  $\rho$ . Трос представляет собой вертикальный цилиндр на экваторе Земли. Высота цилиндра больше, чем высота геостационарной орбиты. Длина троса такая, что механическое напряжение троса в точке на поверхности Земли равно нулю. Механическое напряжение — сила натяжения на единицу площади поперечного сечения. Трос находится в натяжении по всей своей длине. Механические напряжения троса такие, что каждый элемент троса находится в равновесии под действием сил натяжения, гравитационных сил и центробежных.

A1<sup>0.50</sup> Вычислите высоту верхнего конца троса над поверхностью Земли  $L$ .

A2<sup>0.50</sup> Найдите расстояние  $r$  между центром Земли и точкой, в которой механическое напряжение троса максимально.

A3<sup>0.50</sup> Выразите максимальное механическое напряжение троса  $\sigma_{max}$  через  $\rho$ ,  $R_G$ ,  $R$  и ускорение свободного падения  $g$ . Вычислите отношение максимального механического напряжения троса  $\sigma_{max}$  к пределу прочности стали  $\sigma_{steel}$ . Считайте, что трос изготовлен из стали плотностью 7900 кг/м<sup>3</sup> с пределом прочности 5.0 ГПа.

#### Углеродные нанотрубки

Вычисления прошлой части показывают, что для реализации проекта необходим очень легкий, но прочный материал. Материал из углеродных нанотрубок удовлетворяет этим требованиям из-за наличия прочных химических связей между относительно легкими атомами.

В природе существует две аллотропных модификации углерода: алмаз и графит. В алмазе каждый атом углерода окружен четырьмя ближайшими соседними атомами, которые являются вершинами тетраэдра. Графит имеет слоистую структуру. В каждом слое атомы углерода выстроены в шестиугольную плоскую структуру. Каждый атом в этой плоскости имеет трёх ближайших соседей. Ковалентные связи между такими атомами в слое графита оказываются даже прочнее, чем связи между атомами в алмазе. Мягкость графита объясняется слабыми Ван-дер-Ваальсовыми силами между атомами разных слоёв.

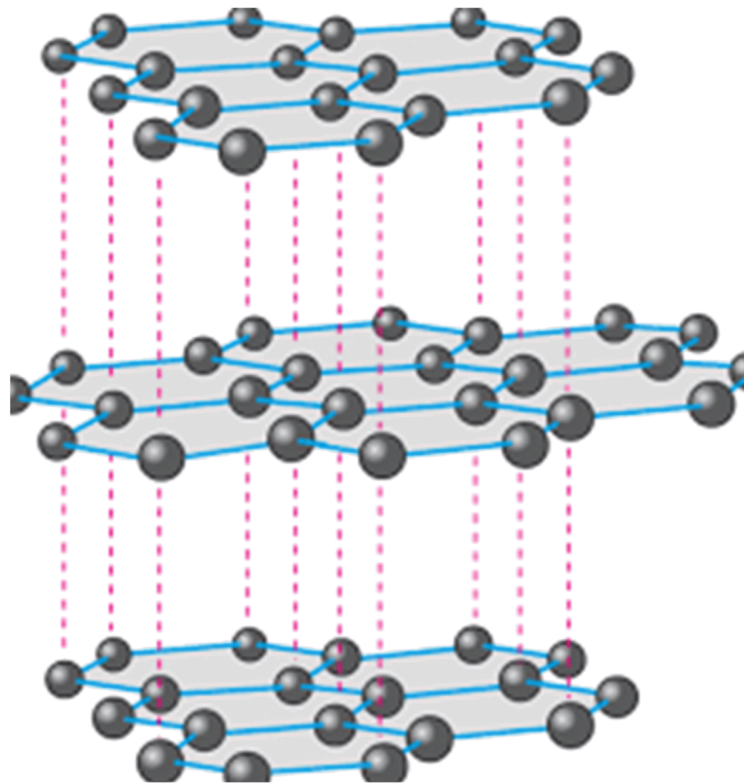


Рис. 2. Структура графита.

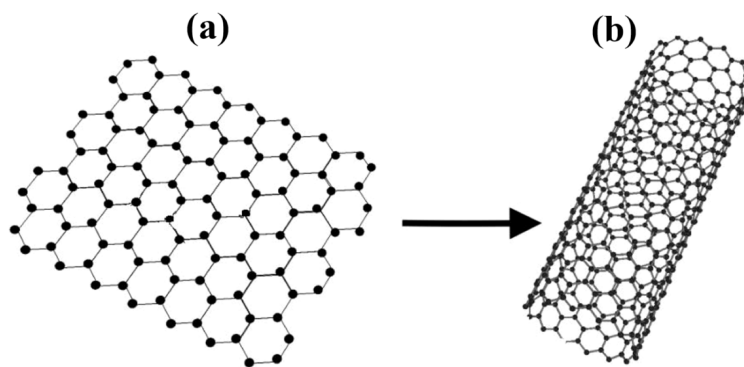


Рис. 3. Графен (a) и углеродная нанотрубка (b).

Одноатомный слой графита называется графеном (рис. 3a). Отдельный лист графена нестабилен и склонен сворачиваться в сферы или нанотрубки (рис. 3b). Шестиугольная кристаллическая решетка графена изображена на рис. 4. Расстояние между двумя соседними атомами углерода  $a = 0.142$  нм. Расстояние между двумя ближайшими параллельными связями равно  $b = 0.246$  нм. Из-за очень сильных ковалентных связей углеродные нанотрубки обладают чрезвычайно большим модулем Юнга, большим пределом прочности и очень маленькой плотностью. Модуль Юнга есть отношение механического напряжения к относительному удлинению.

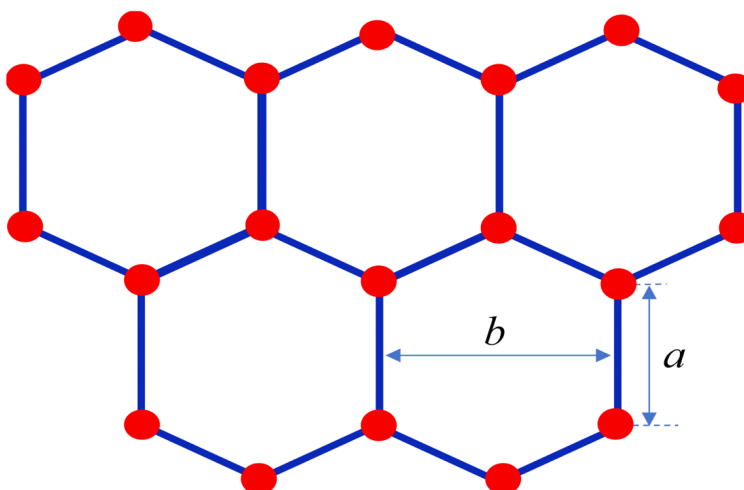


Рис. 4. Графен

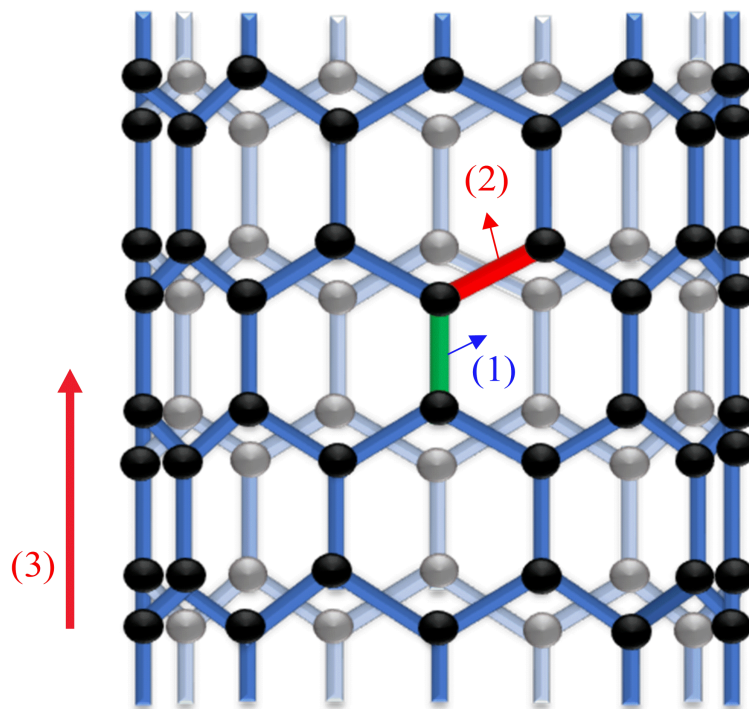


Рис. 5. Углеродная нанотрубка с 9 углерод-углеродными параллельными связями. В условии вашей задачи таких связей 27. (1) параллельные связи; (2) наклоненная связь; (3) ось нанотрубки.

Далее мы вычислим механические свойства углеродной нанотрубки, которая имеет 27 углерод-углеродных параллельных связей вдоль своей оси (рис. 5). Энергия связи между двумя атомами углерода описывается потенциалом Морзе  $V(x) = V_0(e^{-4\frac{x}{a}} - 2e^{-2\frac{x}{a}})$ . Здесь  $a = 0.142$  нм — расстояние между двумя соседними атомами углерода в равновесии,  $V_0 = 4.93$  эВ — энергия связи,  $x$  — смещение атомов от положения равновесия. Далее мы аппроксимируем потенциал Морзе в виде квадратичного потенциала  $V(x) = P + Qx^2$ . Взаимодействуют только соседние атомы. В данном приближении можно считать, что атомы скрепляются «пружинками» с некоторой жесткостью  $k$ . Изменения углов между связями пренебрежимо малы и не рассматриваются.

- V1<sup>0.25</sup> Выразите коэффициенты  $P$  и  $Q$  через  $a$  и  $V_0$ .
- V2<sup>0.25</sup> Вычислите характерную жесткость «пружинки»  $k$ .
- V3<sup>0.50</sup> Вычислите модуль Юнга углеродной нанотрубки  $E$ .

При максимально возможном удлинении «пружинки»  $x_{\max}$  её потенциальная энергия равна энергии связи. Это позволяет оценить предел прочности углеродной нанотрубки.

- V4<sup>0.50</sup> Вычислите максимальное удлинение  $x_{\max}$  «пружинки».
- V5<sup>0.50</sup> Оцените предел прочности  $\sigma_0$  углеродной нанотрубки.
- V6<sup>0.50</sup> Оцените плотность углеродной нанотрубки  $\rho$ . Молярная масса углерода 12 г/моль.

#### Космический лифт с коническим тросом постоянного механического напряжения

В данной части мы рассматриваем трос космического лифта с переменной площадью сечения, но с постоянным механическим напряжением  $\sigma$  и постоянной плотностью  $\rho$  по всей длине. Трос имеет осевую симметрию и расположен вертикально на экваторе. Высота троса больше, чем высота геостационарной орбиты. Обозначим площадь поперечного сечения троса на поверхности Земли как  $A_S$ , на высоте геостационарной орбиты как  $A_G$ .

- C1<sup>0.50</sup> Найдите зависимость площади поперечного троса  $A(h)$  от высоты  $h$ . Высота  $h$  отсчитывается от поверхности Земли.
- C2<sup>0.50</sup> Трос устроен так, что площади поперечного сечения его концов равны. Найдите расстояние  $H$  от центра Земли до верхнего конца троса.
- C3<sup>0.50</sup> Найдите отношение  $A_G/A_S$ , если трос изготовлен из углеродных нанотрубок с пределом прочности 130 ГПа и плотностью 1300 кг/м<sup>3</sup>.
- C4<sup>1.00</sup> Можно значительно сократить длину троса, если его часть сверху убрать и прикрепить противовес соответствующей массы. Пусть  $h_C$  — высота троса, отсчитываемая от геостационарной орбиты до противовеса. Найдите массу противовеса  $m_C$ .

Task Edu

T Task

S [Solution](#)

M [Marking scheme](#)

↪ A18

Применение: вывод нагрузки на орбиту и запуск космических кораблей к другим планетам

Основная идея применения космического лифта — выводить с помощью него полезную нагрузку на орбиту и запускать космические корабли к другим планетам. Способ запуска объектов довольно прост: объект поднимается на высоту  $r$  и отпускается без начальной скорости. Считайте, что движение троса происходит в плоскости орбиты Земли.

D1<sup>0.50</sup> Если с некоторой точки троса отпустить объект, то он сможет покинуть гравитационное поле Земли. Найдите критический радиус  $r_C$ , измеряемый от центра Земли, для которого это произойдет.

Использование троса высотой больше  $r_C$  необходимо, если мы хотим запускать объекты к другим планетам. Пусть конец троса находится на расстоянии 107000 км от центра Земли.

D2<sup>1.00</sup> Найдите, каких минимального  $r_{min}$  и максимального  $r_{max}$  расстояний от Солнца может достичь объект, отпущенный с конца троса. Выразите ваш ответ в астрономических единицах (а.е.). Притяжением Земли на такой высоте можно пренебречь.

T

Механика

Гравитация

2018

Азиатские

Упругость