

Теоретическая задача 1
Измерение массы в невесомости

Перевод на русский: Константин Ломов

Космический корабль на орбите Земли находится в невесомости, поэтому на нем невозможно использовать обычные весы и с их помощью узнать массу космонавта. Skylab 2 и некоторые другие космические корабли оборудованы Body Mass Measurement Device (Прибор для измерения массы тела), который состоит из кресла, закрепленного на конце пружины. Другой конец пружины закреплен в определенной точке корабля. Ось пружины проходит через центр масс корабля. Коэффициент жесткости пружины $k = 605,6 \text{ Н/м}$.

1. Когда корабль зафиксирован на стартовом столе, кресло (без человека) осциллирует с периодом $T_0 = 1,28195 \text{ с}$.

Вычислите массу m_0 кресла (2 балла)

2. Когда корабль находился на орбите Земли, космонавт закрепил ремнями себя в кресле и измерил период колебаний T' кресла вместе с ним. Он получил $T' = 2,33044 \text{ с}$ и затем приблизительно вычислил свою массу. У космонавта возникли некоторые сомнения, и он попытался найти истинное значение своей массы. Для этого он снова измерил период колебаний пустого кресла и получил $T_0' = 1,27395 \text{ с}$.

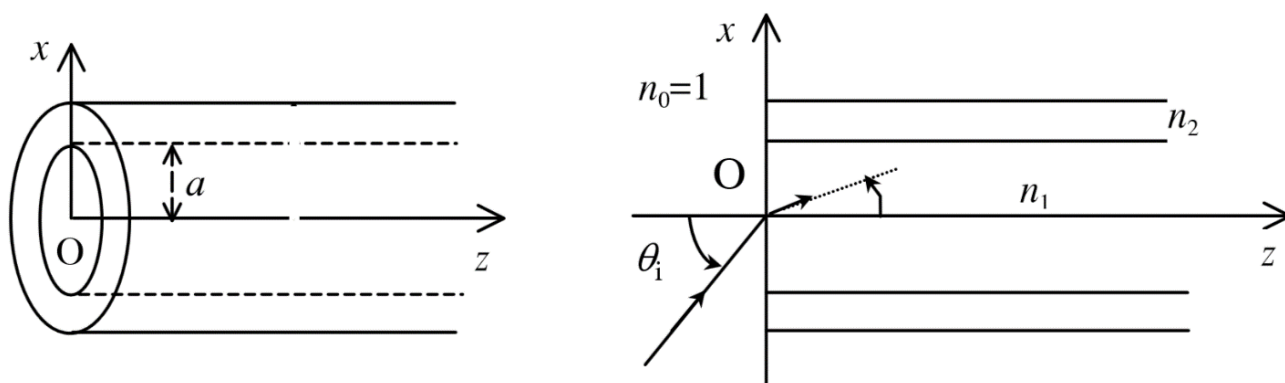
Каковы истинные значения массы космонавта и массы корабля? (4 балла)

Примечание: масса пружины пренебрежимо мала, и космонавт не касается корабля во время измерения.

Теоретическая задача 2

Оптическое волокно

Перевод на русский: Константин Ломов



Оптическое волокно состоит из цилиндрической сердцевины радиуса a , сделанной из прозрачного материала, показатель преломления которого плавно изменяется от значения $n = n_1$ на оси до $n = n_2$ (причем $1 < n_1 < n_2$) на расстоянии a от оси согласно формуле

$$n = n(x) = n_1 \sqrt{1 - \alpha^2 x^2},$$

где x – расстояние от оси сердцевины, α – константа. Сердцевина окружена оболочкой из материала с постоянным показателем преломления n_2 . Снаружи оптического волокна – воздух с показателем преломления n_0 . Пусть Oz – ось оптического волокна, O – начало оптического волокна (центр сечения).

$$n_0 = 1,000; \quad n_1 = 1,500; \quad n_2 = 1,460; \quad a = 25 \text{ мкм}$$

1. Монохромный луч света входит в волокно в точке O под углом падения θ_1 , плоскость падения xOz .
 - a. Покажите, что в любой точке хода луча в оптическом волокне показатель преломления материала n и угол θ между лучом и осью Oz удовлетворяют соотношению $n \cos \theta = C$, где C – константа. Выразите C через n_1 и θ_1 . **(1 балл)**
 - b. Используя результат из пункта 1.a и тригонометрическое тождество $\cos \theta = (1 + \tan^2 \theta)^{-\frac{1}{2}}$, где $\tan \theta = \frac{dx}{dz} = x'$ – угловой коэффициент касательной к траектории луча в точке (x, z) , выведите уравнение для x' . Найдите полное выражение для α через n_1, n_2 и a . Продифференцировав обе стороны уравнения по z , найдите уравнение для второй производной x'' . **(1 балл)**
 - c. Найдите выражение для x как функции от z ($x = f(z)$), удовлетворяющее упомянутому выше уравнению. Это будет уравнение траектории луча света в оптическом волокне. **(1 балл)**
 - d. Постройте эскиз траекторий лучей света, входящих в оптическое волокно под двумя различными углами падения θ_i (один полный период). **(1 балл)**
2. Распространение света в оптическом волокне.
 - a. Найдите максимальный угол падения θ_{iM} , при котором луч света может распространяться по сердцевине оптического волокна. **(1,5 балла)**
 - b. Определите выражение для координаты z точек пересечения луча с осью Oz при $\theta_i \neq 0$. **(1,5 балла)**

3. Свет используется для передачи сигналов в форме очень коротких световых импульсов (с незначительной шириной импульса).

а. Определите время τ , за которое свет доходит от точки O до первой точки пересечения траектории с Oz , при угле падения $\theta_i \neq 0$ и $\theta_i \leq \theta_{iM}$.

Отношение координаты z первой точки пересечения с Oz ко времени τ называется скоростью распространения светового сигнала вдоль оптоволоконна.

Предположим, что эта скорость монотонно зависит от θ_i .

Найдите эту скорость (обозначим v_M) для $\theta_i = \theta_{iM}$.

Также найдите скорость распространения (обозначим v_0) света, параллельного оси Oz .

Сравните эти две скорости. **(3,25 балла)**

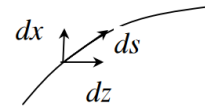
б. Световой импульс посылает сигнал как сходящийся пучок света, входящий в оптоволоконно в точке O под различными углами падения $0 \leq \theta_i \leq \theta_{iM}$. Вычислите наибольшую частоту повторения импульсов f , при которой на расстоянии $z = 1000$ м два последовательных импульса будут различимы (то есть импульсы не перекрываются). **(1,75 балла)**

Внимание

1. Волновые свойства света не рассматриваются в данной задаче.
2. Пренебрегайте любой хроматической дисперсией в волокне.
3. Скорость света в вакууме $c = 2.998 \times 10^8$ М/с
4. Вы можете использовать следующие формулы:

- Длина небольшого элемента ds в плоскости xOz

$$ds = dz \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}$$



- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = \frac{1}{b} \arcsin \frac{bx}{a}$
- $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = -\frac{x\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{2b^2} + \frac{a^2 \arcsin \frac{bx}{a}}{2b^3}$
- $\arcsin x$ – обратная синусу функция. Ее значение равно меньшему углу, синус которого равен x . Другими словами, если $y = \text{Arcsin } x$, то $\sin y = x$.

Теоретическая задача 3
Сжатие и расширение системы из двух газов

Перевод на русский: Константин Ломов

Цилиндрический сосуд разделен на два отсека подвижной перегородкой NM. Левый отсек ограничен основанием цилиндра и перегородкой NM (рисунок 1). В нем находится один моль водяного пара. Правый отсек ограничен перегородкой NM и подвижным поршнем АВ. Этот отсек содержит один моль азота (N_2).

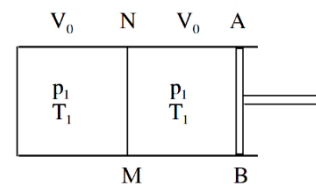


Рисунок 1

Изначально объемы и температуры в отсеках равны. Перегородка NM обладает хорошей теплопроводностью, ее теплоемкость пренебрежимо мала.

Удельный объем жидкой воды пренебрежимо мал по сравнению с удельным объемом водяного пара при той же температуре.

Удельная теплота парообразования L определяется как количество тепла, необходимое единице массы вещества для превращения из жидкого состояния в пар той же температуры. Для воды при $T_0 = 373 \text{ K}$ $L = 2250 \text{ кДж/кг}$.

1. Предположим, что поршень и стенки цилиндра проводят тепло, перегородка NM скользит без трения. Начальные параметры газов в цилиндре:

Давление $p_1 = 0,5 \text{ атм}$; общий объем $V_1 = 2V_0$; температура $T_1 = 373 \text{ K}$.

Поршень АВ медленно сжимает газы в квазистатическом (квазиравновесном) изотермическом процессе до итогового объема $V_F = V_0/4$.

- a. Нарисуйте диаграмму $P(V)$, где изображена зависимость давления p от общего объема V обоих газов в цилиндре при температуре T_1 . Вычислите координаты характерных точек этой кривой. **(1,5 балла)**

Универсальная газовая постоянная

$$R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{K}} \quad \text{или} \quad R = 0,0820 \frac{\text{литр} \cdot \text{атм}}{\text{моль} \cdot \text{K}}$$

$$1 \text{ атм} = 101,3 \text{ кПа};$$

При давлении $p_0 = 1 \text{ атм}$ вода кипит при температуре $T_0 = 373 \text{ K}$.

- b. Рассчитайте работу, совершенную поршнем в процессе сжатия газов **(1 балл)**

$$\int \frac{dV}{V} = \ln V + \text{const}$$

- c. Рассчитайте тепло, выделившееся в этом процессе. **(1,5 балла)**

2. Пусть все начальные параметры системы такие же, как в пункте 1., но теперь есть трение между перегородкой NM и стенкой цилиндра, поэтому перегородка смещается только при разности давлений слева и справа от нее $0,5 \text{ атм}$ и больше (считаем коэффициенты статического и кинетического трения равными).

- a. Нарисуйте диаграмму $P(V)$, изображающую давление p в правом отсеке цилиндра как функцию от общего объема V обоих газов в цилиндре при постоянной температуре T_1 . **(1,5 балла)**
- b. Рассчитайте работу, совершенную поршнем при таком сжатии газов. **(0,5 балла)**

с. После того как объем газов достиг значения $V_F = V_0/4$, поршень АВ медленно

сместился вправо и совершил квазистатический изотермический процесс расширения обоих веществ (вода и азот) до начального значения общего объема $2V_0$. Продолжите диаграмму из пункта 2.а кривой, изображающей этот процесс. **(2 балла)**

Подсказка к пункту 2

Сделайте таблицу, аналогичную предложенной, и используйте ее для построения кривых из пунктов 2.а и 2.с.

состояние	Левый отсек		Правый отсек		Общий объем	Давление на поршень АВ
	объем	давление	объем	Давление		
начальное	V_0	0,5 атм	V_0	0,5 атм	$2V_0$	0,5 атм
2						
3						
...						
...						
...						
...						
...						
конечное					$2V_0$	

3. Предположим, что стенки и основание цилиндра и поршень – теплоизоляторы, перегородка NM зафиксирована и проводит тепло, начальные параметры газов такие же, как в пункте 1. Поршень АВ медленно сдвигается вправо и увеличивает объем правого отсека до тех пор, пока водяной пар не сконденсируется в левом отсеке.

а. Рассчитайте конечный объем правого отсека. **(3 балла)**

б. Рассчитайте работу, совершенную газом при этом расширении. **(1 балл)**

Отношение теплоемкости изобарного процесса к теплоемкости изохорного $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$
 для азота $\gamma_1 = \frac{7}{5}$ и для водяного пара $\gamma_2 = \frac{8}{6}$.

В диапазоне температур от 353 К до 393 К можно использовать следующую приближенную формулу:

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu L}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)}$$

где T – температура кипения воды при давлении p , μ – молярная масса воды. p_0, L и T_0 были даны выше.