Теоретическая задача 1

Качания сферы, наполненной жидкостью (10 баллов).

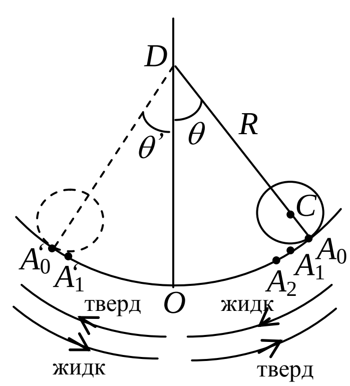
Рассмотрим сферу, заполненную жидкостью, которая катается вперед-назад в сферическом сосуде, то есть сфера периодически меняет направление своего поступательного и вращательного движения. Из-за вязкости жидкости изучение движения сферы было бы очень сложным. Однако, ниже представленная упрощенная модель способствует решению этой задачи.

Предположим, что твердая тонкая сферическая оболочка радиуса r и массы m полностью заполнена некоторой жидкостью массы M, обозначаемой **W**. Жидкость **W** имеет то уникальное свойство, что ведет себя обычно как идеальная жидкость (без вязкости), и в то же время в ответ на некоторое внешнее воздействие (например, электрическое поле) она переходит в твердое состояние с тем же объемом; и тогда когда внешнее воздействие устраняется, жидкое состояние немедленно востанавливается. Кроме того, это воздействие не приводит к какой-либо силе и моменту сил, воздействующих на сферу. Эта сферическая оболочка с жидкостью (для удобства ниже мы будем называть ее просто «сфера») катается вперед-назад на дне сферического сосуда радиуса R (R>r) без проскальзывания, как показано на Рисунке. Предпологая, что сфера двигается только в вертикальной плоскости (а именно, в плоскости Рисунка), изучите движение сферы для следующих трех случаев:

1. **W** ведет себя как твердое тело, причем **W** контактирует с внутренней стенкой сферической оболочки так близко, что они могут рассматриваться в целом как твердая сфера радиуса r с резким скачком плотности при переходе от внутренней стенки оболочки к **W.**

   (1) Определите момент инерции I сферы относительно оси, проходящей через центр C. **(1.0 балл)**

   (2) Определите период T_1 сферы, качающейся вперед-назад с малой амплитудой без проскальзывания на дне сферического сосуда. **(2.5 балла)**



2. **W** ведет себя как идеальная жидкость без трения между **W** и сферической оболочкой. Определите период T_2 сферы, качающейся вперед-назад с малой амплитудой без проскальзывания на дне сферического сосуда **(2.5 балла)**

3. **W** переходит между состояниями идеального твердого тела и идеальной жидкости. Предположите, что в момент времени $t = 0$ сфера находится в состоянии покоя, линия CD составляет угол θ_0 ($\theta_0 << 1$ радиан) с линией OD, где D это центр сферического сосуда. Сфера касается внутренней стенки сосуда в точке A_0 как показано на Рисунке. Отпустите сферу, и она начнет катиться в левую сторону. Во время движения сферы из точки A_0 в точку равновесия O, жидкость **W** ведет себя как идеальная жидкость. В момент когда сфера проходит через точку O, жидкость **W** мгновенно переходит в состояние твердого тела и прочно приклеивается к внутренней стенке сферы до тех пор пока не достигнет левой высшей точки A_0'. В момент, когда сфера достигнет A_0', жидкость **W** мгновенно переходит обратно в жидкое состояние. Затем сфера катится направо, и **W** снова мгновенно переходит в твердое состояние, приклеиваясь прочно к стенке сферы в момент, когда она переходит точку равновесия O. В момент, когда сфера достигает правой высшей точки A_1, жидкость **W** снова меняет свое состояние. И затем этот полный цикл повторяется снова и снова. Сфера качается налево и направо периодически, но угловая амплитуда качения уменьшается с течением времени. Направления движения сферы показаны на Рисунке стрелками, а состояния жидкости обозначены словами «жидкое» и «твердое», показывая соответствующие состояния жидкости **W.** Предполагается, что в течение этого процесса качения не происходит проскальзывания между сферой и стенкой сосуда (то есть дно сосуда всегда обеспечивает необходимое трение). Определите период T_3 качения сферы и угловую амплитуду θ_n центра сферы, а именно, угол между линией CD и вертикальной прямой OD, когда сфера достигает высшей точки A_n для n –того момента времени (на Рисунке показан только A_2). **(4.0 балла)**

Теоретическая задача 2.

Оптическая свойства необычного материала (7.0 баллов).

Оптические свойства среды определяются ее относительными диэлектрическими проницаемостью ε_r и магнитной проницаемостью μ_r . Для обычных оптически прозрачных материалов, таких как вода и стекло, ε_r и μ_r положительны, и имеет место явление преломления, удовлетворяющее закону Снеллиуса. В 1964 году российский ученый В.Веселаго строго доказал, что материал у которого одновременно и ε_r и μ_r отрицательны, проявлял бы удивительные и даже невероятные оптические свойства. В начале XXI века такие необычные оптические материалы были получены некоторыми лабораториями. Сейчас их изучение представляет передовой край научных исследований. Решая предложенные ниже задачи, вы узнаете фундаментальные оптические свойства таких необычных материалов. **Необходимо отметить, что материалы с отрицательными ε_r и μ_r имеют следующие важные свойства. Когда световая волна распространяется в такой среде на расстояние Δ, фаза световой волны уменьшается, а не увеличивается на величину $\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}k\Delta$, как это имеет место в обычной среде. В этом выражении корень всегда берется из положительной величины, а k это волновой вектор.** В задачах, представленных ниже, мы предполагаем, что относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости воздуха равны единице.

1. (1) Согласно вышеуказанным свойствам, и предполагая, что луч падает из воздуха (air) на поверхность этого необычного материала (medium) с $\varepsilon_r < 0$ и $\mu_r < 0$, докажите, что направление преломленного луча имеет вид как на Рис.2.1 **(1.2 балла)**

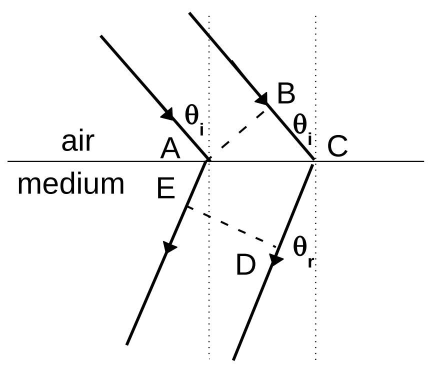


Рис.2.1

(2) Для Рис.2.1 покажите связь между углом преломления θ_r (угол между преломленным лучом и перпендикуляром к границе двух сред) и углом падения θ_i **(0.8 балла)**

(3) Предполагая, что луч падает из необычного материала (medium) в воздух (air), докажите, что направление преломленного луча имеет вид как на Рис.2.2 **(1.2 балла)**

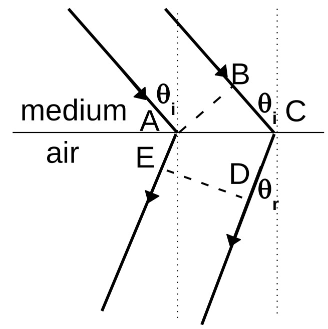


Рис.2.2

(4) Для Рис.2.2 покажите связь между углом преломления θ_r (угол между преломленным лучем и перпендикуляром границы двух сред) и углом падения θ_i **(0.8 балла)**

2. Как показано на Рис.2.3 в воздухе размещена пластина с толщиной d, сделанная из необычного материала с $\varepsilon_r = \mu_r = -1$, с точечным источником света, расположенным перед пластинкой на растоянии 3d/4. Детально нарисуйте ход трех лучей из этого источника. (<u>Подсказка</u>: При данных условиях задачи нет отражения от границы между воздухом и необычным материалом). **(1.0 балл)**

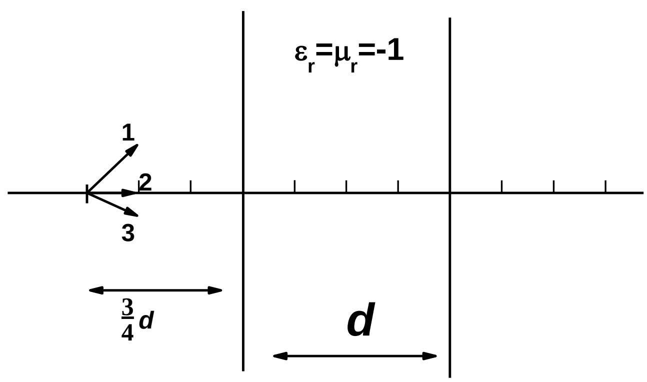


Рис.2.3

3. Как показано на Рис.2.4 резонансная область образована двумя плоскопараллельными пластинками на расстоянии d друг от друга. Оптически одна из пластинок, обозначенная на Рис.2.4 как Пластинка 1 (Plate 1), является идеально отражающей (коэффициент отражения равен 100%), а другая, обозначенная как Пластинка 2 (Plate 2), частично отражающей (с высоким коэффициентом отражения). Предположим, что плоские световые волны

излучаются источником у Пластинки 1, тогда эти световые волны будут многократно отражаться внутри этой резонансной области. Так как Пластинка 2 неидеально отражающая, то часть световых волн будет проходит сквозь нее в моменты, когда луч будет достигать ее (лучи 1, 2, 3 показанные на Рис.2.4), а некоторая часть волн будет отражаться от нее. Если эти световые волны имеют одинаковые фазы, то они будут интерферировать, усиливая друг друга и ведя к резонансу. Мы предполагаем, что световая волна приобретает фазу π в момент отражения от пластинок. Теперь мы вставляем пластинку толщиной $0{,}4d$ (показана в виде заштрихованной области на Рис.2.4), сделанной из необычного оптического материала с $\varepsilon_r = \mu_r = -0{,}5$, в резонансную область параллельно между двумя пластинками. Оставшееся пространство в этой области заполнено воздухом. Рассматривая только ситуацию, когда световая волна распространяется в направлении перпендикулярно к пластинкам (ход лучей на Рис.2.4 дается только в качестве схематической иллюстрации), определите все длины волн, которые удовлетворяют условию резонанса в этой области. (**<u>Подсказка</u>**: При данных условиях задачи нет отражения от границы между воздухом и необычным материалом). **(1.0 балл)**

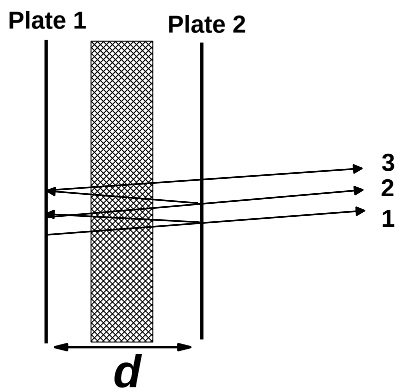


Рис.2.4

4. Бесконечно длинный цилиндр радиуса R, сделанный из необычного оптического материала с $\varepsilon_r = \mu_r = -1$, находится в воздухе и его сечение в плоскости XOY показано на Рис.2.5 с центром, расположенным на оси Y. Лазерный источник, расположенный на оси X и имеющий координату x, излучает узкий луч вдоль оси Y. Определите область изменения координаты x, для которой луч света, испущенный из этого источника не сможет достичь принимающей плоскости (receiving plane) на другой стороне цилиндра. **(1.0 балл)**

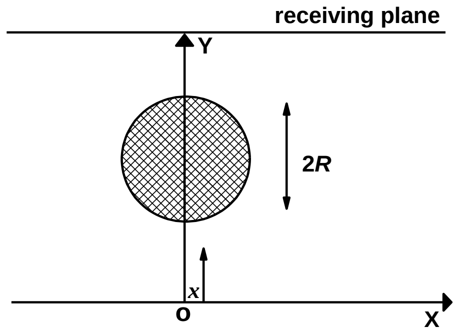


Рис.2.5

2B. Диэлектрические сферы во внешнем электрическом поле (3 балла)

Погружая большое число маленьких диэлектрических частиц в жидкость с малой вязкостью, вы можете получить систему в виде суспензии. Когда внешнее электрическое поле приложено к системе, диэлектрические частицы поляризуется за счет индуцированных дипольных моментов. В течение очень короткого времени эти поляризованные частицы собираются вместе из-за дипольного взаимодействие так, что эффективная вязкость системы значительно возрастает (система может быть рассмотрена как твердое тело). Этот вид фазового перехода называется «электрореологический» эффект, а такая система называется «электрореологическаяжидкость». Но в практике этот эффект может быть применен для устроиств торможения, так как время такого фазового перехода меньше чем у обычных механизмов на несколько порядков. Решая представленные ниже задачи, вы получите упрощенную картину для понимания внутренного механизма электрореологического перехода.

1. Когда много диэлектрических сфер погружено в жидкость, можно предположить, что дипольный момент каждой сферы $\vec{p}$ индуцируется исключительно внешним полем $\vec{E}_0$ независимо от других сфер (Примечание: $\vec{p} \parallel \vec{E}_0$)

   (1) Две одинаковые маленькие диэлектрические сферы в жидкости контактируют друг с другом и линия, соединяющая их центры, составляет угол θ с направлением внешнего поля (см. Рис. 2.6). Запишите выражение для энергии диполь-дипольного взаимодействия между этими сферами. **(0.5 балла)**

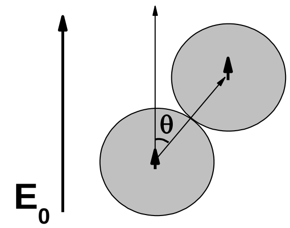


Рис.2.6

(2) Определите энергии диполь-дипольного взаимодействия для трех конфигураций, показанных на Рис.2.7. **(0.75 балла)**

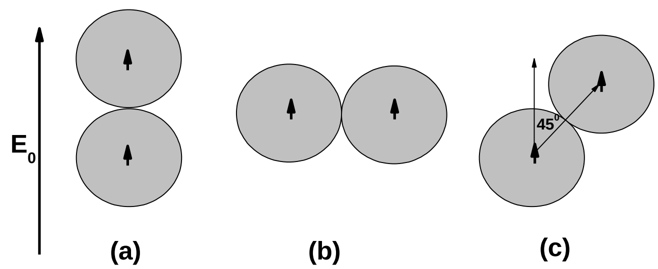


Рис.2.7

(3) Найдите какая конфигурация из них наиболее стабильная. **(0.25 балла)**

(**<u>Примечание</u>**: При вычислениях каждая поляризованная диэлектрическая сфера может рассматриваться как диполь, расположенный в центре сферы, и энергия диполь-дипольного взаимодействия может быть выражена через дипольный момент p каждой сферы).

2. Для случая трех одинаковых маленьких диэлектрических сфер в жидкости, и при тех же условиях, что и в пункте 1:

(1) Определите энергии диполь-дипольного взаимодействия для трех конфигураций, показанных на Рис.2.8. **(0.9 балла)**

(2) Найдите какая конфигурация из них наиболее стабильная. **(0.3 балла)**

(3) Найдите какая конфигурация из них наиболее нестабильная. **(0.3 балла)**

(**<u>Примечание</u>**: При вычислениях каждая поляризованная диэлектрическая сфера может рассматриваться как диполь, расположенный в центре сферы, и энергия диполь-дипольного взаимодействия может быть выражена через дипольный момент p каждой сферы).

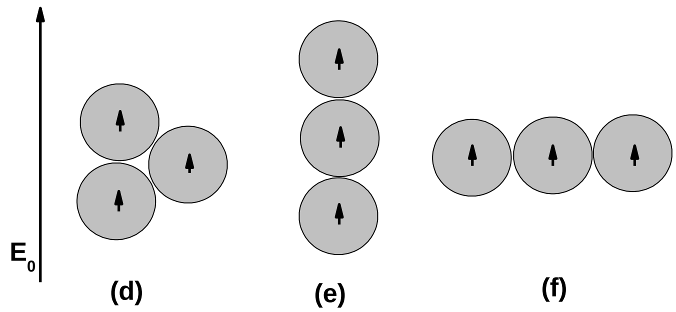


Рис.2.8

Теоретическая задача 3

Средний вклад каждого электрона в удельную теплоемкость электронного газа при постоянном объеме (5.0 баллов)

1. Согласно классической физике электроны проводимости в металлах образует газ свободных электронов, который можно считать идеальным. В состоянии температурного равновесия их средняя энергия зависит от температуры и следовательно они дают вклад в удельную теплоемкость. Средний вклад одного электрона в удельную теплоемкость электронного газа при постоянном объеме определяется как

$$c_V = \frac{d\overline{E}}{dT} \qquad (1)$$

где $\overline{E}$ - средняя энергия одного электрона. Однако, удельная теплоемкость при постоянном объеме является постоянной величиной не зависящей от температуры. Определите средний вклад каждого свободного электрона в энергию $\overline{E}$ и удельную теплоемкость при постоянном объеме c_V. **(1.0 балл)**

2. Экспериментально было показано, что удельная теплоемкость газа электронов проводимости зависит от температуры и ее экспериментальное значение при комнатной температуре почти на два порядка меньше, чем по расчетам по классической теории. Причина этого в том, что электроны подчинаются квантовой статистике, а не классической статистике. Согласно квантовой теории для металов плотность состоянии электронов проводимости (число электронных состоянии на единице объема и на единицу энергии) пропорционально квадратному корню энергии электронов E. Тогда число состоянии в диапозоне энергии dE для металла с объемом V можно записать в виде

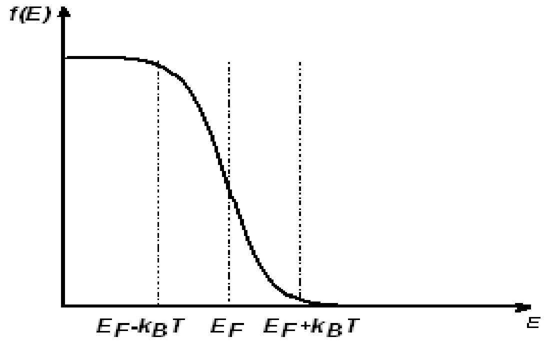
$$\mathrm{d}S = CVE^{1/2}\mathrm{d}E \qquad (2)$$

где C нормировочная константа, определяемая полным числом электронов в системе.

Вероятность того что состояние с энергией E занято электроном равняется

$$f(E) = \frac{1}{1+\exp(\frac{E-E_F}{k_B T})} \qquad (3)$$

где $k_B = 1{,}381\cdot 10^{-23}\,Дж\cdot K^{-1}$ - постоянная Больцмана, T абсолютная температура, а E_F называется уровнем Ферми. Обычно при комнатной температуре для металлов E_F составляет несколько эВ (1 эВ = 1,602x10^{-19} Дж). $f(E)$ называется функцией распределения Ферми и схематически показано на рисунке ниже.



(1) Определите c_V при комнатной температуре, исходя из $f(E)$. **(3.5 балла)**.

(2) Дайте обяснение отклонение классического результата от результата квантовой теории **(0.5 балла)**

Примечание: В ваших вычислениях изменением уровня Ферми E_F с температурой можно пренебречь, то есть $E_F = E_F^0$, где E_F^0 - уровень Ферми при температуре 0 К. Функция распределения Ферми может быть упрощена в виде линейно уменьшающейся функции (linearly descending function) в области значении $2k_Б T$ около E_F, а в других областях равна 0 или 1, то есть

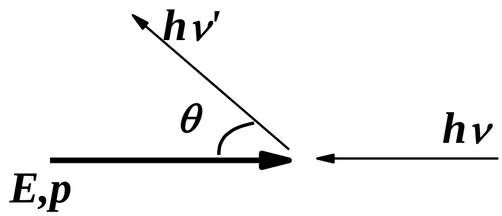
$$f(E) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & E < E_F - k_B T \\ \text{linearly descending function} & E_F - k_B T < E < E_F + k_B T \\ 0 & E > E_F + k_B T \end{array} \right\}$$

При комнатной температуре $k_Б T << E_F$, следовательно можно упростить вычисление. Полное число электронов можно рассчитат при 0 К.

3B. Обратное рассеяние Комптона (5.0 баллов).

При столкновении фотона сэлектроном высокой энергии фотон получает от него энергию, то есть энергия или частота фотона возрастает в результате столкновения. Это и есть так называемое обратное рассеяние Комптона. Такого рода явления очень важны в астрофизике, например обеспечивают важный механизм для производства рентгеновского излучения и γ-лучей в космосе.

1. Высокоэнергетический электрон с полной энергией E (его кинетическая энергия выше, чем его энергия покоя) и низкоэнергетический фотон (его энергия выше, чем энергия покоя электрона) с частотой ν движутся в противоположных направлениях и сталкиваются друг с другом. В результате столкновения фотон рассеивается так, что он движется в направлении, составляющим угол θ с его первоначальным направлением до столкновения. Определите энергию рассеянного фотона, выразив ее в виде зависимости от E, ν, θ и энергии покоя E_0 электрона. Определите значения угла θ, при котором фотон получает максимальную энергию, а также значение этой максимальной энергии. **(2.4 балла)**



2. Предположив, что энергия E налетающего электрона гораздо больше, чем его энергия покоя E_0, что может быть выражено как $E=\gamma E_0$, $\gamma >> 1$, и что энергия падающего фотона гораздо меньше, чем E_0/γ, выведите приближенное выражение для максимальной энергии рассеянного фотона. Положив $\gamma = 200$ и длину волны фотона $\lambda = 500$ нм, рассчитайте приближенно максимальную энергию и соответствующую длину волны рассеянного фотона.

Параметры: Энергия покоя электрона $E_0 = 0{,}511$ МэВ, Постоянная Планка $h = 6{,}63\cdot 10^{-34}$ $Дж\cdot c$, $hc = 1{,}24\cdot 10^3$ $эВ\cdot нм$. **(1.2 балл)**

3. (1) Релятивистический высокоэнергетический электрон с полной энергией E и фотон сталкиваются дрг с жругом, двигаясь в противоположных направлениях. Рассчитайте энергию падающего фотона, такую, что фотон может получить максимум энергии от падающего электрона. Рассчитайте энергию рассеянного фотона для этого случая. **(0.7 балла)**

(2) Релятивистский высокоэнергетический электрон с полной энергией E и фотон, двигаясь в перпендикулярных направлениях, сталкиваются друг с другом. Рассчитайте энергию падающего фотона, такую, что фотон может получить максимум энергии от падающего электрона. Рассчитайте энергию рассеянного фотона для этого случая. **(0.7 балла)**