

Механика деформируемой структуры

(20 баллов)

В этой задаче мы исследуем деформируемую структуру в поле тяжести. Структуру можно считать физическим маятником, у которого только одна степень свободы (т.е. **существует только один способ деформировать его**, и его положение полностью определяется углом α). Джеймс Максвелл исследовал подобные структуры в XIX веке, а недавно было открыто их необычное поведение.

На рисунке 1 показаны N^2 одинаковых **равносторонних** треугольных пластинок (красные треугольники), которые шарнирно соединены друг с другом одинаковыми стержнями. Таким образом, система представляет собой решетку размером $N \times N$ ($N > 1$). Шарниры в вершинах треугольников обозначены маленькими кружками. **Длина стороны треугольника равна длине стержня и равна l .**

Пунктирными линиями обозначены четыре трубки. **Вдоль каждой из трубок могут скользить N вершин (серые кружки), т.е. трубку можно рассматривать, как направляющий стержень.** Четыре трубки шарнирно соединены в ромб так, что его углы зафиксированы: два из них 60° , а два других — 120° (см. Рис. 1).

Все пластинки однородны, и масса каждой из них равна M . Остальные части системы невесомы. Положение системы однозначно определяется углом α , где $0^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$. На рисунке 1 приведены примеры положений для различных углов α .

Система расположена вертикально (как занавес), а верхняя трубка может двигаться только в горизонтальном направлении.

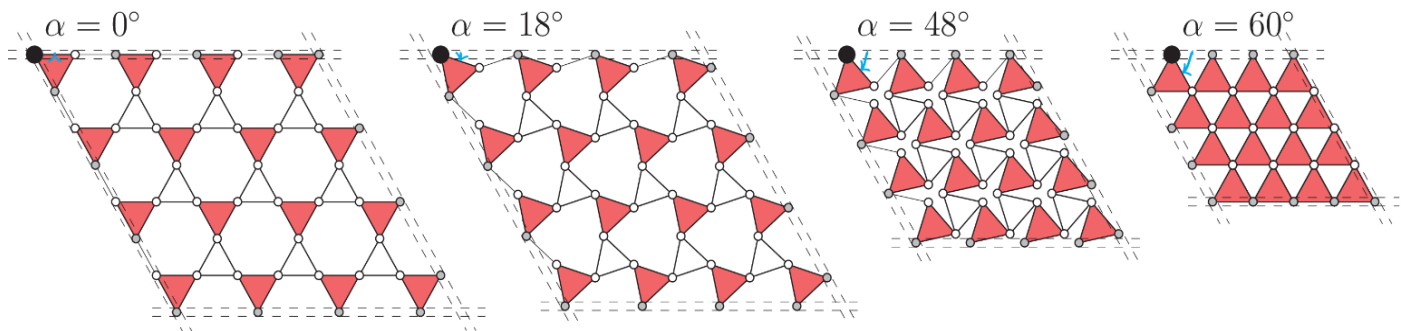


Рис. 1

Система координат приведена на рисунке 2. Нулевой уровень потенциальной энергии выбран при $y = 0$. Треугольная пластинка обозначается парой индексов (m, n) , где $m, n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, что задает их нумерацию в направлениях x и y соответственно. $A(m, n)$, $B(m, n)$ и $C(m, n)$ обозначают положения трех вершин треугольника (m, n) . Верхняя левая вершина $A(0, 0)$ неподвижна.

Движение системы происходит только в плоскости xu . Момент инерции однородной равносторонней треугольной пластинки относительно ее центра масс равен $I = Ml^2/12$. Ускорение свободного падения — g .

Для кинетической и потенциальной энергии используйте обозначения E_k и E_p соответственно.

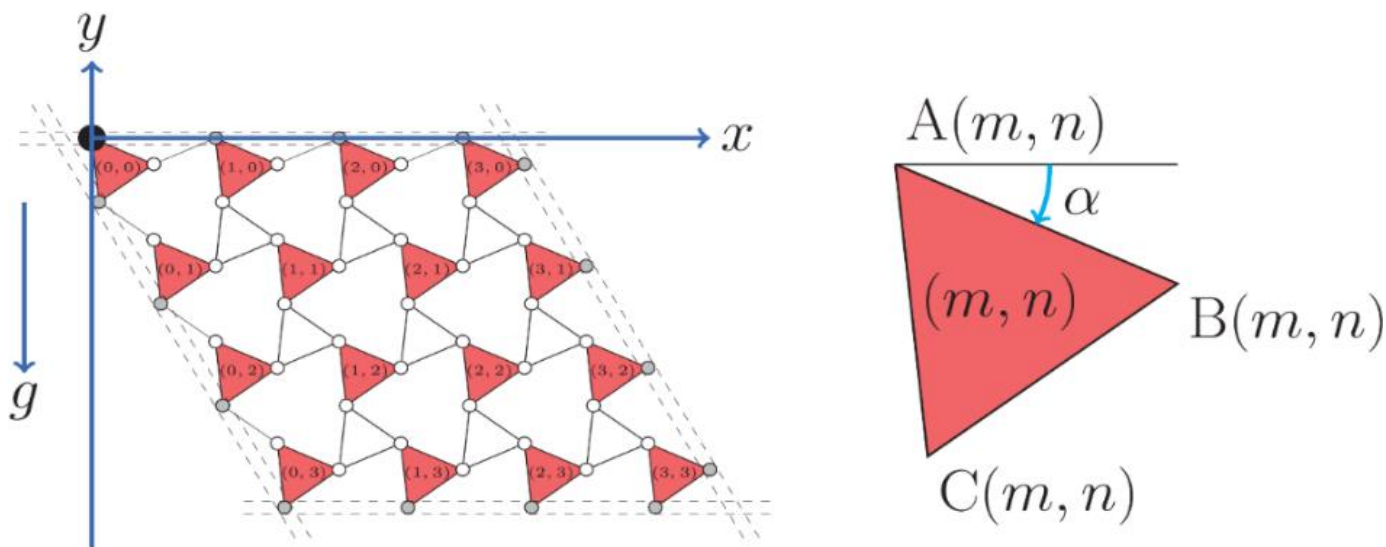


Рис. 2

Часть А

Рассмотрите случай $N = 2$ (см. Рис. 3).

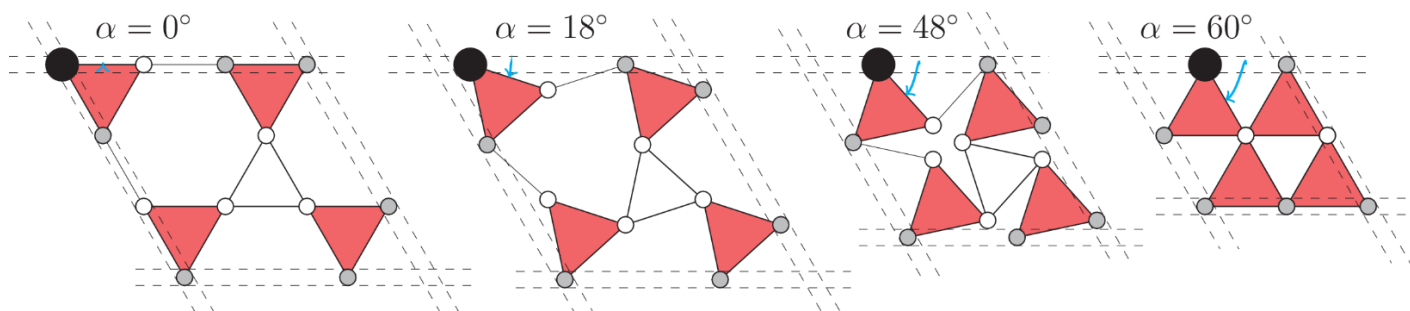


Рис. 3

A1	Чему равна потенциальная энергия системы E_p для произвольного угла α при $N = 2$?	2 б.
A2	Чему равен угол α_E , при котором система находится в равновесии в поле тяжести (при $N = 2$)?	1 б.
A3	Система может совершать малые гармонические колебания вблизи положения равновесия. Рассчитайте кинетическую энергию этой системы. Рассчитайте частоту малых колебаний f_E при $N = 2$.	5 б.

Часть В

Рассмотрите систему при произвольном N .

B1	Чему равен угол α'_E , при котором система находится в равновесии в поле тяжести (при произвольном N)?	3 б.
B2	Рассмотрите случай $N \rightarrow \infty$. При небольшом изменении угла α изменение потенциальной энергии системы может быть представлено как $\Delta E_p \propto N^{\gamma_1}$, кинетическая энергия системы — $E_k \propto N^{\gamma_2}$ и частота малых колебаний — $f'_E \propto N^{\gamma_3}$. Найдите значения γ_1, γ_2 и γ_3 .	3 б.

Часть С

Систему удерживают в положении с $\alpha_m = 60^\circ$. Для этого на одну из $3N^2$ вершин действуют некоторой силой.

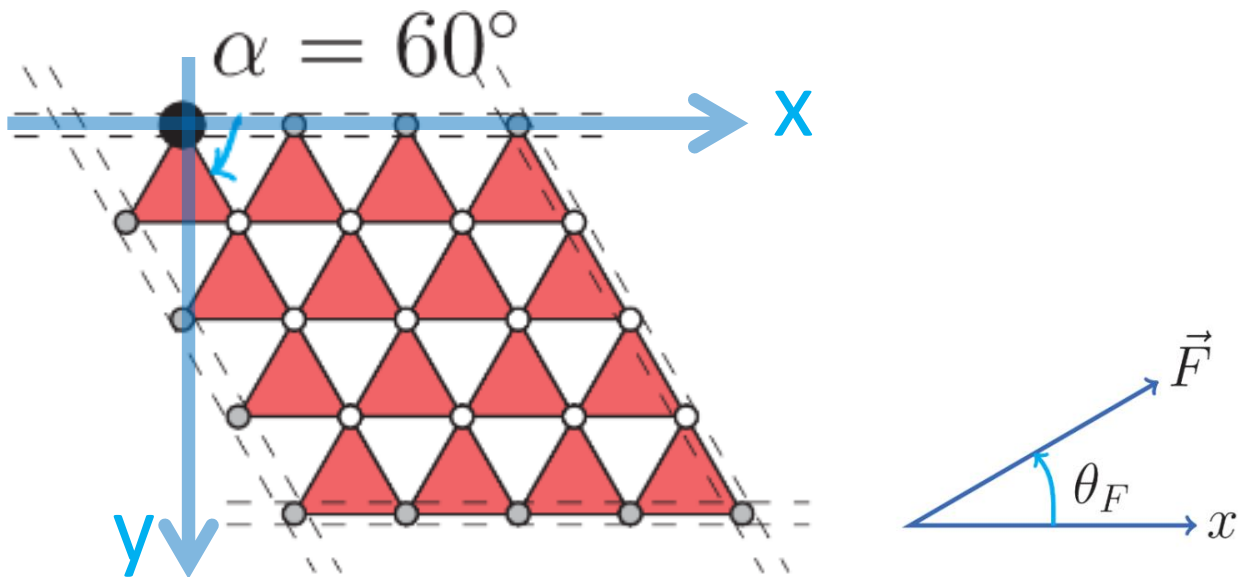


Рис. 4

C1	Какую вершину нужно выбрать, чтобы эта сила была минимальной?	1 б.
C2	Чему равен модуль этой минимальной силы, и каково ее направление? Укажите это направление с помощью угла θ_F , который определен так, как показано на рисунке 4.	5 б.

Расширяющаяся Вселенная (Всего баллов:20)

Самый выдающийся факт в космологии состоит в том, что Вселенная расширяется. Пространство непрерывно создается. Расширение пространства означает, что при расширении Вселенной расстояние между объектами увеличивается. Удобно пользоваться т.н. «расширяющейся» системой координат $\vec{r} = (x, y, z)$ в которой расстояние $\Delta r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ между объектами 1 и 2 не изменяется. (Мы полагаем, что объекты не участвуют в других движениях, помимо движения, связанного с расширением Вселенной). Сказанное проиллюстрировано на рисунках внизу (изображения, разумеется, двухмерные, хотя Вселенная имеет три измерения).

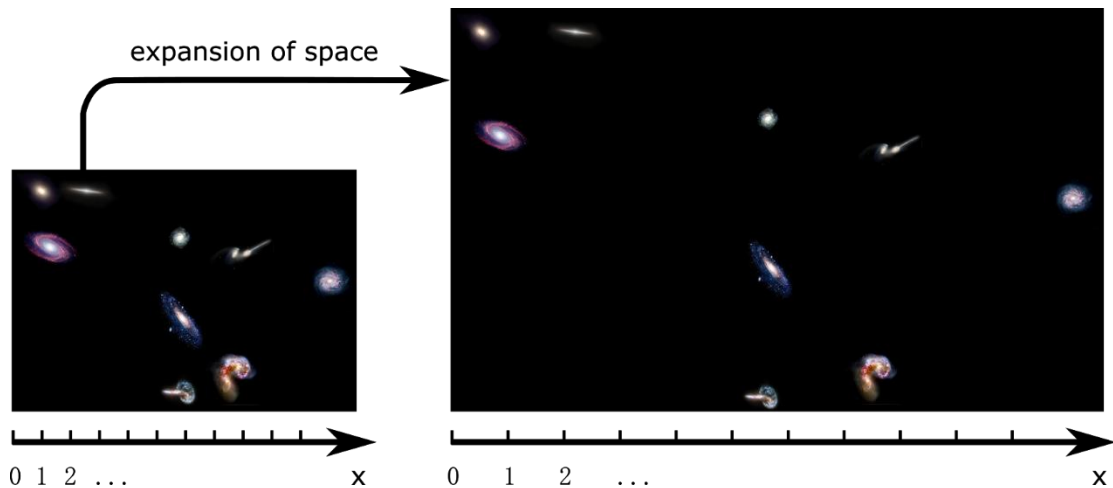


Рисунок. *Expansion of space – расширение пространства.*

Современная космологическая теория базируется на общей теории относительности Эйнштейна. Однако, при соответствующих допущениях, также возможно упрощенное рассмотрение на основе Ньютонской теории гравитации. В последующих заданиях мы будем работать в рамках Ньютонской теории.

Для измерения физического (реального) расстояния введем «масштабный коэффициент» $a(t)$ так, чтобы физическое расстояние Δr_p между точками \vec{r}_1 и \vec{r}_2 составляло:

$$\Delta r_p = a(t)\Delta r,$$

Расширение Вселенной подразумевает, что $a(t)$ есть возрастающая функция времени.

На больших масштабах – гораздо больших, чем галактики и их скопления – наша Вселенная является примерно однородной и изотропной. Поэтому рассмотрим «игрушечную» модель Вселенной, в которой Вселенная заполнена однородно распределенными частицами. Частиц так много, что мы можем считать их сплошной средой. Также предположим, что число частиц не изменяется.

В настоящее время во Вселенной преобладает нерелятивистское вещество, кинетическая энергия которого пренебрежимо мала по сравнению с энергией его массы. Обозначим за $\rho_m(t)$ физическую плотность энергии (т.е. энергию в единице физического объема) в момент времени t , в которой преобладает энергия массы нерелятивистского вещества, а гравитационная потенциальная энергия, как часть «плотности физической энергии» не учитывается. Обозначим за t_0 текущее время.

A	Получите выражение для $\rho_m(t)$ в момент времени t , выразив ее через $a(t)$, $a(t_0)$ и $\rho_m(t_0)$.	2 балла
----------	--	----------------

Помимо нерелятивистского вещества, во Вселенной также присутствует небольшое количество излучения, которое состоит из частиц с нулевыми массами, например, фотонов. Физическая длина волны частиц с нулевыми массами растет по мере расширения Вселенной как $\lambda_p \propto a(t)$. Пусть физическая плотность энергии излучения будет $\rho_r(t)$.

B	Получите выражение для плотности физической энергии излучения $\rho_r(t)$ в момент времени t , выразив ее через $a(t)$, $a(t_0)$ и $\rho_r(t_0)$.	2 балла
----------	---	----------------

Рассмотрим газ, состоящий из невзаимодействующих фотонов, находящийся в состоянии термодинамического равновесия. В этом случае температура фотонов зависит от времени как $T(t) \propto [a(t)]^\gamma$.

C	Вычислите численное значение γ .	2 балла
----------	---	----------------

Рассмотрим термодинамику невзаимодействующих частиц одного типа X. Считайте расширение пространства достаточно медленным и термически изолированным, так, что энтропия X не изменяется со временем. Пусть физическая плотность энергии частиц X будет $\rho_X(t)$. Она включает энергию массы и внутреннюю энергию. Пусть физическое давление будет $p_X(t)$.

D	Получите выражение для $d\rho_X(t)/dt$, выразив его через $a(t)$, $da(t)/dt$, $\rho_X(t)$, and $p_X(t)$.	4 балла
----------	---	----------------

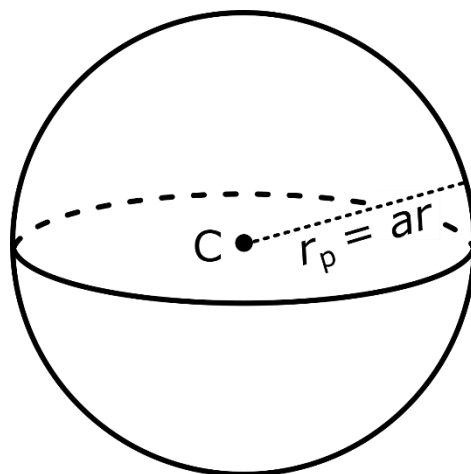
Рассмотрим звезду S . В настоящее время t_0 звезда находится от нас на физическом расстоянии $r_p = a(t_0)r$, где r - координата в расширяющейся системе координат. Мы не учитываем дополнительного движения, т.е. считаем, что как звезда, так и наблюдатель следуют расширению Вселенной без дополнительного движения.

Звезда испускает энергию в виде света с мощностью P_e , которая изотропна по всем направлениям. Для наблюдения звезды используем телескоп. Для простоты предположим, что телескоп воспринимает свет всех частот с к.п.д. 100%. Площадь линзы телескопа равна A .

Е	Получите выражение для мощности P_r , получаемой телескопом от звезды S как функцию r, A, P_e , масштабного коэффициента $a(t_e)$ в момент испускания света звездой t_e , и масштабный коэффициент в настоящее время t (т.е. во время наблюдения) $a(t_0)$.	4 балла
----------	--	----------------

В отсутствие гравитации скорость расширения вселенной должна быть постоянной. В рамках Ньютонской теории это следует понимать так, что в отсутствие силы частицы вещества удаляются друг от друга с постоянной скоростью, и поэтому $\frac{da(t)}{dt}$ является постоянной, зависящей от начальных условий.

Теперь рассмотрим, как Ньютонская гравитация влияет на масштабный коэффициент $a(t)$ во Вселенной, заполненной нерелятивистским однородным и изотропным веществом.



Как показано на рисунке выше, предположим, что C является центром нашей Вселенной (данное предположение может быть снято в общей теории относительности

Эйнштейна, которая находится за пределами нашего рассмотрения). Разобьем вещество на тонкие оболочки вокруг C . Рассмотрим одну из таких оболочек (сфера на рисунке выше). Расстояние от этой оболочки до центра в «расширяющейся» системе координат равно r (помните, что это расстояние не зависит от времени).

F	Используйте движение оболочки для нахождения соотношения между $da(t)/dt$, $a(t)$ и плотностью энергии массы $\rho(t)$. (Если Вы получите в окончательном выражении постоянную, зависящую от начальных условий, можете не вычислять ее).	5 баллов
G	На основе модели, описанной в разделе (F), сделайте вывод, ускоряется (a) или замедляется (b) расширение Вселенной? Выберите (a) или (b).	1 балл

К сведению, в 1998 году открыт новый вид энергии в нашей Вселенной. Это открытие существенно изменяет вывод, полученный в разделе (G).

Действие магнитного поля на сверхпроводники (20 баллов)

Электрон — элементарная частица, у которой есть электрический заряд и внутренний магнитный момент, связанный с ее спином (**моментом импульса**). Из-за кулоновского взаимодействия электроны в вакууме отталкиваются. Однако, в некоторых металлах суммарная сила, действующая на электроны, может стать силой притяжения из-за колебаний решетки. Когда температура металла достаточно низкая (ниже некоторой критической температуры T_c), электроны с противоположными импульсами и противоположными спинами могут образовывать куперовские пары. Образуя куперовскую пару, каждый из электронов уменьшает свою энергию на величину Δ по сравнению с электроном, свободно движущимся в металле. Энергия свободно движущегося электрона равна $p^2/2m_e$, где p — импульс электрона, а m_e — его масса. Куперовские пары могут перемещаться без сопротивления, и металл при этом становится сверхпроводником.

Однако, даже при температурах ниже T_c сверхпроводимость можно разрушить, если к сверхпроводнику приложить внешнее магнитное поле. В этой задаче мы исследуем разрушение куперовских пар посредством двух эффектов.

Первый эффект — парамагнитный. В нем электроны вместо создания куперовской пары с противоположными спинами, уменьшают свою энергию, выстраивая свой магнитный момент параллельно магнитному полю.

Второй эффект — диамагнитный. В нем магнитное поле изменяет орбитальное движение куперовских пар и увеличивает их энергию. Когда приложенное магнитное поле превысит некоторое критическое значение B_c , увеличение энергии становится больше чем 2Δ . В результате, электронам становится невыгодно образовывать куперовские пары.

Недавно был открыт новый тип сверхпроводников — сверхпроводники Изинга. Они не утрачивают свойство сверхпроводимости даже когда к ним приложено поле в 60 Тесла. А это сравнимо с максимальной силой поля, которые создаются сегодня в лабораториях. Мы исследуем, как сверхпроводники Изинга могут преодолеть парамагнитный и диамагнитный эффекты.

Часть А. Электрон в магнитном поле

Рассмотрим виток радиуса r , полный заряд которого $-e$, а масса — m . Масса и заряд распределены по витку равномерно (Рис. 1).

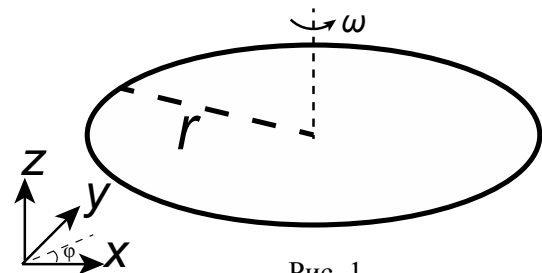
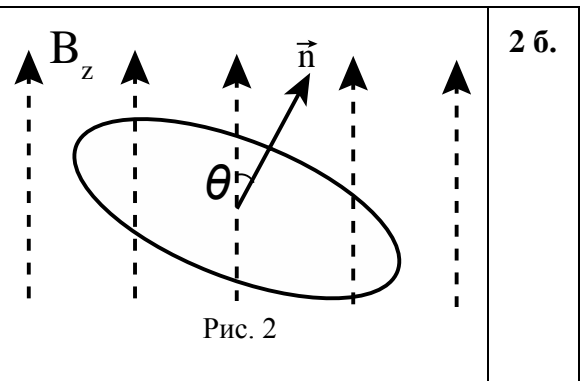


Рис. 1

A1	Чему равен момент импульса \vec{L} этого витка (величина и направление), если он вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$?	2 б.
A2	Величина магнитного момента определяется как $ \vec{M} = IA$, где I — это ток, а A — площадь витка. Найдите соотношение между магнитным моментом \vec{M} и моментом импульса \vec{L} витка.	2 б.

Пусть \vec{n} — нормаль к витку, и она составляет угол θ с приложенным магнитным полем (Рис. 2).

A3	<p>Рассмотрим кольцо, описанное в пункте А1, помещенное в однородное магнитное поле индукцией B_z, которое направлено вдоль оси z. Чему равна потенциальная энергия такой системы? Потенциальная энергия равна нулю при $\theta = \pi/2$.</p>	 <p>Рис. 2</p>	2 б.
A4	<p>У электрона есть собственный момент импульса (спин). Его величина в определенном направлении равна $\hbar/2$, где $\hbar = h/2\pi$, а h — постоянная Планка. Электроны помещены в магнитное поле. Чему равна потенциальная энергия электронов U_{up} и U_{down}, чьи спины параллельны полю и антипараллельны, соответственно. Выразите свой ответ через магнетон Бора</p> $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5.788 \times 10^{-5} \text{ эВ} \cdot \text{Т}^{-1}$ <p>и индукцию поля B.</p>	1 б.	
A5	<p>Из квантовой механики известно, что потенциальные энергии \tilde{U}_{up} и \tilde{U}_{down} в два раза больше значений U_{up} и U_{down}, найденных в пункте А4. Пусть приложено магнитное поле индукцией 1 Тесла. Чему тогда равны потенциальные энергии электрона \tilde{U}_{up} и \tilde{U}_{down}, чей спин параллелен и антипараллелен приложенному полю соответственно? В дальнейшем в задаче используйте в своих вычислениях выражения для \tilde{U}_{up} и \tilde{U}_{down}.</p>	1 б.	

Часть В. Парамагнитный эффект магнитного поля на куперовские пары

В этой части задачи мы исследуем парамагнитный эффект приложенного внешнего магнитного поля на куперовские пары (Рис. 3).

Теоретические расчеты показывают, что в сверхпроводниках два электрона могут образовывать куперовскую пару, при этом общая энергия системы уменьшается. Энергия куперовской пары может быть записана как

$$\frac{p_1^2}{2m_e} + \frac{p_2^2}{2m_e} - 2\Delta,$$

где первые два члена соответствуют кинетической энергии куперовской пары, а последний — уменьшению энергии из-за создания куперовской пары. Здесь, Δ — положительная постоянная.



Рис. 3

В1	Считайте, что магнитное поле действует только на спин электронов, а не на их орбитальное движение. Чему равна энергия E_S куперовской пары, помещенной в однородное магнитное поле $\vec{B} = (B_x, 0, 0)$? Напомним, что у электронов, образующих куперовскую пару, противоположные спины.	1 б.
В2	В нормальном (не сверхпроводящем) состоянии электроны не образуют куперовские пары. Поле $\vec{B} = (B_x, 0, 0)$ однородно и направлено вдоль плоскости в направлении оси x . Чему равна минимальная энергия двух электронов E_N в этом поле? Используйте в своих вычислениях \tilde{U}_{up} и \tilde{U}_{down} из пункта А5. Действием магнитного поля на орбитальное движение электронов можно пренебречь.	1 б.
В3	Когда температура равна нулю, система займет состояние с минимальной энергией. Сверхпроводимость исчезает, если индукция поля превысит критическое значение B_p (т.е. при $ \vec{B} > B_p$). Чему равно это критическое значение B_p ? Выразите ответ через Δ .	1 б.

Часть С. Диамагнитный эффект магнитного поля на куперовские пары

В этой части задачи можно пренебречь действием магнитного поля на спины электронов. Мы рассмотрим действие внешнего магнитного поля на орбитальное движение куперовских пар.

Когда температура равна нулю, а сверхпроводник находится в магнитном поле $\vec{B} = (0, 0, B_z)$, то разность энергий между сверхпроводящим состоянием и нормальным состоянием может быть записана

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi \left(-\alpha\psi - \frac{\hbar^2}{4m_e} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{e^2 B_z^2 x^2}{m_e} \psi \right) dx$$

Здесь $\psi(x)$ — функция, зависящая от x и не зависящая от y . $\psi(x)^2$ задает вероятность найти куперовскую пару вблизи положения x . Здесь α — постоянная, и она связана с уменьшением энергии при образовании куперовской пары. Второй и третий члены в F связаны с кинетической энергией куперовской пары, учитывая действие магнитного поля.

Когда температура равна нулю, система минимизирует свою энергию F . В этом случае функция $\psi(x)$ может быть записана в виде

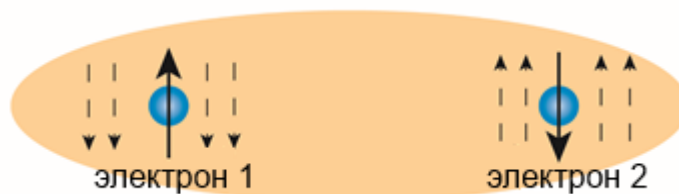
$$\psi(x) = \left(\frac{2\lambda}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\lambda x^2},$$

где $\lambda > 0$.

С1	<p>Найдите λ и выразите ответ через e, B_z и \hbar.</p> <p><i>Примечание:</i></p> $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$ $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ <p>Здесь a — постоянная.</p>	3 б.
С2	Найдите критическое значение индукции поля B_z , когда сверхпроводящее состояние перестает быть энергетически выгодным. Выразите ответ через α .	2 б.

Часть D. Сверхпроводники Изинга

В веществах со спин-орбитальным взаимодействием (спин-спиновым взаимодействием можно пренебречь) на электрон, обладающий импульсом \vec{p} , действует внутреннее магнитное поле $\vec{B}_{1\perp} = (0, 0, -B_z)$. С другой стороны, на электрон, обладающий импульсом $-\vec{p}$, действует противоположно направленное магнитное поле $\vec{B}_{2\perp} = (0, 0, B_z)$. Эти внутренние магнитные поля действуют только на спины электронов (Рис. 4). Такие сверхпроводники называются сверхпроводниками Изинга.

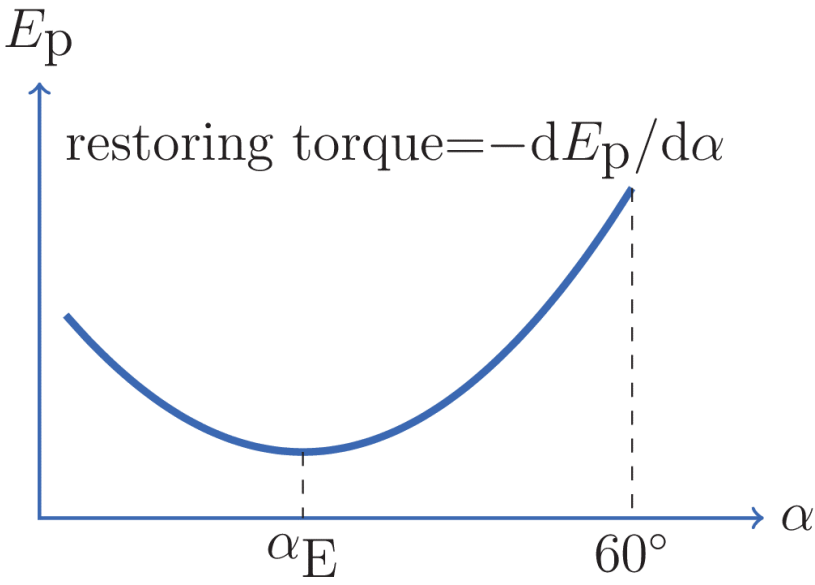


Куперовская пара

Рис. 4: Два электрона образуют куперовскую пару. На электрон 1, обладающий импульсом \vec{p} , действует магнитное поле $\vec{B}_{1\perp} = (0, 0, -B_z)$, а на электрон 2, обладающий импульсом $-\vec{p}$, действует противоположно направленное магнитное поле $\vec{B}_{2\perp} = (0, 0, B_z)$. Внутренние магнитные поля обозначены штриховыми стрелками.

D1	Чему равна энергия E_I куперовской пары в сверхпроводнике Изинга?	1 б.
D2	К веществу, где есть спин-орбитальное взаимодействие, вдоль плоскости приложено однородное магнитное поле $\vec{B}_{\parallel} = (B_x, 0, 0)$. Чему при этом равна энергия E_{\parallel} двух электронов? (Внутренние магнитные поля по-прежнему действуют и направлены перпендикулярно \vec{B}_{\parallel} . Также можно пренебречь действием поля, направленного вдоль плоскости, на орбитальное движение куперовских пар.)	2 б.
D3	Чему равно критическое значение индукции B_I , когда при $ \vec{B}_{\parallel} > B_I$, $E_{\parallel} < E_I$?	1 б.

(Full Mark = 20)

Part	Model Answer	Marks
A1	<p>The potential energy for $N = 2$ is:</p> $E_p(\alpha) = Mg \cdot y_{c.m.(0,0)} \times 4 + Mg \cdot \Delta y \times 2 \quad \text{(0.5 points)} \quad \text{- Eq. (1)}$ <p>where</p> $y_{c.m.(0,0)} = -\frac{\sqrt{3}l}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \quad \text{(0.5 points)} \quad \text{- Eq. (2)}$ <p>is the y coordinate of center of mass of triangle (0,0), and</p> $\begin{aligned} \Delta y &= y_{A(0,1)} - y_{A(0,0)} \\ &= -l \left[\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \right] \\ &= -\sqrt{3}l \cos \alpha \quad \text{(0.5 points)} \quad \text{- Eq. (3)} \end{aligned}$ <p>is the translational difference of two neighbouring triangles in y-direction. Solving Eqs. (1), (2) and (3), we obtain</p> $E_p(\alpha) = -\frac{2}{3}Mgl(4\sqrt{3} \cos \alpha + 3 \sin \alpha) \quad \text{(0.5 points)} \quad \text{- Eq. (4)}$	2
A2	 <p>restoring torque = $-dE_p/d\alpha$</p> <p>At equilibrium, the potential energy reaches a minimum, which gives:</p> $\left. \frac{dE_p(\alpha)}{d\alpha} \right _{\alpha=\alpha_E} = 0 \quad \text{(0.5 points)} \quad \text{- Eq. (5)}$ $\sqrt{3} \sin \alpha_E + 3 \cos \alpha_E = 0 \quad \text{- Eq. (6)}$	1

or

$$\alpha_E = \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{(0.5 point)} \quad \text{- Eq. (7)}$$

A3 If the total energy of the oscillation has the following form **5**

$$E(\Delta\alpha, \Delta\dot{\alpha}) = E_p + E_k = \frac{1}{2}K(\Delta\alpha)^2 + \frac{1}{2}I(\Delta\dot{\alpha})^2, \quad \text{(0.5 points)} \quad \text{- Eq. (8)}$$

where E_p and E_k are the potential and kinetic energies of the system respectively, then the motion is a simple harmonic oscillation with angular frequency $\omega = \sqrt{K/I}$. Here $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_E$. Under a small perturbation, the potential energy change is:

$$\begin{aligned} \Delta E_p &\approx \left. \frac{1}{2} \frac{d^2 E_p}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=\alpha_E} (\Delta\alpha)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{3} Mgl\right) (4\sqrt{3} \cos \alpha_E + 3 \sin \alpha_E) (\Delta\alpha)^2 \\ &= \frac{\sqrt{57}}{3} Mgl (\Delta\alpha)^2 \quad \text{(1 point)} \quad \text{- Eq. (9)} \end{aligned}$$

The total kinetic energy of the system includes the translational kinetic energy of every plate and the rotational kinetic energy of every plate relative to its center of mass

$$E_k = \sum E_k^{\text{trans}} + \sum E_k^{\text{rot}} \quad \text{- Eq. (10)}$$

The rotational kinetic energy is

$$\sum E_k^{\text{rot}} = 4 \times \frac{1}{2} \frac{Ml^2}{12} (\Delta\dot{\alpha})^2 = \frac{1}{6} Ml^2 (\Delta\dot{\alpha})^2 \quad \text{(0.5 points)} \quad \text{- Eq. (11)}$$

E_k^{trans} can be obtained by considering the motion of the center of mass of each triangle and setting $N = 2$.

$$x_{\text{c.m.}(m,n)} = m(2l \cos \alpha) + n(2l \cos \alpha) \cos \frac{\pi}{3} + \frac{l}{\sqrt{3}} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right),$$

$$y_{\text{c.m.}(m,n)} = -n(2l \cos \alpha) \sin \frac{\pi}{3} - \frac{l}{\sqrt{3}} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right). \quad \text{(0.5 point)}$$

Differentiating and substituting

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}, \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{19}}, \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{7}{2\sqrt{19}}, \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}},$$

$$\dot{x}_{c.m.(m,n)} = -\left(2m + n + \frac{7}{6}\right) \frac{3}{\sqrt{57}} l \Delta\dot{\alpha}, \quad \dot{y}_{c.m.(m,n)} = \frac{3(2n-1)}{2\sqrt{19}} l \Delta\dot{\alpha}.$$

$$v_{c.m.(m,n)}^2 = \dot{x}_{c.m.(m,n)}^2 + \dot{y}_{c.m.(m,n)}^2 = \frac{(12m+6n+7)^2+27}{228} l^2 (\Delta\dot{\alpha})^2, \quad \text{(1 point)}$$

$$E_{c.m.,k}^{\text{trans}} = \frac{M}{2} [v_{c.m.(0,0)}^2 + v_{c.m.(0,1)}^2 + v_{c.m.(1,0)}^2 + v_{c.m.(1,1)}^2] = \frac{164}{57} M l^2 (\Delta\dot{\alpha})^2.$$

$$E_k^{\text{trans}} = E_{c.m.,k}^{\text{trans}} + E_k^{\text{rot}} = \frac{347}{114} M l^2 (\Delta\dot{\alpha})^2. \quad \text{(1 point)}$$

Alternatively, another way to get E_k^{trans} is based on the center of mass of the whole system:

$$E_k = \sum E_{c.m.,k}^{\text{trans}} + \sum E_{r.c.,k}^{\text{rot}} \quad \text{(0.5 points)} \quad \text{- Eq. (12)}$$

where

$$E_{r.c.,k}^{\text{trans}} = \frac{M}{2} [v_{r.c.(0,0)}^2 + v_{r.c.(1,0)}^2 + v_{r.c.(0,1)}^2 + v_{r.c.(1,1)}^2] \quad \text{- Eq. (13)}$$

is the translational kinetic energy relative to the center of mass of the system and

$$E_{c.m.,k}^{\text{trans}} = \frac{4M}{2} v_{c.m.}^2 \quad \text{- Eq. (14)}$$

is the translational kinetic energy of the center of mass of the system.

The center of mass of each of the $2 \times 2 = 4$ triangles always form diamond shape with lateral length $2l \cos \alpha$. The center of mass of the whole system is at the center of the diamond shape. Hence

$$v_{r.c.(0,0)} = v_{r.c.(1,1)} = \left. \frac{d(\sqrt{3}l \cos \alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_E} \Delta\dot{\alpha}$$

$$v_{r.c.(1,0)} = v_{r.c.(0,1)} = \left. \frac{d(l \cos \alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_E} \Delta\dot{\alpha} \quad \text{- Eq. (15)}$$

Substituting Eqs. (14) and (15) into Eq. (13), we obtain

$$E_{r.c.,k}^{\text{trans}} = 4 \sin^2 \alpha_E M l^2 (\Delta\dot{\alpha})^2 \quad \text{- Eq. (16)}$$

For $E_{c.m.,k}^{\text{trans}}$,

$$v_{c.m.} = \sqrt{\left(\frac{dx_{c.m.}}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy_{c.m.}}{d\alpha}\right)^2} \Bigg|_{\alpha=\alpha_E} \Delta\dot{\alpha} \quad \text{- Eq. (17)}$$

is the velocity of the center-of-mass of the four triangular plates, with

$$\begin{aligned} x_{c.m.} &= x_{c.m.(0,0)} + \frac{1}{2}(x_{B(0,0)} + x_{A(1,0)}) \\ &= \frac{\sqrt{3}l}{3} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \frac{3}{2}l \cos\alpha \end{aligned} \quad \text{- Eq. (18)}$$

$$\begin{aligned} y_{c.m.} &= y_{c.m.(0,0)} + \frac{1}{2}\Delta y \\ &= -\frac{\sqrt{3}l}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}l \cos\alpha \end{aligned} \quad \text{- Eq. (19)}$$

Substituting Eqs. (17), (18) and (19) and into Eq. (14), we obtain

$$E_{c.m.,k}^{\text{trans}} = \left(\frac{2}{3} + 10 \sin^2 \alpha_E\right) Ml^2 (\Delta\dot{\alpha})^2 \quad \text{(0.5 points)} \quad \text{- Eq. (20)}$$

Combining Eqs. (12), (16) and (20), we obtain

$$\begin{aligned} E_k &= E_k^{\text{rot}} + E_{r.c.,k}^{\text{trans}} + E_{c.m.,k}^{\text{trans}} \\ &= \left(\frac{5}{6} + 14 \sin^2 \alpha_E\right) Ml^2 (\Delta\dot{\alpha})^2 \\ &= \frac{347}{114} Ml^2 (\Delta\dot{\alpha})^2 \quad \text{(1.5 points)} \end{aligned} \quad \text{- Eq. (21)}$$

According to Eqs. (8), (9) and (21),

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{57}}{3}Mgl}{\frac{347}{114}Ml^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{38\sqrt{57}g}{347l}} \quad \text{(0.5 points)} \quad \text{- Eq. (22)}$$

[Note 1: 0.5 point should be deducted if there are numerical mistakes, but all steps are correct.]

Note 2: A rough estimate of $f \sim \sqrt{\frac{g}{l}}$ can get 0.5 points out of 5 points.]

B1 For arbitrary N , the total potential energy

$$E_p = \sum_{m,n=0}^{N-1} E_p(m, n) \quad \text{- Eq. (23)}$$

where

$$E_p(m, n) = \frac{1}{3} M g [y_{A(m,n)} + y_{B(m,n)} + y_{C(m,n)}] \quad \text{- Eq. (24)}$$

(0.5 points for Eqs. (23) and (24))

and

$$y_{A(m,n)} = -nl \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) - nl \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = -\sqrt{3}nl \cos \alpha$$

$$y_{B(m,n)} = y_{A(m,n)} - l \sin \alpha = -\sqrt{3}nl \cos \alpha - l \sin \alpha$$

$$y_{C(m,n)} = y_{A(m,n)} - l \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = -\sqrt{3}nl \cos \alpha - l \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \quad \text{- Eq. (25)}$$

(0.5 points for all three correct coordinates)

Thus,

$$E_p(m, n) = -\frac{1}{3} M g l \left[3\sqrt{3}n \cos \alpha + \sin \alpha + \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \right] \quad \text{- Eq. (26)}$$

and

$$\begin{aligned} E_p &= \sum_{m,n=0}^{N-1} E_p(m, n) \\ &= -\frac{1}{3} M g l \sum_{m,n=0}^{N-1} \left[3\sqrt{3}n \cos \alpha + \sin \alpha + \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \right] \quad \text{(0.5 points) - Eq. (27)} \end{aligned}$$

Using the mathematical relations

$$\sum_{m=0}^{N-1} 1 = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$$

and

$$\sum_{m=0}^{N-1} m = \sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{N(N-1)}{2} \quad \text{- Eq. (28),}$$

Eq. (27) becomes

3

$$E_p = -\frac{1}{3}N^2Mgl \left[\frac{3\sqrt{3}(N-1)\cos\alpha}{2} + \sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \right]$$

$$\text{or } = -\frac{1}{3}N^2Mgl \left[\frac{\sqrt{3}(3N-2)\cos\alpha}{2} + \frac{3}{2}\sin\alpha \right] \quad \text{(1 points)} \quad \text{- Eq. (29)}$$

At equilibrium, $\frac{dE_p}{d\alpha} = 0$, therefore

$$-\frac{3\sqrt{3}(N-1)\sin\alpha'_E}{2} + \cos\alpha'_E + \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha'_E\right) = 0 \quad \text{- Eq. (30)}$$

$$\alpha'_E = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3N-2}\right) \quad \text{(0.5 points)} \quad \text{- Eq. (31)}$$

[Remark: Increasing α lowers each triangle relative to its vertex A, but globally raises the system, i.e. the bottom tube is raised higher. When $N \rightarrow \infty$, the global displacement dominates, consequently $\alpha \rightarrow 0$.]

B2

Under a small perturbation, the potential energy change, according to Eq. (29) is

$$\Delta E_p \approx \frac{1}{2} \frac{d^2 E_p}{d\alpha^2} \Big|_{\alpha=\alpha'_E} (\Delta\alpha)^2 \sim N^3 \text{ or } \gamma_1 = 3 \quad \text{(0.5 points)} \quad \text{- Eq. (32)}$$

[Remark: There are N^2 triangles and the y coordinate of the total center of mass is proportional to N , hence $E_p \sim N^3$ and $\gamma_1 = 3$. Using this argument to derive the correct γ_1 can also get 0.5 points.]

The kinetic energy of a triangle includes the translational energy of its center of mass and the rotational energy about its center of mass. Hence the total kinetic energy of the N^2 triangles is

$$E_k = \sum_{m,n} E_{c.m.(m,n)} + \sum_{m,n} E_{r.c.(m,n)} \quad \text{- Eq. (33)}$$

where

$$E_{r.c.(m,n)} = \frac{1}{2} \frac{Ml^2}{12} (\Delta\dot{\alpha})^2 = \frac{1}{24} Ml^2 (\Delta\dot{\alpha})^2 \sim 1 \quad \text{- Eq. (34)}$$

and

$$\begin{aligned} E_{c.m.(m,n)} &= \frac{M}{2} v_{c.m.(m,n)}^2 \\ &= \frac{M(\Delta\dot{\alpha})^2}{2} \left[\left(\frac{dx_{c.m.(m,n)}}{d\alpha} \right)^2 + \left(\frac{dy_{c.m.(m,n)}}{d\alpha} \right)^2 \right]_{\alpha=\alpha'_E} \quad \text{(0.5 points)} \quad \text{- Eq. (35)} \end{aligned}$$

3

Since

$$x_{c.m.(m,n)} = x_{A(m,n)} + \frac{\sqrt{3}l}{3} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$$

$$= (2m + n)l \cos \alpha + \frac{l}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}l}{6} \sin \alpha$$

and

$$y_{c.m.(m,n)} = y_{A(m,n)} + \frac{\sqrt{3}l}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$$

$$= \sqrt{3}nl \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}l}{6} \cos \alpha + \frac{l}{2} \sin \alpha \quad \text{- Eq. (36)}$$

(0.5 points for correct x and y)

$$\frac{dx_{c.m.(m,n)}}{d\alpha} = \left[-(2m + n) \sin \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\sqrt{3}}{6} \cos \alpha \right] l$$

$$\frac{dy_{c.m.(m,n)}}{d\alpha} = \left[-\sqrt{3}n \sin \alpha - \frac{\sqrt{3}}{6} \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha \right] l$$

we have

$$E_{c.m.(m,n)} = \frac{1}{2} M l^2 (\Delta\dot{\alpha})^2 \left[(4m^2 + 4n^2 + 4mn + 2m + 2n) \sin^2 \alpha'_E + \frac{2\sqrt{3}}{3} (m - n) \sin \alpha'_E \cos \alpha'_E + \frac{1}{3} \right] \quad \text{- Eq. (37)}$$

Since $\alpha'_E \sim \frac{1}{N}$ in Eq. (31), we have

$$E_{c.m.(m,n)} = A \cdot N^2 \cdot \frac{1}{N^2} + B \cdot N \cdot \frac{1}{N} + C \sim 1 \quad \text{(0.5 points)} \quad \text{- Eq. (38)}$$

According to Eqs. (33), (34) and (38), we have

$$E_k = \sum_{m,n} E_{c.m.(m,n)} + \sum_{m,n} E_{r.c.(m,n)} \sim N \times N \times 1 \sim N^2$$

$$\text{or } \gamma_2 = 2 \quad \text{(0.5 points)} \quad \text{- Eq. (39)}$$

[Remarks: $E_k \sim N^2$ because there are N^2 triangles, each contribute $E_{r.c.}(m, n) \sim 1$ (relative-to-center-of-mass kinetic energy) and $E_{c.m.}(m, n) \sim 1$ (center-of-mass kinetic energy).]

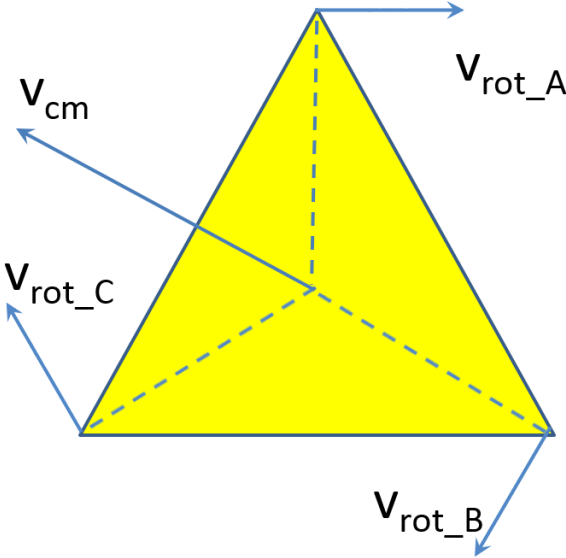
Note that $E_{r.c.}(m, n) \sim 1$ is true for arbitrary α while $E_{c.m.}(m, n) \sim 1$ is only true for the special case of $\alpha'_E \rightarrow 0$ or $N \rightarrow \infty$.

Therefore

$$f'_E \sim \sqrt{\frac{E_p}{E_k}} \sim \sqrt{N}$$

or $\gamma_3 = 0.5$ (0.5 points) - Eq. (40)

C1 The minimum force should act on the farthest triangle $(N - 1, N - 1)$, whose motion can be decomposed into the motion of the center of mass and the rotation around the center of mass: $\vec{v} = \vec{v}_{c.m.} + \vec{v}_{rot.}$ As shown in the figure, $\vec{v}_{rot.}$ of vertex C makes the smallest angle relative to the direction of $\vec{v}_{c.m.}$ near $\alpha_m \equiv \pi/3$. Hence its displacement is the largest and its corresponding force is minimum, i.e. the minimum force should act on vertex C $(N - 1, N - 1)$. (1 point)



[Remarks: A rigorous calculation is given in Appendix 3.]

1

C2 At $\alpha = \alpha_m \equiv \pi/3$, a small change in α will change the potential energy by:

5

$$\begin{aligned} \Delta E_p(\alpha_m) &= \left. \frac{dE_p}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_m} \Delta\alpha \\ &= \frac{1}{3} N^2 M g l \left[\left(\frac{3\sqrt{3}N}{2} - \sqrt{3} \right) \sin \alpha_m - \frac{3}{2} \cos \alpha_m \right] \Delta\alpha \\ &= \frac{3}{4} (N-1) N^2 M g l \Delta\alpha \quad \text{(1 point)} \end{aligned} \quad \text{- Eq. (41)}$$

The displacement of $C(m,n)$ point is

$$\begin{aligned} \Delta x_{C(m,n)} &= - \left[(2m+n) \sin \alpha_m - \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha_m \right) \right] l \Delta\alpha \\ &= \frac{(2m+n+1)\sqrt{3}}{2} l \Delta\alpha \quad \text{(0.5 points)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta y_{C(m,n)} &= - \left[\sqrt{3}n \sin \alpha_m - \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha_m \right) \right] l \Delta\alpha \\ &= \frac{(3n+1)}{2} l \Delta\alpha \quad \text{(0.5 points)} \end{aligned}$$

For $C(N-1, N-1)$, $\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = (3N-2)(l\Delta\alpha)$. **(1 point)**

Hence

$$F_{\min} = \frac{\Delta E_p(\alpha_m)}{\Delta r_{\max}} = \frac{3(N-1)N^2}{4(3N-2)} M g \quad \text{(1 point)} \quad \text{- Eq. (42)}$$

and

$$\begin{aligned} \theta_{F_{\min}} &= \tan^{-1} \left[\frac{\Delta y_{C(N-1, N-1)}}{\Delta x_{C(N-1, N-1)}} \right] + \pi \\ &= -\tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3} + \pi = \frac{5\pi}{6} \quad \text{(1 point)} \end{aligned} \quad \text{- Eq. (43)}$$

[Remarks: This $\theta_{F_{\min}}$ is not perpendicular to the $C(N-1, N-1)$ – $A(0,0)$ direction because of the constraints of the tines, e.g. $A(1,0)$, $A(2,0)$, $A(3,0)$, \dots , are also the holding points.]

Appendix 1:

(a) Calculation of the exact E_p , E_k and f'_E in Parts (C), (D) and € for arbitrary N

Under a small perturbation, the potential energy change is

$$\begin{aligned}\Delta E_p &\approx \frac{1}{2} \frac{d^2 E_p}{d\alpha^2} \Big|_{\alpha=\alpha'_E} (\Delta\alpha)^2 \\ &= \frac{1}{3} N^2 Mgl \left(\frac{3\sqrt{3}N - 2\sqrt{3}}{2} \cos \alpha'_E + \frac{3}{2} \sin \alpha'_E \right) \frac{(\Delta\alpha)^2}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3(3N-2)^2+9}}{12} N^2 Mgl (\Delta\alpha)^2\end{aligned}\quad \text{- Eq. (44)}$$

The kinetic energy of a triangle includes the translational energy of its center of mass and the rotational energy around its center of mass. Hence the total kinetic energy of the N^2 triangles is

$$E_k = \sum_{m,n} E_{c.m.(m,n)} + \sum_{m,n} E_{r.c.(m,n)} \quad \text{- Eq. (45)}$$

where

$$E_{r.c.(m,n)} = \frac{1}{2} \frac{Ml^2}{12} (\Delta\dot{\alpha})^2 = \frac{1}{24} Ml^2 (\Delta\dot{\alpha})^2 \quad \text{- Eq. (46)}$$

and

$$\begin{aligned}E_{c.m.(m,n)} &= \frac{M}{2} v_{c.m.(m,n)}^2 \\ &= \frac{M(\Delta\dot{\alpha})^2}{2} \left[\left(\frac{dx_{c.m.(m,n)}}{d\alpha} \right)^2 + \left(\frac{dy_{c.m.(m,n)}}{d\alpha} \right)^2 \right]_{\alpha=\alpha'_E}\end{aligned}\quad \text{- Eq. (47)}$$

Since

$$\begin{aligned}x_{c.m.(m,n)} &= x_{A(m,n)} + \frac{\sqrt{3}l}{3} \cos \left(\frac{\pi}{6} + \alpha \right) \\ &= (2m+n)l \cos \alpha + \frac{l}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}l}{6} \sin \alpha\end{aligned}$$

and

$$y_{c.m.(m,n)} = y_{A(m,n)} - \frac{\sqrt{3}l}{3} \sin \left(\frac{\pi}{6} + \alpha \right)$$

N/A

$$= -\sqrt{3}nl \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}l}{6} \cos \alpha - \frac{l}{2} \sin \alpha \quad \text{- Eq. (48)}$$

Hence,

$$\frac{dx_{c.m.(m,n)}}{d\alpha} = \left[-(2m+n) \sin \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\sqrt{3}}{6} \cos \alpha \right] l$$

$$\frac{dy_{c.m.(m,n)}}{d\alpha} = \left[-\sqrt{3}n \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{6} \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha \right] l$$

We have

$$E_{c.m.(m,n)} = \frac{1}{2} Ml^2 (\Delta\dot{\alpha})^2 \left[(4m^2 + 4n^2 + 4mn + 2m + 2n) \sin^2 \alpha'_E + \frac{2\sqrt{3}}{3} (m-n) \sin \alpha'_E \cos \alpha'_E + \frac{1}{3} \right] \quad \text{- Eq. (49)}$$

and

$$\begin{aligned} E_k &= \sum_{m,n} E_{c.m.(m,n)} + \sum_{m,n} E_{r.c.(m,n)} \\ &= \left[\frac{1}{6} (11N-1)(N-1) \sin^2 \alpha'_E + \frac{5}{24} \right] N^2 Ml^2 (\Delta\dot{\alpha})^2 \\ &= \left[\frac{(11N-1)(N-1)}{2(3N-2)^2+6} + \frac{5}{24} \right] N^2 Ml^2 (\Delta\dot{\alpha})^2 \quad \text{- Eq. (50)} \end{aligned}$$

With Eqs. (44) and (50), we have

$$\begin{aligned} f'_E &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{3(3N-2)^2+9}}{12} N^2 Mgl}{\left[\frac{(11N-1)(N-1)}{2(3N-2)^2+6} + \frac{5}{24} \right] N^2 Ml^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\sqrt{3(3N-2)^2+9}}{\left[\frac{12(11N-1)(N-1)}{(3N-2)^2+3} + 5 \right]} \frac{g}{l}} \quad \text{- Eq. (51)} \end{aligned}$$

(b) Center of mass movement of the whole system

According to Eq. (48), we have

$$x_{c.m.(sys.)}(\alpha) = \frac{\sum_{m,n} x_{c.m.(m,n)}}{N^2}$$

$$= \frac{\sum_{m,n} \left[(2m+n)l \cos \alpha + \frac{l}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}l}{6} \sin \alpha \right]}{N^2}$$

$$= \left(\frac{3N-2}{2} \right) l \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}l}{6} \sin \alpha$$

and

$$y_{c.m.(m,n)}(\alpha) = \frac{\sum_{m,n} y_{c.m.(m,n)}}{N^2}$$

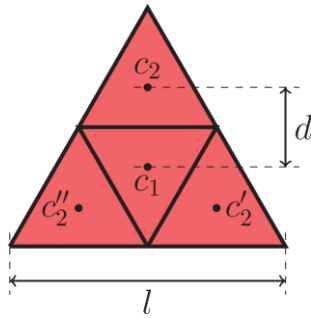
$$= - \frac{\sum_{m,n} \left[\sqrt{3}nl \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}l}{6} \cos \alpha + \frac{l}{2} \sin \alpha \right]}{N^2}$$

$$= - \left(\frac{3N-2}{6} \right) \sqrt{3}l \cos \alpha - \frac{l \sin \alpha}{2} \quad \text{- Eq. (52)}$$

Eq. (52) is the trajectory of the center of mass for the whole system, which is not a straight line.

Appendix 2: Calculation of the moment of inertia of a triangular plate

N/A



An equilateral triangle with lateral length l can be divided into four small equilateral triangles with lateral length $l/2$. For the central small triangle centered at c_1 , its moment of inertia is

$$I_1 = \beta \frac{M}{4} \left(\frac{l}{2} \right)^2 \quad \text{- Eq. (53)}$$

For the non-central small triangle centered at c_2, c_2' and c_2'' ,

$$I_2 = I_1 + \frac{M}{4} d^2 \quad \text{- Eq. (54)}$$

where $d = \sqrt{3}l/6$ is the distance between the centers of triangles 1 and 2. The second term is from the parallel-axis theorem. The moment of inertia of the whole triangle is the sum of the moment of inertia of the four sub-triangles:

Thus

$$\beta M l^2 = 4 \times \beta \frac{M}{4} \left(\frac{l}{2}\right)^2 + 3 \times \frac{M}{4} d^2 \quad \text{- Eq.(55)}$$

$$\beta = \frac{1}{12} \quad \text{- Eq. (56)}$$

Appendix 3: The minimum force corresponds to the maximum displacement of the exerting point of this force.

N/A

Consider the position of vertices A, B, C of a triangle (m,n) :

$$\begin{aligned}
 x_{A(m,n)} &= (2m + n) \cos \alpha_m l \\
 y_{A(m,n)} &= -\sqrt{3}n \cos \alpha_m l \\
 x_{B(m,n)} &= (2m + n + 1) \cos \alpha_m l \\
 y_{B(m,n)} &= -(\sqrt{3}n \cos \alpha_m + \sin \alpha_m)l \\
 x_{C(m,n)} &= \left[(2m + n) \cos \alpha_m + \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha_m \right) \right] l \\
 y_{C(m,n)} &= - \left[\sqrt{3}n \cos \alpha_m + \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha_m \right) \right] l \quad \text{- Eq. (57)}
 \end{aligned}$$

Taking derivatives on α on the above coordinates we get

$$\begin{aligned}
 \Delta x_{A(m,n)} &= -(2m + n) \sin \alpha_m l \Delta \alpha = -\frac{(2m + n)\sqrt{3}}{2} l \Delta \alpha \\
 \Delta y_{A(m,n)} &= \sqrt{3}n \sin \alpha_m (l \Delta \alpha) = \frac{3n}{2} l \Delta \alpha \\
 \Delta x_{B(m,n)} &= -(2m + n + 1) \sin \alpha_m l \Delta \alpha = -\frac{(2m + n + 1)\sqrt{3}}{2} l \Delta \alpha \\
 \Delta y_{B(m,n)} &= -(-\sqrt{3}n \sin \alpha_m + \cos \alpha_m) l \Delta \alpha = \frac{3n - 1}{2} l \Delta \alpha \\
 \Delta x_{C(m,n)} &= \left[-(2m + n) \sin \alpha_m - \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha_m \right) \right] l \Delta \alpha = -\frac{(2m + n + 1)\sqrt{3}}{2} l \Delta \alpha \\
 \Delta y_{C(m,n)} &= - \left[-\sqrt{3}n \sin \alpha_m + \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha_m \right) \right] l \Delta \alpha = \frac{(3n+1)}{2} l \Delta \alpha \quad \text{- Eq. (58)}
 \end{aligned}$$

For $\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, we have

$$\begin{aligned}
 \Delta r_{A(m,n)} &= \sqrt{3m^2 + 3n^2 + 3mn} (l \Delta \alpha) \\
 \Delta r_{B(m,n)} &= \sqrt{3m^2 + 3n^2 + 3mn + 3m + 1} (l \Delta \alpha) \\
 \Delta r_{C(m,n)} &= \sqrt{3m^2 + 3n^2 + 3mn + 3m + 3n + 1} (l \Delta \alpha) \quad \text{- Eq. (59)}
 \end{aligned}$$

Thus we find

$$\Delta r_{C(m,n)} > \Delta r_{B(m,n)} > \Delta r_{A(m,n)} \quad \text{- Eq. (60)}$$

Therefore, we should choose point C of the triangle $(N - 1, N - 1)$ to obtain

$$\Delta r_{\max} = (3N - 2)l\Delta\alpha \quad \text{- Eq. (61)}$$

so that the force is minimal.

(Full Marks: 20)

Part	Model Answer	Marks
A	<p>The physical volume is</p> $V_p = a^3(t)V. \text{ (0.5 points).}$ <p>The comoving number density is a constant, thus the physical number density is</p> $\frac{n(t)}{n(t_0)} = \left(\frac{a(t_0)}{a(t)}\right)^3. \text{ (0.5 points)}$ <p>The kinetic energy for non-relativistic particles are negligible, thus the energy density is</p> $\rho_m(t) = m n(t), \text{ (0.5 points)}$ <p>where m is the mass of a particle.</p> <p>Thus</p> $\rho_m(t) = \rho_m(t_0) \left(\frac{a(t_0)}{a(t)}\right)^3 \text{ (0.5 points)}$ <p>[Remarks: It is acceptable if the student just writes $\rho_m \propto 1/a^3$ and full points will be given.]</p>	2
B	<p>The Einstein's energy relation for a massless particle is</p> $E = pc. \text{ (0.5 points)}$ <p>From de Broglie's relation:</p> $p \propto 1/\lambda_p \propto 1/a(t). \text{ (0.5 points)}$ <p>[Remarks: No point if only $\lambda_p \propto a(t)$ is written because already given.]</p> <p>Thus</p> $E \propto 1/a(t). \text{ (0.5 points)}$ <p>Physical number density is $n \propto 1/a^3$.</p> <p>Energy density is $n E$.</p> <p>Thus</p> $\rho_r(t) = \rho_r(t_0) \left(\frac{a(t_0)}{a(t)}\right)^4 \text{ (0.5 points)}$ <p>[Remarks: It is acceptable if the student just write $\rho_r \propto 1/a^4$.]</p>	2

<p>C</p>	<p>The photons in thermal equilibrium satisfy Boltzmann distribution</p> $n(E(a)) \propto e^{-\frac{E(a)}{k_B T(a)}}, \text{ (1 point)}$ <p>where $E \propto 1/a(t)$.</p> <p>Condition of being non-interacting implies that there is no energy transfer. Thus the energy distribution must be stable.</p> <p>To be explicit, for two different comoving wavelengths,</p> $\frac{n(E_1(a))}{n(E_2(a))} = e^{[E_2(a)-E_1(a)]/[k_B T(a)]} = \text{const.}$ <p>[Remarks: All the above steps can be replaced by the intuition of $E \propto T$, if the students realize it, the above 1 point can be given.]</p> <p>Thus</p> $T(a) \propto 1/a, \text{ i.e. } \gamma = -1. \text{ (1 point)}$	<p>2</p>
<p>D</p>	<p>The 1st law of thermodynamics is</p> $dE_X = -p_X dV_p. \text{ (1 point)}$ <p>Here no entropy term appears, because $S = \text{const}$. No chemical potential appears, because of particle number conservation.</p> <p>Here $V_p = a^3 V$.</p> $dV_p = 3a^2 V da. \text{ (1 point)}$ $E_X = \rho_X V_p. \text{ (0.5 points)}$ $dE_X = d(\rho_X V_p) = a^3 V d\rho_X + 3\rho_X a^2 V da. \text{ (0.5 points)}$ <p>Thus</p> $d\rho_X + 3\left(\frac{da}{a}\right)(\rho_X + p_X) = 0. \text{ (0.5 points)}$ $\dot{\rho}_X + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)(\rho_X + p_X) = 0. \text{ (0.5 points)}$ <p>[Remarks: 0.5 point for relating variation and time derivative no matter in which step it is being used.]</p>	<p>4</p>

<p>E</p>	<p>With lens area A, we only receive part of the starlight. The area ratio is</p> $A/(4\pi a^2(t_0)r^2). \text{ (1 point)}$ <p>The wavelength of each photon emitted from the star gets stretched. Thus energy per photon is lowered, contributing a ratio</p> $a(t_e)/a(t_0). \text{ (1 point)}$ <p>The separation among the photons also increases due to cosmic expansion, contributing a ratio</p> $a(t_e)/a(t_0). \text{ (1 point)}$ <p>As a result, the power that the telescope receives is</p> $P_r = \frac{A a^2(t_e)}{4\pi a^4(t_0)r^2} \times P_e. \text{ (1 point)}$	<p>4</p>
<p>F</p>	<p>The kinetic energy and gravitational energy of the shell adds up to a constant:</p> $E = \frac{1}{2} m (\dot{r}_p)^2 - \frac{GMm}{r_p}, \text{ (2 points)}$ <p>where</p> $M = \frac{4\pi}{3} r_p^3 \rho, \text{ (1 point)}$ <p>(Note: energy conservation without evolving pressure requires the assumption of non-relativistic matter.)</p> $r_p = a(t)r, \text{ (1 point)}$ <p>[Remarks: The point is given because the student understand that the shell is not pulled gravitationally from the outside, because the force due to the mass outside cancels.]</p> <p>Thus</p> $\frac{2E}{mr^2} = \dot{a}^2 - \frac{8\pi G}{3} \rho a^2. \text{ (1 point)}$ <p><u>Alternative Solution:</u></p> <p>For the gravitational force due to the mass inside:</p> $m \ddot{r}_p = -\frac{G M m}{r_p^2} = -\frac{4\pi}{3} G m \rho r_p, \text{ (2 points)}$ <p>where m is mass of shell.</p>	<p>5</p>

$$r_p = a(t)r, \text{ (1 point)}$$

[Remarks: The point is given because the student understand that the shell is not pulled gravitationally from the outside, because the force due to the mass outside cancels.]

$$\text{and } \rho = \rho(t_0)a^3(t_0)/a^3(t).$$

Thus

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G\rho(t_0)a^3(t_0)a^{-2}. \text{ (1 point)}$$

Integrate the above equation. One gets

$$c = \frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho(t_0)a^{-1} = \frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2, \text{ (1 point)}$$

where c is an integration constant.

G

(b) decelerating. This is because gravity is attractive for the matter that we are considering here. As a result, $da(t)/dt$ is a decreasing function of t .

1

Appendix: Notes about the physics behind this set of problems:

N/A

To reduce students' reading load, we have not mentioned in the problems, that those problems set up the framework of researches in modern cosmology:

A theory of gravity (especially Einstein's general relativity) contains two aspects: Gravity tells matter how to move (kinematics of matter motion in a gravitational field); and matter determines the gravitational field (dynamics of the gravitational field). Parts (A)-(E) are about kinematics and part (F) is about dynamics in this sense. The two key equations in cosmology are derived in part (D) (this is known as the continuity equation, containing parts (A) and (B) as special cases) and (F), upon which the whole theory of modern cosmology is built.

The equation derived in part (F) is known as the Friedmann equation, which is conventionally written as $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho$. This equation governs the dynamics of cosmic expansion and actually not only applies for non-relativistic matter but also for general matter components (which needs general relativity to derive). The constant k is related to the curvature of 3-dimensional space, which is observed to be vanishingly small.

Part (C) indicates that the universe was hotter at earlier ages. The hot universe in local thermal equilibrium determines the whole thermal history of our universe, which answers questions such as where the light elements come from, and when the universe becomes transparent for light. Part (E) defines the luminosity distance, which relates the telescope observations to the cosmic reality.

Part	Model Answer (Full mark = 20)	Marks
A1	<p>The angular momentum should be</p> $\vec{L} = r\vec{e}_r \times \vec{p} = r\vec{e}_r \times \vec{e}_\phi \int_0^{2\pi} \frac{mv}{2\pi r} r d\phi \quad (1 \text{ point for the definition of angular momentum})$ <p>Here \vec{e}_r is the unit vector pointing from the center of the ring to the mass point on the ring and \vec{e}_ϕ is the unit vector parallel to the direction of the linear velocity at the mass point.</p> <p>We know that $v = \omega r$, so finally we can get</p> $\vec{L} = m\omega r^2 \vec{e}_z, \text{ with } \vec{e}_z = \vec{e}_r \times \vec{e}_\phi. \quad (1 \text{ point for the correct answer: } 0.5 \text{ points for the magnitude and } 0.5 \text{ points for the direction})$	2
A2	<p>For a current loop, the magnetic moment is defined as</p> $\vec{M} = I\vec{A}$ <p>The current can be expressed as</p> $I = -ef = -e \frac{\omega}{2\rho} \quad (1 \text{ point for the current expression})$ <p>Finally</p> $\begin{aligned} \vec{M} &= -e \frac{\omega}{2\pi} \pi r^2 \vec{e}_z \\ &= -\frac{e\vec{L}}{2m} \end{aligned} \quad (1 \text{ point for the answer})$	2
A3	<p>For a current loop, under a uniform magnetic field the total torque should be</p> $\vec{\tau} = \vec{M} \times \vec{B} \quad (0.5 \text{ point for the torque definition})$ <p>The work done by the magnetic field on the torque should be</p> $\begin{aligned} W &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta}' \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \vec{\tau} d\theta' \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \vec{M} \vec{B} \sin \theta' d\theta' \\ &= \vec{M} \cdot \vec{B} \end{aligned} \quad (1.5 \text{ points for the work on the torque})$	2

	$U = -W$ $= -\vec{M} \cdot \vec{B} \quad (0.5 \text{ point for the answer})$ $= \frac{1}{2} e\omega r^2 B_z \cos\theta$	
A4	<p>We assume that the magnetic field is along z direction such that $\vec{B} = B\vec{e}_z$, then in general</p> $U = -\vec{M} \cdot \vec{B} = -M_z B$ <p>The magnetic torque of an electron should be</p> $M_z = \frac{-e}{2m_e} S_z \quad (0.5 \text{ points for the electron torque})$ <p>Thus</p> $U = -\vec{M} \cdot \vec{B}$ $= -\frac{-e}{2m_e} S_z B$ $= \frac{\mu_B}{\hbar} S_z B \quad (0.5 \text{ points for the answer})$ $= \frac{1}{2} \mu_B B$ <p>Here $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ is the Bohr magneton.</p> $\mu_B = 5.788 \times 10^{-5} \text{ eV} \cdot \text{T}^{-1}$	1
A5	<p>Thus for spin parallel state $S_z = \frac{1}{2}\hbar$, we have</p> $U = 5.788 \times 10^{-5} \text{ eV} \quad (0.5 \text{ points})$ <p>For spin anti-parallel state $S_z = -\frac{1}{2}\hbar$, we have</p> $U = -5.788 \times 10^{-5} \text{ eV} \quad (0.5 \text{ points})$	1

B1	<p>In the superconductivity state, electrons forming a Cooper pair have opposite spins, thus the external magnetic field cannot have any effect on the cooper pair. Thus the energy of the Cooper pair does not change.</p> $E_S = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - 2D \quad (1 \text{ point for the answer})$	1
B2	<p>In the normal state, the two electrons will align their magnetic moments parallel to the external magnetic field. Therefore we have</p> $E_N = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{2\mu_B S_{1x} B_x}{\hbar} + \frac{2\mu_B S_{2x} B_x}{\hbar}$ <p>Here the potential energy of electrons should be twice as the classical estimation according to quantum mechanics. Because $S_{1x} = S_{2x} = -\frac{1}{2}\hbar$ can make the magnetic moment aligned along x direction, eventually we have</p> $E_N = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - 2\mu_B B_x$ $= \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - \frac{e\hbar}{m_e} B_x \quad (1 \text{ point})$	1
B3	$E_N < E_S \Rightarrow 2B_x m_B > 2D \Rightarrow B_x > \frac{D}{m_B}$ <p>Thus $B_p = \frac{\Delta}{\mu_B} = \frac{2m_e \Delta}{e\hbar} \quad (1 \text{ points})$</p> <p>Note: The above simple consideration for the upper critical field B_p over estimates its value. The strict derivation considering the Pauli magnetization and superconductivity condensation energy will give $B_p = \frac{\Delta}{\sqrt{2}\mu_B} = \sqrt{2} \frac{m_e \Delta}{e\hbar}$.</p>	1
C1	Method 1:	3

Substituting $\psi(x) = \left(\frac{2\lambda}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\lambda x^2}$ into the $F(y)$, we have

$$\begin{aligned} F(\psi) &= \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} \left[-\alpha e^{-\lambda x^2} - \frac{\hbar}{4m_e} \left(-2\lambda e^{-\lambda x^2} + 4\lambda^2 x^2 e^{-\lambda x^2} \right) + \frac{e^2 B_z^2 x^2}{m_e} e^{-\lambda x^2} \right] dx \\ &= \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(-\alpha + \frac{\hbar^2 \lambda}{2m_e} \right) e^{-2\lambda x^2} + \left(\frac{e^2 B_z^2}{m_e} - \frac{\hbar^2 \lambda^2}{m_e} \right) x^2 e^{-2\lambda x^2} \right] dx \\ &= -\alpha + \frac{\hbar^2 \lambda}{2m_e} + \left(\frac{e^2 B_z^2}{m_e} - \frac{\hbar^2 \lambda^2}{m_e} \right) \cdot \frac{1}{4\lambda} \\ &= -\alpha + \frac{\hbar^2 \lambda}{4m_e} + \frac{e^2 B_z^2}{4\lambda m_e} \end{aligned}$$

(1.5 points for the correct expression of $F(y)$ as a function of l)

We can treat $F(y)$ as a function of l . Thus we have

$$F(\psi) = -\alpha + \frac{\hbar^2 \lambda}{4m_e} + \frac{e^2 B_z^2}{4\lambda m_e}, \text{ and } \frac{dF}{d\lambda} = \frac{\hbar^2}{4m_e} - \frac{e^2 B_z^2}{4m_e \lambda^2}.$$

$F(y)$ takes the minimum value when $\frac{dF}{d\lambda} = 0$ and $\frac{d^2 F}{d\lambda^2} > 0$, thus

$$\frac{\hbar^2}{4m_e} - \frac{e^2 B_z^2}{4m_e \lambda^2} = 0 \quad (0.5 \text{ point for the way to minimize } F(y))$$

Finally, we can get

$$\lambda = \frac{eB_z}{\hbar} \quad (1 \text{ point for the correct answer})$$

We can check that $\frac{d^2 F}{d\lambda^2} > 0$ when $\lambda = \frac{eB_z}{\hbar}$, which guarantees that $F(y)$ takes the

minimum value when $\lambda = \frac{eB_z}{\hbar}$.

Method 2:

$$\begin{aligned}
 F(\psi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi \left(-\alpha\psi - \frac{\hbar^2}{4m_e} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{e^2 B_z^2 x^2}{m_e} \psi \right) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi \left(-\alpha - \frac{\hbar^2}{4m_e} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{e^2 B_z^2 x^2}{m_e} \right) \psi dx \quad (1 \text{ point}) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi \tilde{H} \psi dx
 \end{aligned}$$

In this way, for normalized wave function ψ the $F(\psi)$ is simply the energy expectation $\langle \tilde{H} \rangle$, the eigenvalue of the Hamiltonian

$$\tilde{H} = -\frac{\hbar^2}{4m_e} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{e^2 B_z^2}{m_e} x^2 - \alpha$$

The first two terms correspond to the quantum simple harmonic oscillator Hamiltonian. Thus the ground state energy should be

$$F_{\min} = \frac{1}{2} \hbar \omega - \alpha$$

Here $\omega = \frac{eB_z}{m_e}$ and ground state wave function becomes

$$\begin{aligned}
 \psi &= \left(\frac{2m_e \omega}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m_e \omega}{\hbar} x^2} \\
 &= \left(\frac{2eB_z}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{eB_z}{\hbar} x^2} \quad (1 \text{ point})
 \end{aligned}$$

Therefore, we have

$$\lambda = \frac{eB_z}{\hbar} \quad (1 \text{ point})$$

From Part (C1) we know $F_{\min}(\psi) = \frac{\hbar e B_z}{2m_e} - \alpha$. At the critical value for B_z , it makes the energy difference zero. It means that the critical value B_z satisfies

C2

$$\frac{\hbar e B_z}{2m_e} - \alpha = 0 \quad (1 \text{ point for this equation})$$

Consequently,

2

	$B_z = \frac{2m_e \alpha}{e\hbar} \cdot \text{(1 point for the correct answer)}$	
D1	$E_1 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - 2\Delta - \frac{2\mu_B S_{1z} B_z}{\hbar} + \frac{2\mu_B S_{2z} B_z}{\hbar}$ <p>Here $S_{1z} = \frac{1}{2}\hbar$, $S_{2z} = -\frac{1}{2}\hbar$</p> $E_1 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - 2\Delta - \frac{2\mu_B S_{1z} B_z}{\hbar} + \frac{2\mu_B S_{2z} B_z}{\hbar}$ $= \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - 2\Delta - \frac{2\mu_B B_z}{2} - \frac{2\mu_B B_z}{2}$ $= \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - 2\Delta - 2\mu_B B_z$ $= \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - 2\Delta - \frac{e\hbar}{m_e} B_z$ <p style="text-align: right;">(1 point)</p>	1
D2	<p>In the normal state, the electrons will align the magnetic moment parallel to the total magnetic field, thus</p> $E_{ } = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{2\mu_B \vec{S}_1 \cdot \vec{B}_1}{\hbar} + \frac{2\mu_B \vec{S}_2 \cdot \vec{B}_2}{\hbar}$ <p>For electron 1, $\vec{B}_1 = (B_x, 0, -B_z)$</p> <p>For electron 2, $\vec{B}_2 = (B_x, 0, B_z)$</p> <p>Therefore, $\vec{S}_1 = -\frac{1}{2}\hbar \left(\frac{B_x}{\sqrt{B_x^2 + B_z^2}}, 0, \frac{-B_z}{\sqrt{B_x^2 + B_z^2}} \right)$ and $\vec{S}_2 = -\frac{1}{2}\hbar \left(\frac{B_x}{\sqrt{B_x^2 + B_z^2}}, 0, \frac{B_z}{\sqrt{B_x^2 + B_z^2}} \right)$</p> <p>can make their magnetic moments parallel to the total magnetic field respectively.</p> <p>(1 point for the correct expression of spins: 0.5 points for each respectively)</p> <p>Finally</p> $E_{ } = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - 2\mu_B \sqrt{B_x^2 + B_z^2} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - \frac{e\hbar}{m_e} \sqrt{B_x^2 + B_z^2} \text{ (1 point for the answer)}$	2
D3	$E_{ } < E_{\text{sing}} \Rightarrow 2\mu_B \sqrt{B_x^2 + B_z^2} > 2\Delta + 2\mu_B B_z \Rightarrow B_x > \frac{\sqrt{\Delta^2 + 2\Delta\mu_B B_z}}{\mu_B} \text{ (1 points)}$	1

Another correct expression is: $B_I > \frac{2m_e \sqrt{\Delta^2 + \frac{e\hbar}{m_e} \Delta B_z}}{e\hbar}$.