

Вихри в сверхтекучей жидкости

Введение

Сверхтекучесть - это свойство жидкости течь без трения. Повседневный опыт говорит нам, что при движении обычной жидкости (например, воды при комнатной температуре) всегда возникает вязкое трение, приводящее к диссипации энергии так, что поток постепенно замедляется, если он не поддерживается внешними силами. Напротив, сверхтекучая жидкость не теряет кинетической энергии: однажды возбужденное движение сверхтекучей жидкости может продолжаться бесконечно долго. Сверхтекучесть была первоначально экспериментально обнаружена в жидком гелии.

Мы будем рассматривать свойства сверхтекучего гелия при нулевой температуре. Будем считать, что это несжимаемая жидкость с плотностью ρ , которая обладает свойством непрерывности (масса вытекающая в заданный бесконечно малый объем, и вытекающая из него, одинакова). Это позволяет утверждать, что поток вектора скорости гелия \vec{v} через любую замкнутую поверхность всегда равен нулю. Отсюда можно сделать вывод, что скорость сверхтекучей жидкости аналогична индукции магнитного поля. Аналогично линиям индукции магнитного поля, "линии тока" в каждой своей точке направлены по касательной к скорости и их плотность пропорциональна величине скорости.

Истинное сверхтекучее движение является безвихревым, т.е. циркуляция вектора скорости \vec{v} по любому замкнутому контуру внутри гелия равна нулю

$$\int_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1)$$

Однако это выражение необходимо изменить, если сверхтекучесть отсутствует вдоль тонкой "вихревой нити" или "вихря". Толщина нити имеет приблизительно атомарные размеры a , вокруг нее создаются потоки жидкости на больших расстояниях (дальняя зона). Циркуляция вектора скорости вокруг такой нити равна кванту циркуляции.¹

$$\left| \int_L \vec{v} \cdot d\vec{l} \right| = 2\pi\kappa, \quad (2)$$

и равна нулю если контур не охватывает ни одну вихревую нить (см. рис. 1). Это подтверждает аналогию между полем векторов скоростей сверхтекучей жидкости и магнитным полем, создаваемым проводами с током: для полей векторов скоростей выполняется принцип суперпозиции (сумма двух полей скоростей также дает поле скоростей), и скорость в любой точке равна (с точностью до размерного коэффициента) индукции магнитного поля, создаваемого электрическими токами, текущими через систему проводов, соответствующих вихревым нитям.

¹Такое квантование является макроскопическим квантовым эффектом и соответствует квантованию момента импульса в модели Бора. Квант циркуляции скорости может быть записан как $\kappa = \hbar/m_{\text{He}}$, где m_{He} масса атома гелия.

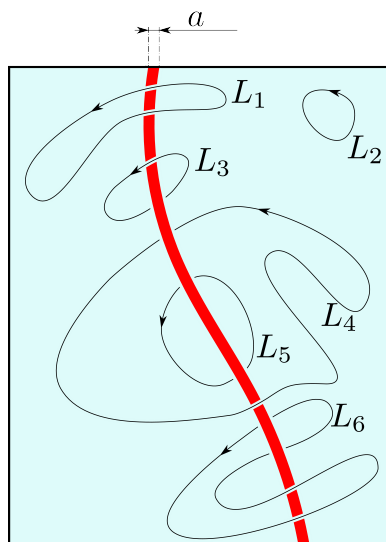


Fig. 1: Вихревая нить (красная линия) в сверхтекучей жидкости (светло голубой фон). Значение циркуляции вектора скорости вдоль траекторий L_1 , L_2 , L_5 и L_6 равно нулю, циркуляция вдоль L_3 и L_4 равна $\pm 2\pi\kappa$. Важно отметить, что циркуляции вектора скорости вдоль траекторий L_3 и L_4 имеют разные знаки.

Задание А. Покоящийся вихрь (0.75 балла).

Рассмотрим цилиндрический сосуд (радиусом $R_0 \gg a$) со сверхтекучим гелием и прямой вертикальной вихревой нитью в ее центре (рис. 2).

A.1 Нарисуйте линии тока. Найдите скорость v в точке с радиус-вектором \vec{r} . 0.25pt

A.2 Найдите форму свободной поверхности, которая образуется вокруг вихревой нити, т.е. зависимость высоты от расстояния до оси $z(\vec{r})$. Ускорение свободного падения g . Поверхностным натяжением можно пренебречь. 0.5pt

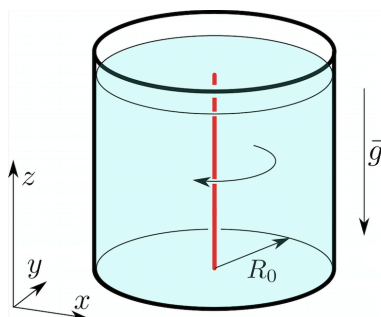


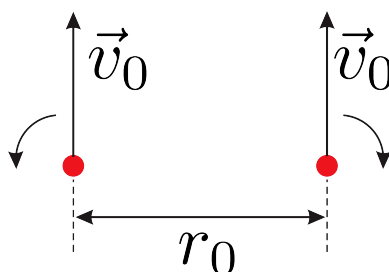
Рис. 2. Вихревая нить вдоль оси цилиндрического сосуда.



Задание В. Движущиеся вихри (1.4 балла).

Свободные вихри движутся в пространстве вместе с потоком². Другими словами, каждый элемент вихревой нити движется со скоростью \vec{v} , равной скорости жидкости, которая должна была быть на месте этого элемента.

Для примера, рассмотрим два вихря, вращающихся противоположно друг другу и расположенных на некотором заданном начальном расстоянии r_0 друг от друга (см. рис. 3). Каждый вихрь создает движение жидкости со скоростью $v_0 = \kappa/r_0$ в точке, в которой располагается ось другого вихря. В результате, эти два вихря движутся прямолинейно и с постоянной скоростью $v_0 = \kappa/r_0$, поэтому расстояние между ними не изменяется.



Параллельно движущиеся вихри с противоположной циркуляцией.

- | | |
|--|--------|
| <p>В.1 Рассмотрим два одинаковых вихря, которые вначале расположены на расстоянии r_0 друг от друга, как показано на рис. 4. Найдите начальные скорости вихрей и изобразите их траектории.</p> | 0.25pt |
|--|--------|

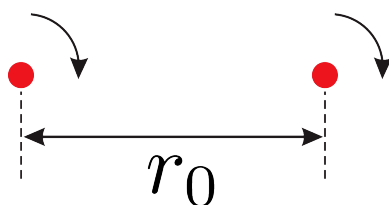


Рис. 4. Две параллельные вихревые нити с одинаковыми циркуляциями.

Цилиндрическая емкость с гелием (см. Задание А), заполнена треугольной решеткой ($u \ll R_0$) из одинаковых вертикальных вихревых нитей (см. рис. 5).

²Это является следствием закона сохранения импульса, см. следующий раздел

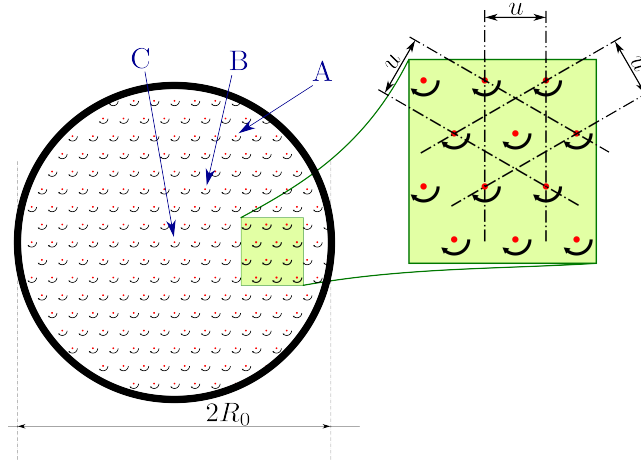


Рис. 5: Треугольная решетка вихрей в цилиндрическом сосуде. Вид сверху.

B.2	Нарисуйте траектории вихрей A, B и C (расположенного в центре).	0.15pt
B.3	Найдите скорость $v(\vec{r})$ вихря расположенного в точке с радиус-вектором \vec{r} .	0.4pt
B.4	Найдите зависимость расстояния $AB(t)$ между вихрями A и B от времени t . Считайте $AB(0)$ в начальный момент времени заданным.	0.35pt
B.5	Найдите сглаженную форму свободной поверхности гелия $z(\vec{r})$, не учитывая решетчатую структуру	0.25pt

Задание С. Импульс и энергия.

Поле скоростей в дальней зоне, т.е. расположенных на расстоянии намного большем, чем размер вихря дает основной вклад в энергию системы вихрей. Поэтому она нечувствительна к точной структуре вихревых нитей. Сама вихревая нить не может быть правильно описана макроскопической теорией, поэтому мы считаем, что возникающие сингулярности (бесконечности) несущественны. В действительности, величиной энергии внутри тонкой трубки с радиусом a вокруг вихревой нити можно пренебречь. Вне этой трубки плотность кинетической энергии сверхтекучей жидкости $\rho v^2/2$ (где $\rho = \text{const}$) подобна плотности энергии магнитного поля $B^2/(2\mu_0)$ — они обе квадратичны по соответствующим переменным. Эта аналогия вместе с соответствием между магнитным полем и скоростью сверхтекучей жидкости, а также вихревыми нитями и токами, облегчает расчет кинетической энергии для заданной системы. Например, для случая круговой проводочной петли с током радиусом R с радиусом провода a величина индуктивности $L \approx \mu_0 R \log(R/a)$, отсюда мы получаем энергию сверхтекучей вихревой петли (вихревого кольца)³

$$U \approx 2R\rho\pi^2\kappa^2 \log(R/a) \quad (3)$$

Полный импульс жидкости также определяется распределением скоростей в дальней зоне. Он получается интегрированием плотности импульса $\rho\vec{v}$. Снова рассмотрим поток, созданный вихре-

³Это выражение также справедливо, только если $\log R/a \gg 1$.



вым кольцом, расположенной в плоскости xy . Из соображений симметрии очевидно, что полный импульс имеет компоненту отличную от нуля только вдоль оси z :

$$P = \int \rho v_z dV = \rho \int \int \underbrace{\left(\int v_z dz \right)}_{q(x,y)} dx dy \quad (4)$$

Внутреннее интегрирование это интегрирование вдоль линий направленных параллельно оси z (см. Рис. 6). Из тождества (2) следует, что внутренний интеграл

$$q(x,y) = \int_{L(x,y)} \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (5)$$

может принимать только два значения, а именно ноль - для линий проходящих вне кольца и $2\pi\kappa$ для линий проходящих внутри кольца. Поэтому полный импульс равен

$$P = \rho \cdot \pi R^2 \cdot 2\pi\kappa = 2\pi^2 \rho R^2 \kappa \quad (6)$$

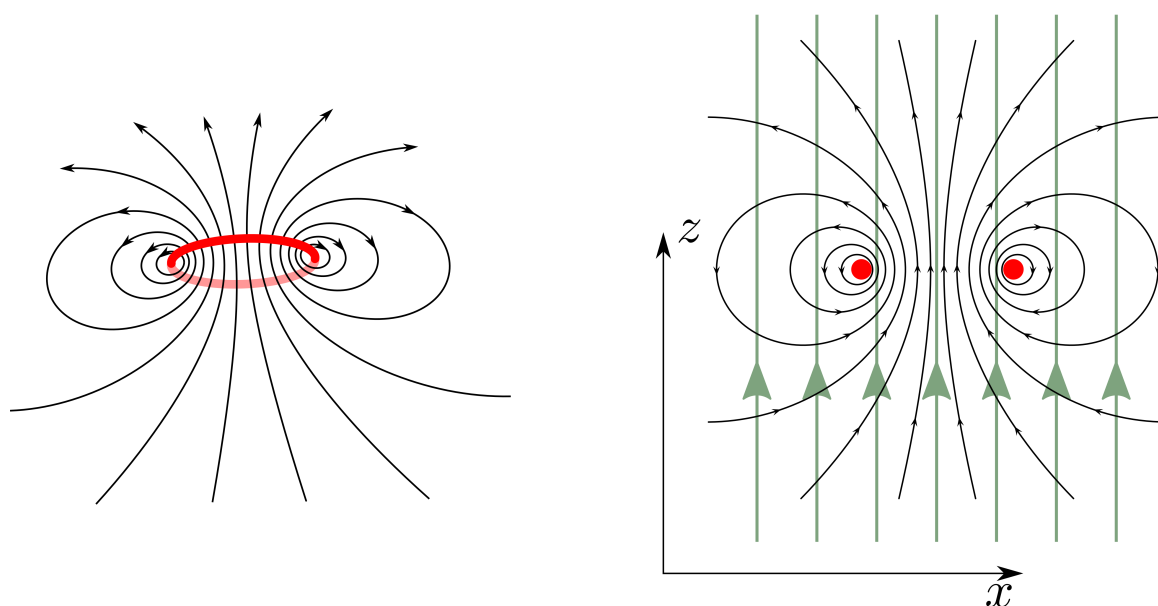


Рис. 6: Поле скоростей для вихревого кольца и линии интегрирования (обозначены зеленым цветом) для вычисления $q(x,y)$.

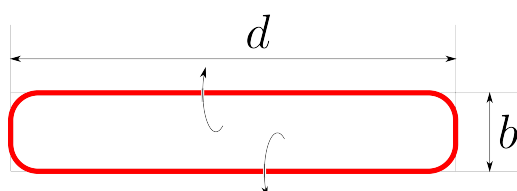


Fig. 7: Вихревая петля в форме близкой к прямоугольной, $b \ll d$.



C.1 Рассмотрим вихревую петлю в форме близкой к прямоугольнику с размерами $b \times d$, $b \ll d$, Рис. 7. Укажите направление ее полного импульса \vec{P} . Найдите величину полного импульса. 0.3pt

C.2 Найдите энергию этой петли U . 0.7pt

C.3 Предположим, что мы сдвинули длинную прямую вихревую нить на расстояние b в направлении оси x , см. Рис.8. Насколько изменился полный импульс жидкости? Укажите направление изменения полного импульса жидкости. Длина нити (ограниченная стенками сосуда) равна d . 0.75pt

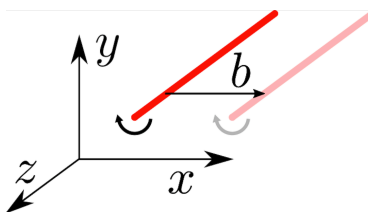


Рис. 8: Импульс изменяется всегда, когда вихрь смещается относительно жидкости.

Задание D. Захваченные заряды (2.85 балла)

Если электроны поместить в гелий, то они будут "захвачены" в вихревую нить. Здесь и далее пренебрегаем диэлектрической проницаемостью гелия ($\epsilon = 1$).

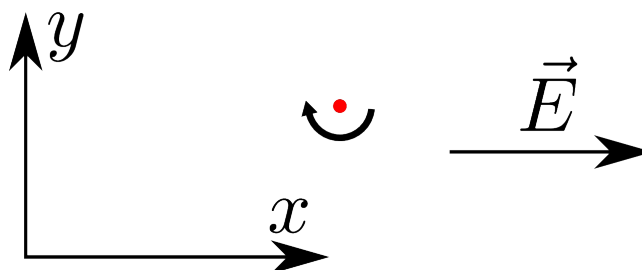


Fig. 9: Прямая вихревая нить в однородном электрическом поле.

D.1 Рассмотрим прямую вихревую нить, заряженную с постоянной линейной плотностью $\lambda < 0$ и помещенную в однородное электрическое поле \vec{E} . Изобразите траекторию движения нити. Найдите зависимость ее скорости от времени. 0.5pt

Вихревое кольцо радиуса R_0 , первоначально с однородно распределенным зарядом с линейной плотностью $\lambda < 0$ помещена в однородное электрическое поле \vec{E} перпендикулярное к ее плоскости и направленное противоположно вектору полного импульса \vec{P}_0 .

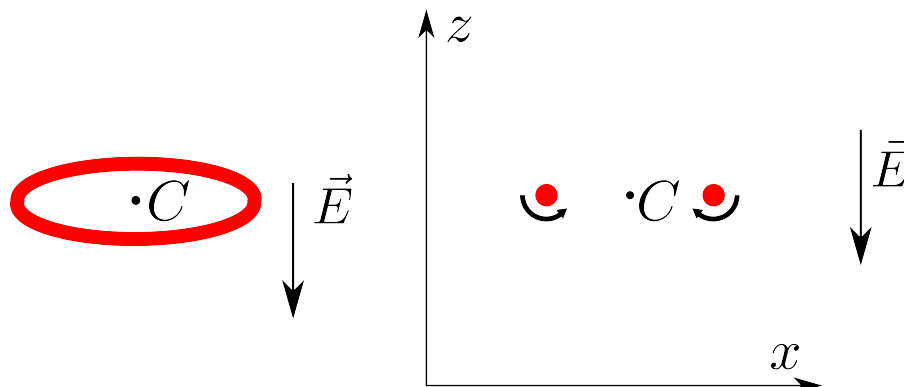


Рис. 10: (слева) Вихревое кольцо в однородном электрическом поле. (справа) Поперечное сечение кольца.

D.2 Нарисуйте траекторию движения центра вихревого кольца C . Найдите зависимость радиуса кольца от времени. 0.6pt

D.3 Найдите зависимость скорости центра кольца $v(t)$ от времени. 1.5pt

D.4 В некоторый момент времени t^* , когда скорость достигает значения $v^* = v(t^*)$, электрическое поле выключают. Найдите скорость $v(t)$ вихревого кольца в моменты времени $t > t^*$. 0.25pt

Задание Е. Влияние границ (3.25 балла)

Твердые стенки изменяют поле скоростей, создаваемое вихревой нитью, потому что жидкость не может протекать сквозь них. Математически это означает, что составляющая скорости, направленная перпендикулярно к стенке, обращается в ноль на ее поверхности.

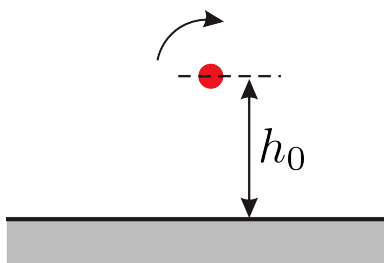


Рис. 11: Прямолинейная вихревая нить возле плоской стены.

E.1 Нарисуйте траекторию прямолинейного вихря, первоначально расположенного на расстоянии h_0 от плоской стены. Найдите зависимость скорости от времени. 0.5pt

Рассмотрим прямолинейный вихрь расположенный в углу на расстоянии h_0 от обеих плоских стенок.

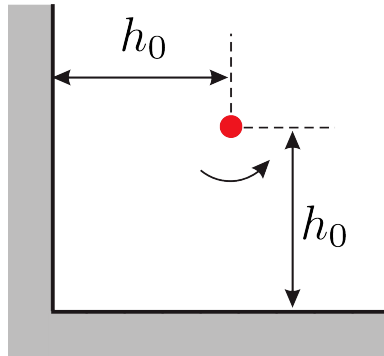


Рис. 12: Прямолинейная вихревая нить в углу.

E.2	Чему равна начальная скорость v_0 вихря?	0.75pt
E.3	Изобразите траекторию вихря.	0.5pt
E.4	Чему равна скорость вихря v_∞ спустя очень большой промежуток времени?	1.5pt

Эволюция системы бинарных сверхмассивных черных дыр

Введение

Идея о существовании гравитационных волн является одним из самых удивительных предсказаний общей теории относительности Эйнштейна. Гравитационные волны - это пространственно-временное возмущение, распространяющееся подобно электромагнитным волнам со скоростью света. Прямое обнаружение гравитационных волн - невероятно сложная задача, однако 14 сентября 2015 года первый сигнал был обнаружен при сотрудничестве LIGO и VIRGO.

Гравитационные волны излучаются при быстром движении массивных объектов. Наиболее мощным источником гравитационных волн является событие слияния двух сверхмассивных черных дыр (далее - СЧД). Черные дыры, предсказанные общей теорией относительности, представляют собой чрезвычайно компактные объекты, массы которых могут быть очень большими. Другие особые свойства черных дыр в решении данной задачи не понадобятся.

В общепринятой теории эволюции галактик предполагается, что в центре галактики находится сверхмассивная черная дыра, обладающая массой, порядка $10^5 - 10^9$ масс Солнца. Галактиками называются звездные системы, содержащие $10^{10} - 10^{11}$ звезд. В процессе эволюции две галактики могут столкнуться и слиться в одну. Что же произойдет с двумя сверхмассивными черными дырами, первоначально находившимися в их центрах? Можно выделить *три основных этапа* эволюции системы, состоящей из двух сверхмассивных черных дыр. На каждом из трех этапов СЧД сближаются, хотя физические явления, лежащие в основе этих процессов, различны. Каждый из этих трех этапов будет изучен нами в первых трех заданиях. В четвертом задании мы будем использовать полученные ранее соотношения для расчета полного времени эволюции системы бинарных СЧД.

В конце процесса эволюции две сверхмассивные черные дыры сближаются и сливаются в одну черную дыру. Процесс слияния длится около часа и сопровождается мощным импульсом гравитационного излучения. Будущие обсерватории, такие как LISA, смогут задетектировать это излучение. Тем не менее, исследования эволюции сверхмассивных черных дыр ведутся уже сейчас, на заре эры астрономии гравитационных волн.

Общая информация

1. Выражайте все расстояния в парсеках (pc), а временные интервалы в гига годах (Gy). Мы будем использовать массу Солнца (M_S) в качестве единицы массы. Возможно, вам понадобятся следующие табличные значения:

$$1 \text{ pc} = 3.1 \times 10^{16} \text{ m},$$

$$M_s = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg},$$

$$t_H = 13.7 \text{ Gy}, \text{ возраст Вселенной},$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \times \text{m}^2/\text{kg}^2,$$

$$c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

2. Когда мы пишем слово **«оцените»**, мы не требуем от вас точного ответа. Достаточно получить результат, который отличается от истинного не более, чем в 10 раз. Когда мы пишем **«найдите»**, мы подразумеваем точный ответ. Слово **«вычислите»** предполагают численный ответ.

3. В течение всей задачи будем считать, что все звезды в галактике имеют одинаковую массу $m = M_S$.

4. На протяжении всей задачи эффектами общей теории относительности можно пренебречь, за исключением явления излучения гравитационных волн. Все звезды и черные дыры будем считать



точечными телами, которые подчиняются законам Ньютоновской гравитации.

Задание А. Динамическое трение (1.6 балла)

В этом задании мы будем изучать упрощенную модель галактики. Вы можете не учитывать скорости звезд в галактике и считать концентрацию звезд n постоянной. R - характерный размер галактики. Концентрация звезд достаточно мала, поэтому столкновения звезд происходят чрезвычайно редко, и ими можно пренебречь. Рассмотрим сверхмассивную черную дыру с массой $M \gg m$, движущуюся со скоростью v через галактику. Удивительно, но средняя сила взаимодействия черной дыры со звездами отлична от нуля. По этой причине данная сила замедляет движение черной дыры и называется силой динамического трения. Это задание посвящено определению силы динамического трения.

- A.1** Перейдем в систему отсчета, связанную со сверхмассивной черной дырой. 0.75pt
 Рассмотрим движение одной звезды с прицельным параметром b (рис.1). Будем предполагать, что

$$b \gg b_1 = \frac{GM}{v^2}. \quad (1)$$

Угловое отклонение звезды равно $\alpha = kb_1/b$, где k - некоторый коэффициент. **Найдите** значение k . Если вы не можете найти значение k , примите $k = 1$ в дальнейшем.

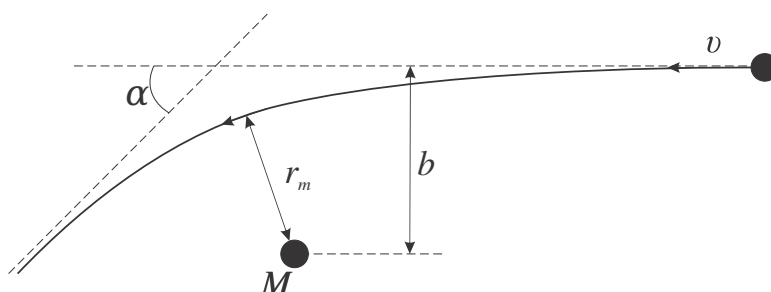


Рис. 1: Отклонение звезды при взаимодействии со сверхмассивной черной дырой массой M . b - прицельный параметр, r_m - минимальное расстояние между звездой и черной дырой.

- A.2** Пусть ось Ox направлена вдоль скорости черной дыры. **Найдите** проекцию на ось Ox импульса Δp_x , переданную звездой черной дыре. 0.25pt

- A.3** **Оцените** среднюю силу F_{DF} , действующую на черную дыру, путем усреднения по прицельному параметру b . Вкладом звезд с прицельными параметрами $b < b_1$ можно пренебречь. Предполагается, что черная дыра находится в центральной части галактики. Выразите F_{DF} через M , v , R , G , и плотность звезд $\rho = mn$. 0.4pt



- A.4** Полученное в предыдущей задаче выражение для F_{DF} содержит множитель $\log R/b_1$, который далее мы будем обозначать как $\log \Lambda$. **Вычислите** значение $\log \Lambda$ для $M = 10^8 M_S$, $R = 20 \text{ kpc} = 20 \times 10^3 \text{ pc}$ и скорости $v = 200 \text{ km/s}$. 0.2pt



Задание В. "Гравитационная рогатка"

В этом задании мы рассмотрим систему двух сверхмассивных черных дыр с равными массами $M \gg m$, расположенными в центре галактики. Будем называть эту систему **бинарной системой сверхмассивных черных дыр** (или просто **бинарной системой**). Будем считать, что вблизи бинарной системы нет звезд, каждая сверхмассивная черная дыра имеет круговую орбиту радиуса a в гравитационном поле другой сверхмассивной черной дыры.

В.1 Найдите орбитальную скорость v_{bin} каждой чёрной дыры. Найдите полную энергию E бинарной системы. Выразите их через a , G и M . 0.25pt

На расстояниях от бинарных систем намного больших, чем a , находится большое количество звезд. Звезды движутся по сложным и разнообразным траекториям в гравитационном поле всей галактики. Подобно движению молекул в идеальном газе, движение звезд можно считать хаотическим. Предположим, что скорости звезд имеют равные величины $\sigma \ll v_{bin}$, а средняя плотность звезд равна ρ . В этом случае динамическое трение больше не влияет на бинарную систему, и потери энергии будут вызваны другим явлением.

В.2 Решим вспомогательную задачу. Пусть звезда массой m движется по направлению к точечной массе $M_2 \gg m$, находящейся в состоянии покоя. r_m - минимальное расстояние между звездой и точечной массой в процессе движения. σ - скорость звезды на большом расстоянии от M_2 . Найдите точное значение прицельного параметра b . 0.5pt

Если звезда приближается к бинарной системе на расстояние около a , она участвует в сложном трехчастичном взаимодействии с бинарной системой, что почти всегда приводит к тому, что звезда вылетает со скоростью порядка v_{bin} (скорость звезды на большом расстоянии после взаимодействия). Такое "сильное" взаимодействие мы назовем столкновением звезды с бинарной системой. Ускорение и выброс звезды после столкновения называется **«гравитационной рогаткой»**.

В.3 Оцените характерное время Δt между двумя последовательными соударениями бинарной системы со звездами. Учтите, что $\sigma \ll v_{bin}$. 1.0pt

В.4 Оцените скорость потерь энергии бинарной системы dE/dt . Оцените скорость изменения радиуса da/dt . Выразите её через a , ρ , σ , G . 0.25pt

В.5 Пусть a_1 - начальный радиус системы. Оцените время T_{SS} , за которое радиус уменьшается в 2 раза за счёт "гравитационной рогатки". Вычислите T_{SS} при $\sigma = 200 \text{ km/s}$, $a_1 = 1 \text{ pc}$, $\rho = 10^4 M_S/\text{pc}^3$. 1.0pt



Задание С. Излучение гравитационных волн (1 балл)

В этом задании мы будем изучать бинарную систему с равными массами, которая никак не взаимодействует со звездами. Даже в этом случае система теряет энергию из-за излучения гравитационных волн. Скорость потерь энергии из-за гравитационных волн равна

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1024}{5} \frac{G}{c^5} (\omega^3 I)^2, \quad (2)$$

где ω - угловая скорость бинарной системы, $I = 2Ma^2$ - квадрупольный момент системы.

С.1 **Найдите** скорость изменения радиуса бинарной системы da/dt за счет излучения гравитационных волн. 0.2pt

Когда радиус a орбиты бинарной системы становится близким к гравитационному радиусу черной дыры:

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}, \quad (3)$$

две черные дыры быстро сливаются.

С.2 Обозначим начальный радиус системы как $a_2 \gg r_g$. **Оцените** время T_{GW} , за которое бинарная система сжимается до радиуса r_g за счет излучения гравитационных волн. Выразите T_{GW} через a_2 , M , c и G . 0.7pt

С.3 **Вычислите** начальный радиус a_H бинарной системы с равными массами $M = 10^8 M_\odot$, время слияния которой равно возрасту Вселенной: $T_{GW} = t_H$. 0.1pt



Задание D. Полная эволюция (4.4 балла)

В этой части мы будем использовать результаты, полученные ранее. Рассмотрим **реальную** астрофизическую ситуацию. Две галактики, имеющие в своих центрах сверхмассивные черные дыры с массами $M = 10^8 M_S$, сливаются в новую звездную систему. Пусть новая галактика будет сферически симметричной с радиусом $R = 20 \text{ кpc} = 20 \times 10^3 \text{ pc}$. Предположим, что звездная плотность зависит от радиуса r от центра галактики по закону

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{4\pi G r^2}, \quad (4)$$

где $\sigma = 200 \text{ km/s}$.

- D.1** Пусть тело движется по круговой орбите радиусом $a < R$ в гравитационном поле звезд. Пренебрегая силой динамического трения, **найдите** скорость v тела. 0.25pt

Сразу же после слияния галактик две сверхмассивные черные дыры имеют произвольные положения внутри новой галактики и не влияют друг на друга. Давайте рассмотрим одну из черных дыр. Будем считать, что она движется по круговой орбите радиусом $a < R$ вокруг центра галактики и медленно теряет энергию из-за динамического трения.

- D.2** **Оцените** скорость изменения радиуса орбиты da/dt . В части А мы считали все звезды неподвижными. Хотя в реальной галактике звезды движутся, не все из них имеют одинаковые скорости σ . Скорости звезд совпадают с σ только по порядку величины, так же как и скорости черных дыр относительно звезд. Поэтому вы можете использовать результат, полученный в А.3 для оценки. Используйте выражение для плотности $\rho(r)$ из уравнения (4). Используйте значение $\log \Lambda$, вычисленное в А.4. 0.75pt

Через некоторое время две черные дыры приблизятся к центру галактики. Пусть они движутся по круговой орбите радиуса a вокруг центра галактики в гравитационном поле звезд.

- D.3** **Оцените** критический радиус a_1 при котором гравитационное взаимодействие между двумя черными дырами уже не пренебрежимо мало. **Вычислите** его. Будем говорить, что в этот момент две черные дыры образуют бинарную систему (рис.2). 0.3pt

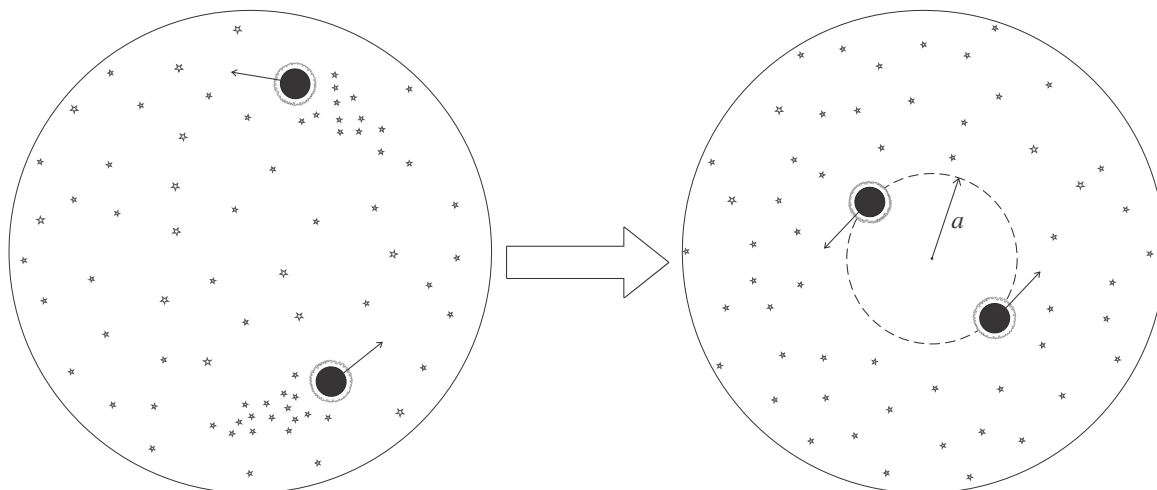


Рис. 2: Эволюция сверхмассивных черных дыр: до и после образования бинарной системы.

- D.4** Предположим, что после слияния галактик две чёрные дыры находились на расстоянии $a_0 = 2 \text{ кpc} = 2 \times 10^3 \text{ pc}$ от центра галактики. Из-за динамического трения образуется бинарная система. **Вычислите** время T_1 , которое требуется для образования бинарной системы. 0.75pt

После образования бинарной системы две чёрные дыры быстро выбрасывают все звезды от центра галактики и останутся там вдвоем. С этого момента динамическое трение становится не эффективным и бинарная система начинает терять энергию за счёт "эффекта рогатки". Будем считать скорости вращения звезд равными σ , а звездную плотность $\rho_1 = \rho(a_1)$ из уравнения (4). "Эффект рогатки" значительно уменьшает радиус системы, и через некоторое время система начинает терять энергию в основном из-за излучения гравитационных волн.

- D.5** Когда радиус бинарной системы меньше некоторого значения $a < a_2$ п 0.3pt

- D.6** **Оцените** время T_2 , за которое радиус бинарной системы изменяется от значения a_1 до значения a_2 (стадия "рогатки"). **Оцените** время T_3 , за которое радиус бинарной системы уменьшается от a_2 почти до нуля (стадия испускания гравитационных волн). 1.75pt

- D.7** Для параметров, приведенных выше, **вычислите** общее время эволюции T_{ev} от слияния галактик до слияния черных дыр. 0.3pt

Историческое замечание. Долгое время астрофизики думали, что эволюция слияния черных дыр останавливается на стадии рогатки, с того момента как бинарная система выбила все звезды с небольшими прицельными параметрами, которые могли бы столкнуться с ней. Казалось, что две черные дыры никогда не сольются. Этот факт был назван **проблемой последнего парсека**.

Реальные галактики имеют сложные асимметричные формы. Несколько лет назад было обнаружено, что в галактиках сложных форм звезды с малыми параметрами удара появляются снова и снова. Бинарная СЧД продолжает терять энергию, но медленнее, чем дает наша оценка. Проблема последнего парсека была успешно решена.



Космический мусор

Введение

За более чем полувековую историю освоения космоса, вокруг Земли скопилось огромное количество космического мусора, состоящего из нефункционирующих спутников, использованных верхних ступеней ракет и прочих объектов, не выполняющих никаких полезных функций. Для очистки орбит от космического мусора в настоящее время планируют специальные миссии. Предполагается, что специальные аппараты - космические буксиры - захватывают крупные объекты космического мусора и сводят их в плотные слои атмосферы или на специальные орбиты-захоронения. Однако перед тем, как отправлять буксир для захвата космического мусора, важно понимать вращательную динамику этих объектов на орбите.

В данной задаче вам предстоит спланировать подобную миссию по очистке орбит от ненужных объектов, анализируя различные факторы влияющие на изменение параметров их движения .

Описание использованной ступени ракеты

В данной задаче в качестве крупного объекта космического мусора будет рассмотрена использованная верхняя ступень ракеты, схематично показанная на Рис. 1. Круговой линией схематически показан сферический топливный бак ракеты.

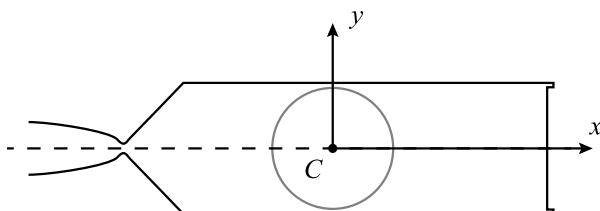


Рис. 1: Верхняя ступень ракеты Kerbodyne-42

Введем систему координат Cxy , связанную со ступенью ракеты, как показано на (Рис. 1), с началом в центре масс C . Ось x совпадает с осью симметрии объекта, а ось y перпендикулярна к оси x . Моменты инерции объекта относительно этих осей x и y являются известными величинами J_x и J_y ($J_x < J_y$).

Задание А. Вращение (3.8 балла)

Рассмотрим движение ступени с моментом импульса L , который составляет угол θ с осью симметрии (Рис. 2). В данном пункте будем считать, что топливный бак пуст, и никакие внешние силы или моменты сил на ступень не действуют.

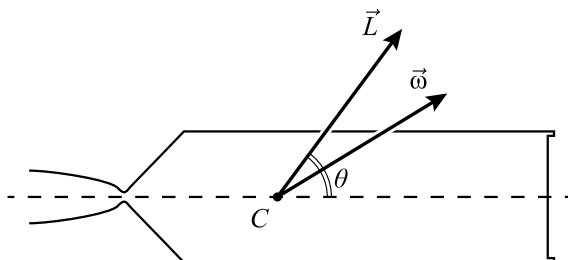


Рис. 2: Вращение ступени ракеты

A.1 Найдите проекции угловой скорости объекта $\vec{\omega}$ на оси x и y , используя тот факт, что момент импульса записывается как $\vec{L} = J_x \omega_x \vec{e}_x + J_y \omega_y \vec{e}_y$, где \vec{e}_x и \vec{e}_y - единичные векторы осей x и y . Ответ выразите через $L = |\vec{L}|$, угол θ , и моменты инерции J_x, J_y . 0.2pt

A.2 Найдите кинетическую энергию E_x вращения ступени с угловой скоростью ω_x . Найдите кинетическую энергию E_y вращения ступени с угловой скоростью ω_y . Найдите полную кинетическую энергию вращательного движения ступени $E = E_x + E_y$ как функцию ее момента импульса L и $\cos \theta$. 0.4pt

В последующих подпунктах задания А считайте, что ступень свободно вращается с начальным моментом импульса L и начальным углом $\theta(0) = \theta_0$.

A.3 Пусть ось x_0 - начальное положение оси симметрии Cx ступени относительно некоторой инерциальной системы отсчета. Используя законы сохранения, найдите максимальный угол ψ , между осью симметрии Cx ступени и её первоначальным направлением x_0 в течение свободного вращения объекта. 1.2pt
Примечание: Вектор момента импульса ступени сохраняется, так как на ступень не действуют никакие внешние моменты сил.

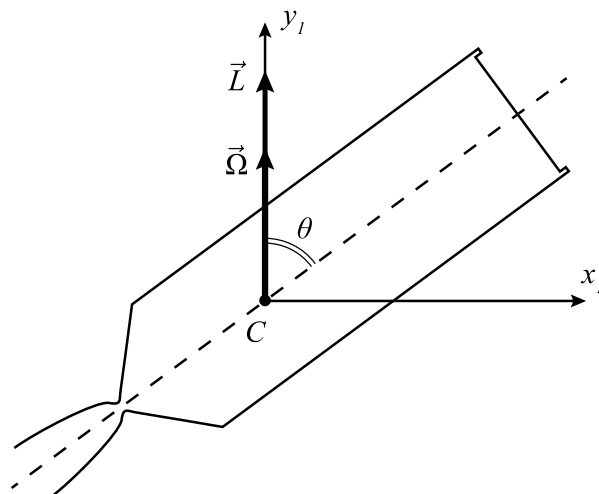


Рис. 3: Прецессия

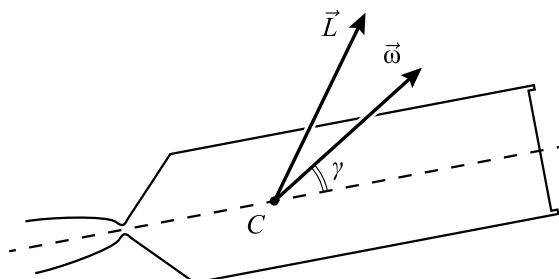
Рассмотрим систему отсчета $Cx_1y_1z_1$, ось y_1 которой сонаправлена с постоянным вектором момента импульса \vec{L} (Рис. 3). Система $Cx_1y_1z_1$ вращается вокруг оси y_1 так, что ось симметрии ступени ракеты все время остается в плоскости Cx_1y_1 .

- A.4** Пусть даны значения L , $\theta(0) = \theta_0$ и моментов инерции J_x, J_y . Найдите как функции времени угловую скорость вращения $\Omega(t)$ системы отсчета Cx_1y_1 вокруг оси y_1 , а также направление и величину угловой скорости ступени $\vec{\omega}_s(t)$ относительно системы отсчета Cx_1y_1 . Ответ для направления $\vec{\omega}_s(t)$ приведите через угол $\gamma_s(t)$, который $\vec{\omega}_s(t)$ составляет с осью Cx .
Примечание: Вектор угловой скорости может быть представлен в виде суммы $\vec{\omega} = \vec{\omega}_x + \vec{\omega}_y = \vec{\Omega} + \vec{\omega}_s$. 2.0pt

Задание В. Переходный процесс (1.2 балла)

Большая часть топлива сжигается во время подъема ракеты, однако, после отсоединения от ступени полезной нагрузки в топливном баке остается неизрасходованное жидкое топливо. Масса m остатков жидкого топлива мала по сравнению с массой M ступени ракеты. Движение жидкого топлива в баке и соответствующие силы вязкого трения между топливом и стенками бака приводят к потерям энергии. В результате переходного процесса через некоторое время энергия достигает своего минимума.

- B.1** Считая известными начальные значения момента импульса L и угла $\theta(0) = \theta_1 \in (0, \pi/2)$, найдите значение θ_2 угла θ в конце переходного процесса. 0.6pt



Угол между вектором угловой скорости ступени и ее осью симметрии

- В.2** Пусть в начальный момент времени угловая скорость $\omega(0) = \omega_1 = 1 \text{ rad/s}$ составляет угол $\gamma(0) = \gamma_1 = 30^\circ$ с осью симметрии ступени. Вычислите значение ω_2 угловой скорости ω после прохождения переходного процесса. Моменты инерции ступени равны $J_x = 4200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ и $J_y = 15\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. 0.6pt

Задание С. Магнитное поле (5.0 баллов)

Ещё один важный фактор для вращательной динамики рассматриваемых объектов - взаимодействие с магнитным полем Земли. Для начала решим вспомогательную задачу.

Момент сил, обусловленный вихревыми токами

Рассмотрим тонкостенную немагнитную сферическую оболочку с толщиной стенок D и радиусом R , помещенную в однородное магнитное поле \vec{B} . Поле \vec{B} меняется медленно, а производная по времени $\dot{\vec{B}}$ (\vec{B} "с точкой") есть постоянный вектор, составляющий угол α с направлением вектора \vec{B} (Рис. 4). Удельное сопротивление материала сферической оболочки равно ρ .

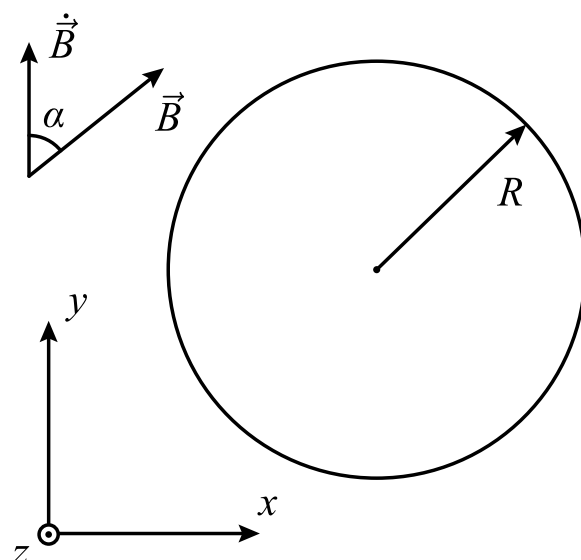


Рис. 4: Сферическая оболочка в магнитном поле

C.1 Пренебрегая явлением самоиндукции, найдите магнитный момент $\vec{\mu}$ сферической оболочки. 1.0pt
 Приведите ответ для вектора $\vec{\mu}$ в виде проекций на оси xyz , показанных на Рис. 4.

C.2 Найдите момент сил \vec{M} , действующий на сферическую оболочку. Приведите ответ для вектора \vec{M} в виде проекций на оси xyz , показанные на Рис. 4. 0.3pt

Эволюция вращательного движения в магнитном поле Земли

Давайте выясним, как изменяется вращение ступени, движущейся по круговой полярной орбите с периодом обращения $T = 100$ min (Рис. 5). Будем считать, что характерное время переходного процесса много меньше, чем характерные времена процессов изменения динамики ступени вследствие взаимодействия с геомагнитным полем. Рассмотрим, что происходит после завершения переходных процессов. Положим, что в начальный момент времени ступень вращается с угловой скоростью ω_2 вокруг оси, перпендикулярной к плоскости орбиты.

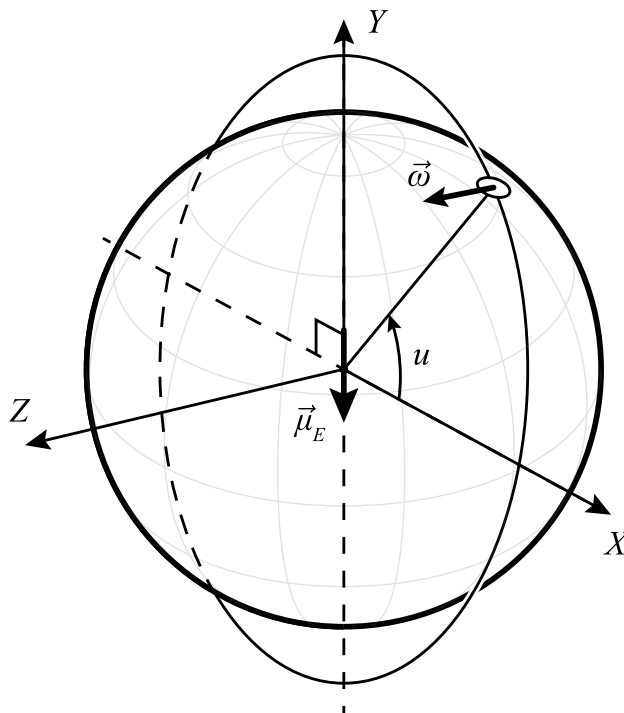


Рис. 5: Орбита ступени

- С.3** Магнитное поле Земли \vec{B}_E можно считать полем точечного диполя, помещенного в центр Земли. Дипольный момент равен $\vec{\mu}_E$ и направлен противоположно оси Y . Величина магнитного поля B в точке, где орбита ступени пересекает экваториальную плоскость XZ , равна $B_0 = 20 \mu T$. Найдите магнитное поле $\vec{B}_E(u)$ в точке орбиты, характеризуемой углом u , как показано на Рис. 5. Положительное направление отсчета угла u совпадает с направлением движения по орбите. Ответ представьте в виде проекций $\vec{B}_E(u)$ на оси XYZ . 0.4pt

Примечание: Для последующих вычислений может оказаться полезным, если проекции магнитного поля $\vec{B}_E(u)$ выразить как функции от $2u$ вместо функций от u .

Магнитное поле диполя в точке, заданной вектором \vec{r} можно записать как

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{\mu} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{\mu}}{r^3} \right). \quad (1)$$

Считайте что ступень ракеты сделана в основном из дерева, за исключением топливного бака, выполненного из проводящего материала. Тогда взаимодействие ступени ракеты с геомагнитным полем может быть смоделировано как взаимодействие лишь со сферической оболочкой. Толщина стенок оболочки $D = 2 \text{ mm}$, радиус $R = 4 \text{ m}$ и удельное сопротивление $\rho = 2.7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$.

- С.4** Найдите момент сил $\vec{M}(u)$, действующих на ступень, которая вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости орбиты. Угловая скорость вращения ступени равна ω , она коллинеарна оси Z . Ответ для $\vec{M}(u)$ приведите в виде проекций на оси XYZ . 1.3pt



C.5 Считая изменение угловой скорости ступени за один период обращения по орбите пренебрежимо малым, найдите зависимость модуля угловой скорости $\omega(t)$ от времени. 1.0pt

C.6 Найдите отношение периода орбитального движения T к периоду вращения ступени ракеты T_s в установившемся режиме, спустя очень большой промежуток времени. 1.0pt