

ЗАДАЧА 1

1А. ЦИЛИНДР С МАССИВНЫМ ПОРШНЕМ НА ПРУЖИНЕ (5 баллов)

В вертикальном цилиндрическом сосуде под поршнем находится $n = 2$ моля гелия (рис. 1.1), который можно считать идеальным газом. Масса поршня $m = 10$ кг, площадь сечения поршня $A = 500$ см², $g = 9,8$ м/с². Поршень горизонтален и способен двигаться без трения в вертикальном направлении. Газ над поршнем отсутствует. Вертикальная невесомая пружина прикреплена концами к поршню и верхней стенке сосуда. Теплоёмкостями сосуда, поршня и пружины, а также какими-либо утечками газа из-под поршня можно пренебречь. В начальный момент пружина нерастянута и система находится в равновесии. Температура газа при этом равна $T_0 = 300$ К. Давление и объём в этом состоянии обозначим P_0 и V_0 соответственно.

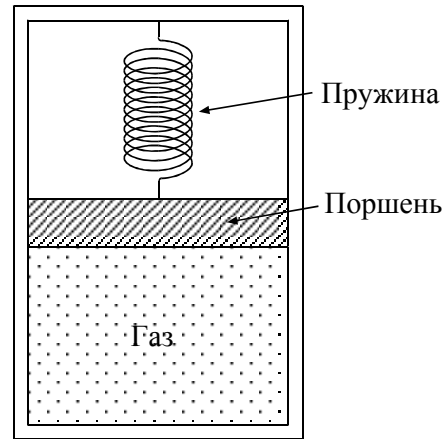


Рис 1.1

- a. Найдите частоту f малых колебаний поршня, возникающих при небольшом смещении поршня из положения равновесия. **(2 балла)**

Затем поршень опускают вниз, уменьшая объём газа вдвое, и в этом положении отпускают без начальной скорости.

- b. Найдите величину (величины) объёма газа в момент, когда скорость поршня по модулю равна $\sqrt{\frac{4gV_0}{5A}}$. **(3 балла)**

Считайте жёсткость пружины равной $k = MgA/V_0$. Все процессы в газе считайте адиабатическими. Универсальная газовая постоянная равна $R = 8,314$ Дж/моль·К. Для одноатомного газа (гелий) показатель адиабаты равен $\gamma = 5/3$.

1В. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ РАСКАЧКА КАЧЕЛЕЙ (5 баллов)

Ребёнок раскачивается на качелях, приседая и вставая. Траектория центра масс ребёнка показана на рисунке 1.2. Пусть r_u — расстояние от оси вращения качелей до центра масс ребёнка, когда он стоит, и r_d — расстояние от оси вращения качелей до центра масс ребёнка, когда он присел. Пусть отношение r_d к r_u равно $2^{1/10} = 1,072$, то есть ребёнок смещает свой центр масс примерно на 7% от среднего расстояния между центром масс и осью вращения.

Для упрощения анализа считайте, что пружина не имеет массы, амплитуда колебаний качелей достаточно мала и вся масса ребёнка сосредоточена в его центре масс. Считайте также, что вставание (переходы А-В и Е-Ф) происходит достаточно быстро по сравнению с периодом колебаний и может считаться мгновенным. Считайте также, что приседания (переходы С-Д и G-H) тоже происходят мгновенно.

Сколько циклов вставаний-приседаний потребуется ребёнку, чтобы амплитуда колебаний качелей (максимальная угловая скорость) увеличилась вдвое?

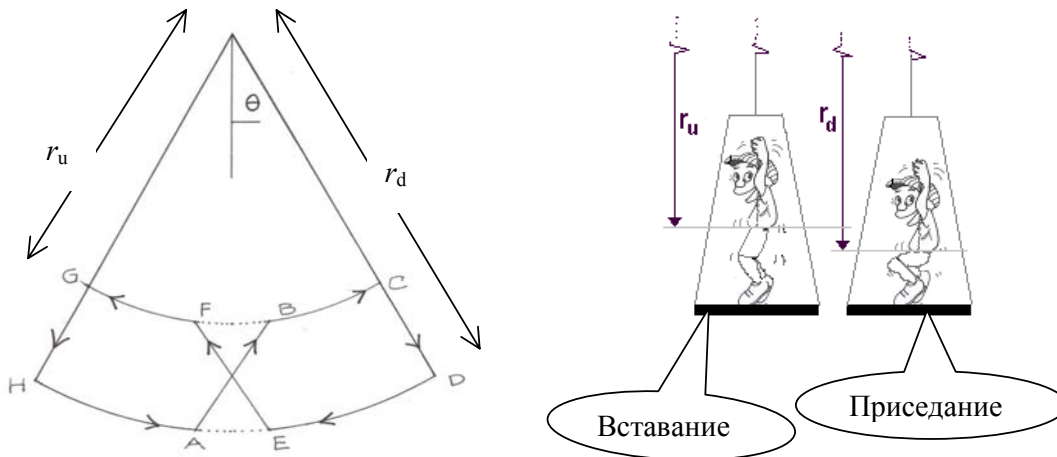


рис. 1.2

ЗАДАЧА 2. МАГНИТНАЯ ФОКУСИРОВКА

Существует большое количество устройств, в которых используются тонкие пучки заряженных частиц: электронно-лучевая трубка, применяемая в осциллографах или телевизионных приемниках, электронный микроскоп. Во всех этих устройствах пучок частиц фокусируется и отклоняется аналогично тому, как фокусируется и отклоняется световой луч в оптических инструментах.

Пучок заряженных частиц может быть сфокусирован электрическим или магнитным полями. В задачах 2А и 2В мы рассмотрим метод фокусировки пучка магнитным полем.

2А. МАГНИТНАЯ ФОКУСИРОВКА В СОЛЕНОИДЕ (4 балла)

На рис. 2.1 показана электронная пушка, расположенная на оси длинного соленоида (недалеко от его середины). Электроны, выходящие через отверстие в аноде, имеют **небольшую** поперечную компоненту скорости. В дальнейшем электрон движется по спиралевидной траектории. После одного полного оборота спирали электрон попадает в точку, расположенную на оси соленоида. Подобрать соответствующим образом индукцию магнитного поля B , можно добиться того, чтобы все вылетающие электроны попадали в одну и ту же точку F после одного полного оборота. Используйте следующие данные:

- Разность потенциалов между катодом и анодом, ускоряющая электроны, равна $V = 10$ кВт.
- Расстояние между анодом и точкой фокусировки F равно $L = 0,5$ м.
- Масса электрона равна $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг.
- Заряд электрона равен $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.
- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.
- Релятивистские эффекты не учитывать.

- Вычислите величину поля B , при котором электрон попадает в точку F , совершив ровно один виток спирали. **(3 балла)**
- Найдите ток, протекающий через соленоид, если его обмотка имеет 500 витков на метр. **(1 балл)**

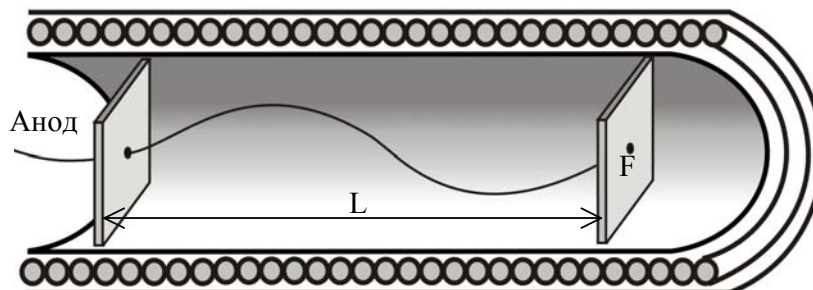


Рис 2.1

2В. МАГНИТНАЯ ФОКУСИРОВКА КРАЕВЫМ ЭФФЕКТОМ (6 баллов)

Два полюса постоянного магнита разведены на некоторое расстояние так, что индукция магнитного поля между ними направлена вертикально и равна B (рис. 2.2). Крайя полюсов имеют форму прямоугольников длиной l и шириной w . Рассмотрим поле вблизи краёв зазора между полюсами (краевой эффект). Примем, что максимальное расстояние, на которое простирается магнитное поле вне зазора, равно b (рис. 2.3). Краевое поле имеет две компоненты: B_x и B_z . Примем для простоты, что

$$|B_x| = B \frac{|z|}{b},$$

(ноль на оси z выбран в точке, равноудалённой от полюсов магнита). Более подробно:

$B_x = +B \frac{z}{b}$ когда частицы влетают в краевое поле слева (рис. 2.2)

$B_x = -B \frac{z}{b}$ когда частицы, пролетевшие магнит, влетают в краевое поле справа.

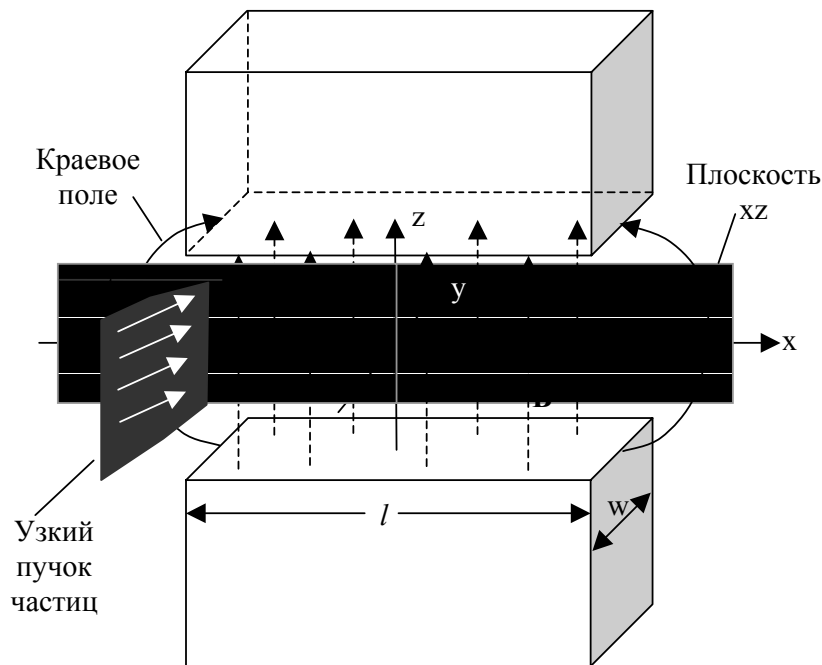


Рис.2.2. Общий вид (угол θ очень мал).

Узкий параллельный пучок частиц массой m и зарядом q каждая входит в зазор вблизи его центра с большой скоростью v , параллельной горизонтальной плоскости. Вертикальный размер пучка сравним с расстоянием между полюсами магнита. Пучок входит в магнит под углом θ к центральной линии

магнита и выходит из магнита под углом $-\theta$ (см. рис. 2.4. Предполагается, что угол θ очень мал). Считайте, что угол θ , под которым частица влетает в краевое поле, равен углу θ , под которым она влетает в однородное поле внутри зазора.

Пучок будет фокусироваться благодаря краевому полю. Вычислите приближенно фокусное расстояние. Фокусное расстояние определяется, как показано на рис. 2.5 (считать, что $b \ll l$ и отклонение вдоль оси z в магнитном поле B очень мало).

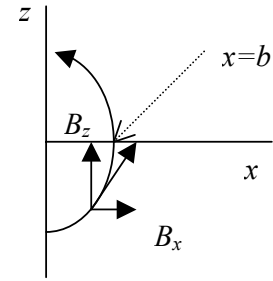


Рис 2.3. Краевое поле

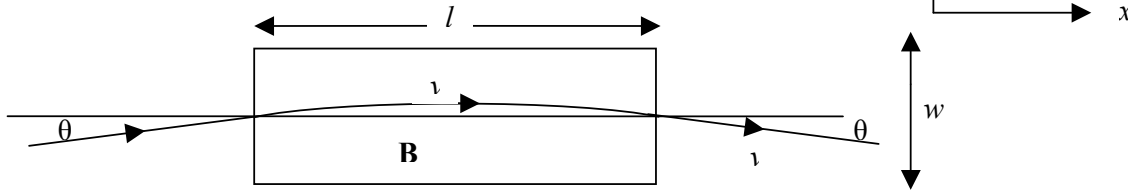


Рис. 2.4. Вид сверху

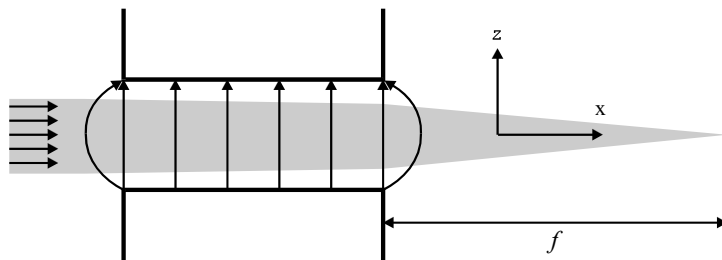


Рис. 2.5. Вид сбоку

ЗАДАЧА 3. ОТРАЖЕНИЕ СВЕТА ОТ ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗЕРКАЛА

Отражение света от зеркала, движущегося с релятивистской скоростью, представляет собой давно известную теоретическую задачу. Эйнштейн предложил решение, использующее преобразования Лоренца для зеркала, движущегося со скоростью v . Однако та же формула может быть получена более простым способом. Рассмотрим в лабораторной системе отсчета процесс отражения света (см. рис. 3.1) от плоского зеркала M , движущегося со скоростью $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ (где \mathbf{e}_x — единичный вектор в направлении оси x). Скорость составляет угол φ с плоскостью зеркала ($\varphi \leq 90^\circ$, рис. 3.1). Луч света падает на зеркало под углом α и отражается под углом β , углы падения и отражения отсчитываются от вектора нормали к плоскости зеркала \mathbf{n} до падающего луча l и отражённого луча l' соответственно.

Можно показать, что справедливо соотношение

$$\sin \alpha - \sin \beta = \frac{v}{c} \sin \varphi \sin(\alpha + \beta) \quad (1)$$

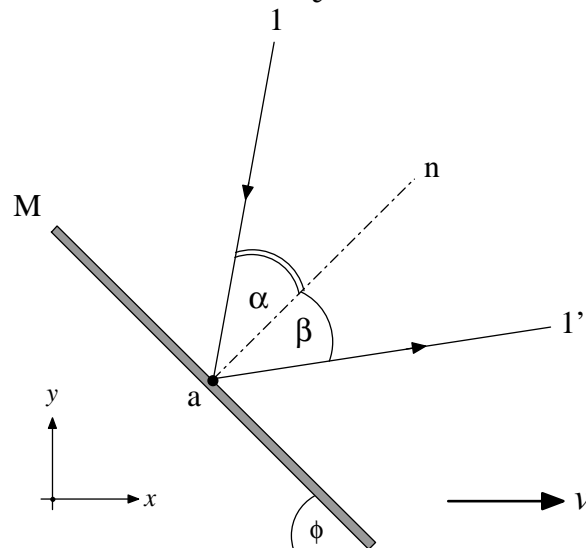


Рис. 3.1 Отражение света движущимся зеркалом

ЗА. ЗЕРКАЛО ЭЙНШТЕЙНА (2,5 балла)

Около века назад Эйнштейн вывел закон отражения электромагнитной волны от зеркала, движущегося с постоянной скоростью $\mathbf{v} = -v\mathbf{e}_x$ (рис. 3.2). Применив преобразования Лоренца к результату, полученному в системе отсчёта, связанной с зеркалом, Эйнштейн нашёл, что

$$\cos \beta = \frac{\left(1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \cos \alpha - 2 \frac{v}{c}}{1 - 2 \frac{v}{c} \cos \alpha + \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad (2)$$

Выведите эту формулу, используя уравнение (1) и не используя преобразования Лоренца.

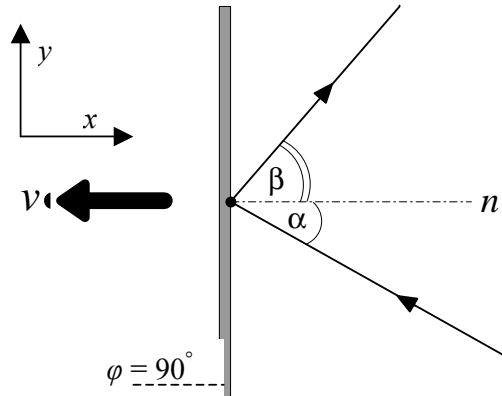


Рис. 3.2. Зеркало Эйнштейна, движущееся влево со скоростью v

3В. СДВИГ ЧАСТОТЫ (2 балла)

Пусть в ситуации, описанной в задаче 3А, на зеркало M падает монохроматический свет частоты f . Найдите частоту отражённого света f' . Найдите Δf в процентах от f в случае $\alpha = 30^\circ$ и $v = 0,6c$ (рис. 3.2).

3С. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗЕРКАЛА (5,5 балла)

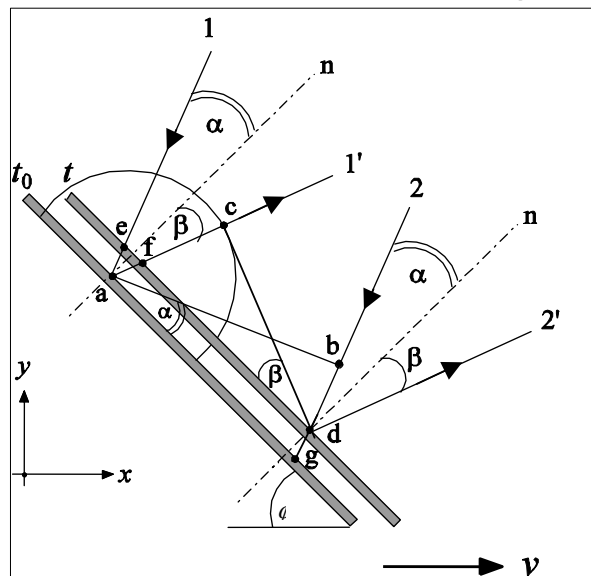


Рис. 3.3.

На рис. 3.3 показаны положения зеркала в моменты времени t_0 и t . Так как наблюдатель движется влево, то зеркало относительно него движется вправо. Луч света 1 падает в точку a в момент времени t_0 и отражается как луч $1'$. Луч 2 падает в точку d в момент времени t и отражается как луч $2'$. Таким образом ab – волновой фронт падающей волны в момент времени t_0 . Атомы зеркала в каждой точке возбуждаются падающим светом и начинают излучать световые волны. Возбуждение, вызванное участком ab волнового фронта прекращается в момент времени t , когда волновой фронт падающей волны проходит точку d .

Используя рис. 3.3 как схему распространения световой волны или любые другие методы, выведите уравнение (1).