

Задача 1. Чайная церемония и физика пузырей

Перевод на русский: Константин Ломов

Чайная церемония является традиционной для Азии. Один из важных шагов в приготовлении чая – кипячение пресной воды до появления пузырьков внутри. Пузыри знакомы нам из повседневной жизни и играют важную роль в физике, химии, медицине и технике. Тем не менее, их поведение зачастую непредсказуемо и, в силу многих причин, до сих пор слабо изучено.

При комнатной температуре чистая вода насыщена газом. Когда температура возрастает, избыточное давление растворенного газа $P_{\text{ВП}}$ также растет, растворенный воздух высвобождается и воздушные пузыри (**ВП**) появляются на дне и стенках чайника (Рис. 2). Для чистой воды смачиваемость достаточно велика, и ВП представляет из себя усеченную сферу радиуса $R_{\text{ВП}}$ с несмоченным основанием радиуса $r_{\text{ВП}} \ll R_{\text{ВП}}$. При дальнейшем нагреве ВП расширяются и при достижении определенного размера могут отделиться от дна (Рис. 3), подняться к поверхности воды и лопнуть там.

Паровые пузыри (**ПП**) появляются, когда температура воды у дна достигает критического значения $T_{\text{В}}^0 \approx T_{\text{крит}}^0 = 100^\circ\text{C}$ и давление насыщенного пара превышает внешнее давление. Выработка пара возрастает в десять раз, ПП расширяются и отделяются от дна. ПП можно считать состоящими только из пара. Если вода нагрелась достаточно сильно, поднимающийся ПП продолжает разбухать, достигает поверхности и лопається. Иначе, более высокие слои воды недостаточно прогреты и присутствует сильный вертикальный температурный градиент. Тогда, при достижении относительно холодного слоя воды, ПП коллапсирует в толще воды (Рис. 4). Это вызывает индуцированную дегазацию – возникает сильное бурление, и значительное количество растворенного воздуха высвобождается в форме микроскопических воздушных пузырей (**МВП**). Этот процесс может вызывать ультразвуковые колебания.

Основные стадии эволюции пузыря в течение кипячения:

- появление и рост ВП на дне и стенках, их превращение в ПП;
- отрыв и всплытие ПП, их исчезновение в толще воды или на поверхности;
- появление МВП в толще воды и их всплытие на поверхность.

Это теоретическое описание хорошо согласуется с современными экспериментами. В частности, был проведен интересный эксперимент по анализу шума (Noise Analysis Experiment, Уральский Федеральный Университет, г. Екатеринбург). Высокочувствительные микрофоны, соединенные с широкополосными усилителями и подведенные к электрическому чайнику, обнаружили три основных источника шумов:

1. Отделение ВП от дна до начала кипения (порождает колебания на частоте $\nu_1 \approx 100$ Гц);
2. ПП коллапсируют в толще воды (порождает колебания на частоте $\nu_2 \approx 1$ кГц);
3. МВП появляются под водой (порождает колебания на частоте $\nu_3 \approx 35 - 60$ кГц)

Подсказки:

1) Хорошо известно, что маленький пузырь поднимается по прямолинейной траектории, и в этом случае наблюдается ламинарное течение – вода перемещается слоями без перемешивания (см. Рис. 1). Формула Стокса описывает диссипативную силу (силу сопротивления), которая действует на частицу, движущуюся с небольшой скоростью $v_{\text{лам}}$:

$$F_C = 6\pi\eta_v R_{\text{п}} v_{\text{лам}}$$

Когда же к поверхности поднимаются относительно большие пузыри, их движение возмущает воду вокруг, снизу появляются кавитационные впадины и наблюдается турбулентное течение (см. Рис. 1). В этом случае часть кинетической энергии поднимающегося пузыря преобразуется в работу диссипативных сил.

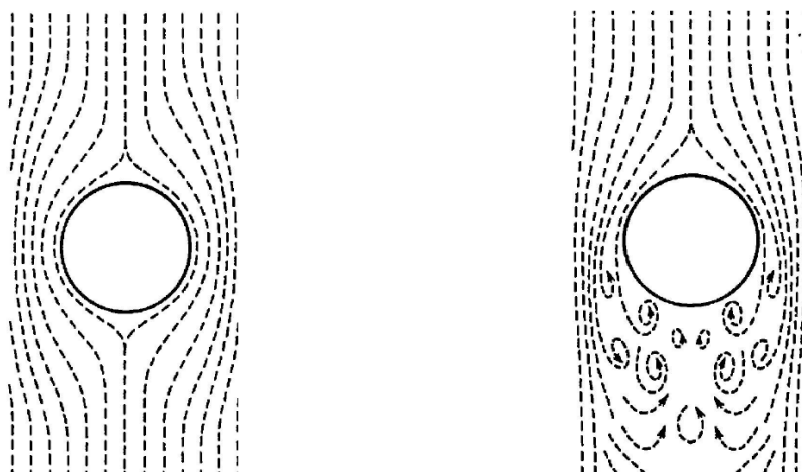


Рис. 1 Ламинарный и турбулентный типы течения для поднимающихся в воде воздушных пузырей

2) Когда поверхность жидкости имеет выпуклую (вогнутую) форму, появляется сила поверхностного натяжения из-за молекулярных взаимодействий вблизи поверхности. Давление этой силы может быть выражено формулой

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{R},$$

Где σ – коэффициент поверхностного натяжения (размерность $[\text{Н/М}]$), численно равный силе, приходящейся на единицу длины, R – радиус кривизны поверхности.

3) В процессах характерной длительности t , обратное значение этого времени можно считать характерной частотой процесса $\nu = \frac{1}{t}$. Используйте это определение для расчета частот звуковых колебаний.

Полезные данные:

$P_0 = 1,016 \cdot 10^5$ Па – атмосферное давление,

$\rho_{\text{в}} = 1000$ кг/м³ – плотность воды,

$\rho_{\text{пар}}(293 \text{ К}) = 0,017$ кг/м³, $\rho_{\text{пар}}(373 \text{ К}) = 0,596$ кг/м³ – плотность водяного пара при соотв. температуре,

$P_{\text{пар}}(293 \text{ К}) = 0,023 \cdot 10^5$ Па, $P_{\text{пар}}(373 \text{ К}) = 1,016 \cdot 10^5$ Па – давление водяного пара при соотв. температуре,

$g = 9,81$ м/с² – ускорение свободного падения,

$\mu_{\text{атм}} = 0,029$ кг/моль – молярная масса воздуха,

$R = 8,31$ Дж/моль · К – универсальная газовая постоянная,

$\sigma = 0,0725$ Н/м – коэффициент поверхностного натяжения воды,

$\eta_{\text{в}} = 0,3 \cdot 10^{-3}$ Па · с – коэффициент вязкости воды,

$H = 10$ см – уровень воды в чайнике.

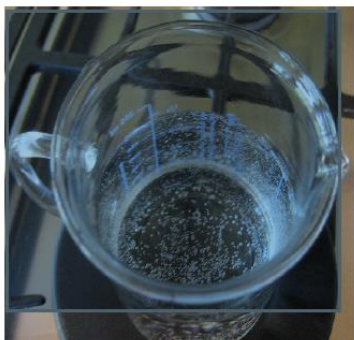


Рис. 2 Пузыри в чайнике

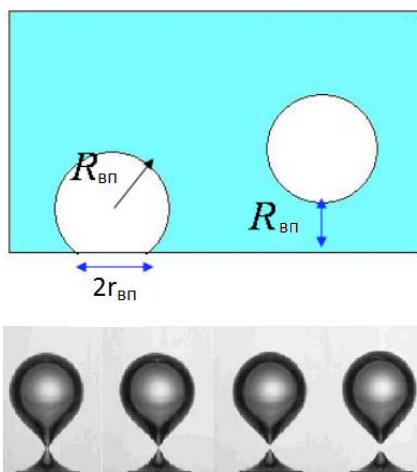


Рис. 3 Отделение воздушного пузыря от дна

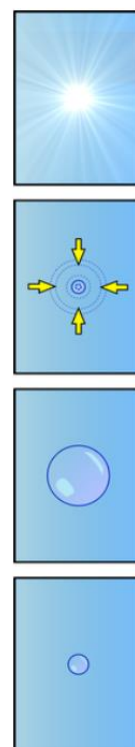


Рис. 4 Коллапс парового пузыря

Задания (макс. 10 баллов):

Рассмотрим кипение воды в плоскодонном стеклянном цилиндрическом чайнике при нормальном атмосферном давлении. Дно чайника равномерно нагревается, и присутствует вертикальный температурный градиент, пузыри появляются и всплывают (Рис. 2).

1. Выразите давление воздуха в пузыре $P_{ВП}$, необходимое для его роста на стенке чайника на высоте $h < H$ от дна, где H – уровень воды в чайнике. Примите во внимание неравенство $2\pi\sigma r_{ВП} \gg P_{внеш}\pi r_{ВП}^2$. [ответ выразите через $P_0, R_{ВП}, \rho_в, g, \sigma, h, H$] (1,0 балл)
2. Напишите условие отрыва ВП от дна чайника (Рис. 3). Примите во внимание отношение $r_{ВП} \ll R_{ВП}$. [ответ выразите через $r_{ВП}, R_{ВП}, \rho_в, \sigma$] (1,5 балла)
3. Рассмотрим ВП радиуса $R_{П}$ на дне чайника. Когда вода нагревается, пузырь насыщается паром и его радиус увеличивается. Напишите отношение $\xi \equiv \frac{m_{воздух}}{m_{пар}}$ масс воздуха и пара в пузыре при заданной температуре T . Вычислите это отношение для комнатной температуры $T = 20^\circ\text{C}$ ($R_{П} = 0,5$ мм) и для температуры кипения $T = 100^\circ\text{C}$ ($R_{П} = 1,0$ мм). [ответ выразите через $\mu_{атм}, T, P_0, P_{пар}, R_{П}, \rho_в, \rho_{пар}, \sigma, H$] (1,5 балла)
4. Используя данные NAE и законы Ньютона, оцените радиус ВП, отделившегося от дна и поднявшегося на высоту $R_{ВП}$ (Рис. 3). Считайте, что добавочная масса ВП (учитывающая слой воды, окружающий пузырь) равна половине массы аналогичного пузыря из воды. (1,0 балл)
5. Выразите радиус основания ВП непосредственно перед отрывом, когда соединительная «шейка» очень тонка (см. Рис. 3). [ответ выразите через $R_{ВП}, \rho_в, \sigma$] Вычислите этот радиус, используя радиус, найденный в пункте 4. (1,5 балла)
6. Используя данные NAE, оцените радиус коллапсирующего ПП (Рис. 4), считая, что на протяжении этого процесса давление на ПП составляет около 3 кПа. (1,2 балла)
7. Используя полученные ранее данные для ПП, рассчитайте радиус МВП, образующихся в процессе индуцированной дегазации. (0,5 балла)
8. Выведите скорость подъема ВП, используя формулу Стокса для ламинарного течения. [ответ выразите через $R_{ВП}, \rho_в, \eta_в$] Оцените время подъема для $H = 10$ см. (0,6 балла)
9. Выведите среднюю скорость подъема ПП при турбулентном типе течения [ответ выразите через $R_{ВП}, \rho_в, \eta_в$]. Оцените время подъема для $H = 10$ см. (1,2 балла)

Задача 2. Ионный кристалл, потенциал Юкавы и принцип Паули

Перевод на русский: Константин Ломов

Атомы многих химических элементов обладают очень низкой энергией ионизации и легко теряют внешние электроны. В свою очередь, атомы некоторых других элементов легко принимают электроны. Вместе, эти положительные и отрицательные ионы могут образовывать стабильные ионные структуры. Многие твердые вещества представляют собой кристаллическую структуру, атомы которой расположены в регулярной, периодической последовательности. В идеальном кристалле во всем пространстве повторяется один и тот же структурный элемент.

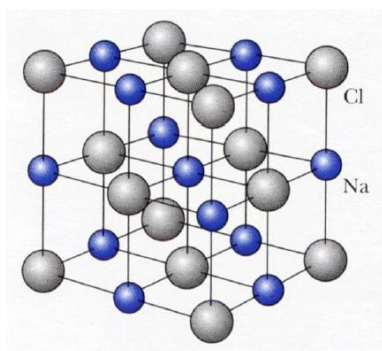


Рис. 1

Кубическая решетка хлорида натрия (NaCl).
Расстояние между центрами атомов - константа и задается параметром r_0 .

Основной вклад в энергию связи ионного кристалла вносит потенциальная энергия электростатического взаимодействия ионов.

Электрическое взаимодействие между двумя точечными зарядами q_1 и q_2 , находящимися на расстоянии r друг от друга, хорошо описывается Кулоновским потенциалом:

$$U_K(R) = k \frac{q_1 q_2}{R},$$

где U_K – энергия взаимодействия зарядов, k – Кулоновская постоянная. Отрицательное значение силы означает притяжение между зарядами. Сила направлена вдоль оси, соединяющей заряды. В случае кристалла NaCl оба иона имеют заряд $\pm e$, и нужно принимать во внимание силу взаимодействия рассматриваемого иона со многими соседними ионами. При учете всех положительных и отрицательных ионов кристалла бесконечного размера, потенциальная энергия **притяжения** равна $U_{\text{прит}}(r) = \alpha U_K(r)$, где r – расстояние между ближайшими ионами, $\alpha = 1,74756$ – постоянная Маделунга [*E. Madelung, Phys. Zs, 19 (1918) p542*], и используется для определения энергии одного иона в кристалле.

Наряду с потенциальной энергией притяжения присутствует потенциальная энергия **отталкивания**, возникающая из-за принципа запрета Паули и перекрытия электронных оболочек атомов в кристаллической решетке. В отличие от Кулоновской притягивающей составляющей, отталкивающая потенциальная энергия возникает при очень малом расстоянии между атомами.

Есть две различные модели, описывающие отталкивающий потенциал.

Модель №1 Разумное приближение для отталкивающего потенциала – экспоненциально убывающая функция

$$U_{\text{отт1}}(r) = \lambda e^{-\frac{r}{\rho}} \quad (\lambda, \rho > 0),$$

которая описывает энергию отталкивающего взаимодействия одного иона с остальной кристаллической решеткой. Здесь λ – константа взаимодействия, ρ – характерное расстояние.

Модель №2 Другое хорошее приближение отталкивающего потенциала – убывающая степенная функция

$$U_{\text{отт2}}(r) = \frac{b}{r^n} \quad (b > 0),$$

где b – константа взаимодействия, n – целое число, большее, чем 2 (показатель Борна). Эти параметры учитывают энергию отталкивающего взаимодействия иона с остальным кристаллом.

Очевидно, что физические параметры и подходящая модель определяются типом кристаллической решетки.

Экспериментальные данные для параметра решетки r_0 и энергии диссоциации $E_{\text{дис}}$ (необходимой для разрушения решетки на отдельные ионы) приведены в Таблице 1 для некоторых ионных кристаллов при нормальном давлении и нормальной температуре.

кристалл	r_0 , нм	$E_{\text{дис}}$, кДж/моль
NaCl	0,282	+764,4
LiF	0,214	+1014,0
RbBr	0,345	+638,8

Таблица 1. Свойства соляных кристаллов со структурой, аналогичной NaCl
 [С.Kittel, "Introduction to Solid State Physics", N.Y., Wiley (1976) p.92]
 (в одном моле – число Авогадро пар ионов или атомов)

Вопросы (сумма 10 баллов):

1. Выведите Кулоновский потенциал $U_{\text{К0}}(r)$ для иона, расположенного в центре кубической решетки, изображенной на Рис. 1. Считайте, что он взаимодействует только с ближайшими соседями (на дистанции не более $r = \sqrt{3}r_0$) в кристаллической решетке. Найдите постоянную Маделунга α_0 , соответствующую такому приближению. (1,5 балла)
2. Используя Модель №1, выведите формулу для общей потенциальной энергии $U_1(r)$, приходящейся на один ион. Напишите уравнение его равновесия для $r = r_0$ и найдите $U_1(r_0)$ [выразите через α , r_0 , ρ]. Используйте точную постоянную Маделунга α . (1,5 балла)
3. Используя экспериментальные данные, оцените характерное расстояние ρ . Используйте число Авогадро $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹. (2,0 балла)
4. Используя Модель №2, выведите формулу для общей потенциальной энергии $U_2(r)$, приходящейся на один ион. Напишите уравнение его равновесия для $r = r_0$ и найдите $U_2(r_0)$. Используйте точную постоянную Маделунга α . [ответ выразите через α , r , r_0 , n] (2,0 балла)
5. Используя экспериментальные данные (из Таблицы 1), оцените показатель Бора n для NaCl. Оцените пропорции Кулоновского притяжения и исключения Паули (отталкивающая часть) в общей энергии взаимодействия в состоянии равновесия. (1,5 балла)
6. Энергия ионизации (необходимая для удаления электрона из атома) атома Na составляет +5,14 эВ, сродство к электрону (энергия, необходимая для добавления электрона в атом) атома Cl равно -3,61 эВ. Оцените полную энергию связи (удерживающую атом в решетке), приходящуюся на один атом в кристалле NaCl. Экспериментальное значение составляет $E_{\text{эксп}} \approx -3,28$ эВ. [выразите в эВ]. Используйте преобразование $1 \text{ эВ} = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Дж. (1,5 балла)

Задача 3. Как выглядит сверхсветовой объект?

Перевод на русский: Константин Ломов

Может ли тело двигаться быстрее скорости света? Ответ: «Нет» - если объект движется в вакууме. Но ответ может быть положительным, если речь идет о фазовой скорости света в оптически плотной среде с показателем преломления n ($n = \frac{c}{u}$, где u – скорость света в среде, c – скорость света в вакууме).

Тело называется сверхсветовым, если $u < v < c$, где v – скорость тела. Один из хорошо изученных примеров сверхсветового тела – заряженная частица, генерирующая излучение Черенкова.

В нашей задаче мы будем иметь дело со сверхсветовым телом, движущимся в среде с постоянной скоростью v без рассеяния. u – скорость света в этой среде.

Для простоты мы введем обозначение $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ и угол θ , определяемый соотношениями

$$\cos \theta = \frac{u}{v} \text{ и } \operatorname{tg} \theta = \sqrt{\frac{v^2}{u^2} - 1}.$$

1. Излучающая сверхсветовая частица

Пусть излучающая частица движется вдоль оси x с постоянной скоростью v ($v > u$), как показано на Рис. 1.

Наблюдатель M находится на расстоянии d от оси x .

Возьмем ближайшую к наблюдателю точку на оси x за начало координат O . Пусть частица проходит через O в момент времени $t = 0$.

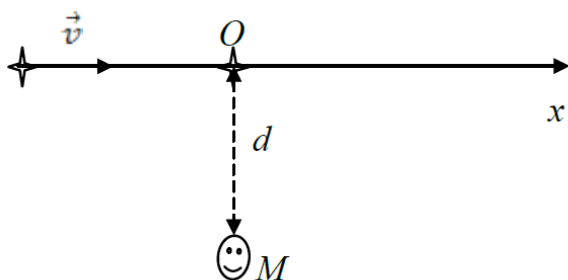


Рисунок 1

1. Пусть свет, излученный частицей за время t' , наблюдается в момент времени t . Выразите t через d , t' , u и v . (1,0 балл)
2. В момент времени $t = t_0$ наблюдатель видит, что частица находится в координате x'_0 . Найдите наблюдаемую позицию частицы x'_0 и момент ее наблюдения t_0 , когда она

- впервые появилась в поле зрения наблюдателя. Ответ выразите через d , v и θ . (2,0 балла)
- Найдите наблюдаемую позицию (наблюдаемые позиции) частицы x' в любой момент времени t . Ответ выразите через v , θ , t и t_0 . (2,0 балла)
 - Найдите наблюдаемую скорость (наблюдаемые скорости) частицы $v'(t)$ в любой момент времени t . Выразите ответ через v , θ , t и t_0 . (1,0 балл)
 - Найдите наблюдаемую скорость (наблюдаемые скорости) частицы v' в момент первого появления частицы в поле зрения наблюдателя. (0,2 балла)
 - Найдите наблюдаемую скорость (наблюдаемые скорости) частицы, находящейся на бесконечном расстоянии от начала координат, O . Выразите ответ через v и u . (0,2 балла)
 - Нарисуйте эскиз графика зависимости наблюдаемой скорости v' от времени t , четко обозначив асимптотические значения скорости. (1,0 балл)
 - Может ли наблюдаемая скорость превышать скорость света в вакууме, то есть $v' > c$? (0,2 балла)

2. Излучающий линейный объект

Рассмотрим линейный объект, излучающий свет и движущийся вдоль оси x . Длина объекта равна L в системе отсчета объекта.

А. Параллельное движение

В этой части мы предполагаем, что излучающий линейный объект параллелен направлению его движения, как показано на Рис. 2.

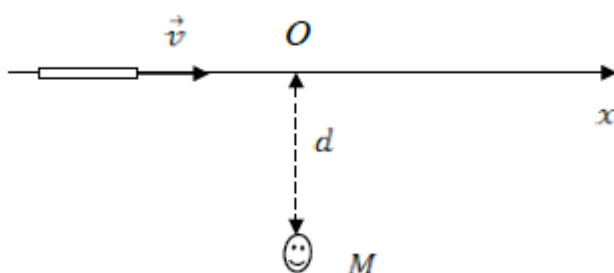


Рисунок 2

- Определите время, за которое линейный объект появляется в поле зрения целиком. Выразите ответ через L , γ и v . (0,3 балла)
- Определите наблюдаемую длину (наблюдаемые длины) объекта в момент его полного появления. Выразите ответ через d , L , θ и γ . (0,4 балла)

В. Перпендикулярное движение

В этой части мы предполагаем, что излучающий линейный объект перпендикулярен направлению его движения, как показано на Рис. 3. Пусть наблюдатель располагается в начале координат ($d = 0$). Объект симметричен относительно оси Ox .

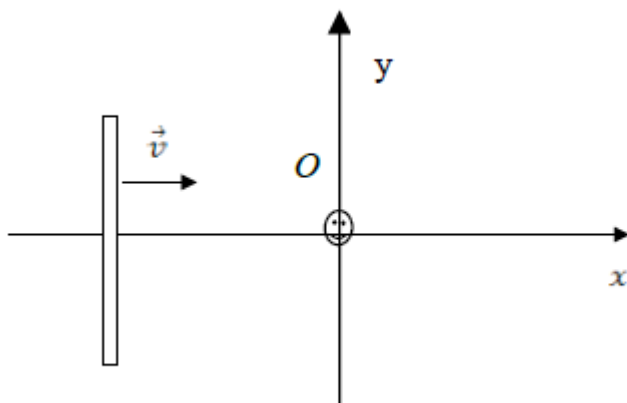


Рисунок 3

11. Покажите, что в момент времени t видимая форма объекта является эллипсом или частью (частями) эллипса. (0,7 балла)

Найдите соответствующие уравнения и выразите их через v , θ и t .

12. Найдите координату x_c центра симметрии эллипса в момент времени t и выразите ее через v , θ и t . (0,5 балла)

13. Определите длины большой и малой полуосей эллипса в момент времени t и выразите их через v , θ и t . (0,5 балла)