Теоретическая задача 1

Когда Луна станет геостационарным спутником?

Перевод на русский: Ольга Слинько

Период вращения Луны вокруг собственной оси сейчас совпадает с периодом ее обращения вокруг Земли, поэтому Луна всегда повернута к Земле одной стороной. Равенство этих двух периодов предположительно возникло из-за приливных сил на протяжения долгого существования системы Земля-Луна.

Однако, период вращения Земли вокруг собственной оси меньше чем период обращения Луны. Из-за этого приливные силы действуют на Землю так, что замедляют вращение земли и удаляют саму Луну от Земли.

В этой задаче мы заинтересованы в оценке времени, которое потребуется, чтобы период обращения Земли стал равен периоду вращения Луны. Тогда Луна станет геостационарным спутником и будет видна как неподвижный объект в небе только со стороны Земли, обращенной к Луне. Также мы хотим узнать, как долго Земля будет совершать один оборот, когда вышеописанные периоды станут равными.

Две правых прямоугольных системы координат приняты за системы отсчета. Третьи координатные оси этих систем параллельны и направлены перпендикулярно орбитальной плоскости Луны.

(I) Первая система координат CM – инерциальная система отсчета с началом координат в центре масс C системы Земля-Луна.

(II) Вторая система координат xyz имеет начало в центре Земли O. Ее ось z совпадает с осью вращения Земли, ось x лежит на прямой, соединяющей центры Земли и Луны и сонаправлена с вектором $\hat{r}$, как показано на рис.1a. В этой системе координат Луна всегда остается в отрицательной области оси x.

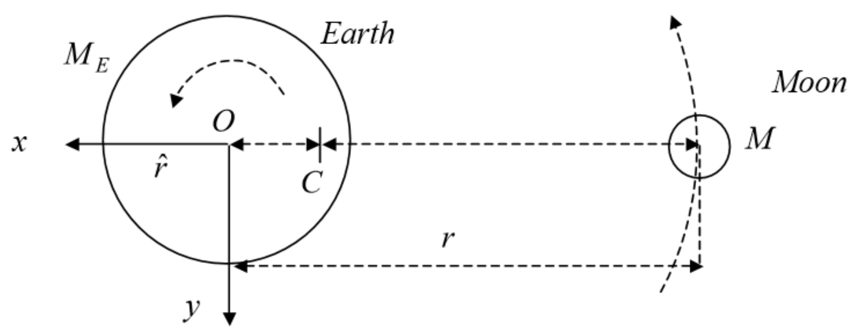

Рис.1a

Заметьте, что на рис.1а не соблюдается масштаб. Изогнутые стрелки показывают направления вращения Земли и обращения Луны вокруг Земли. Расстояние между Землей и Луной r.

Известно, что:

(а) В настоящий момент расстояние между Луной и Землей $r_0 = 3.85 \times 10^8$м и увеличивается со скоростью 0.038 м в год.

(б) Период обращения Луны в данный момент $T_M = 27.322$ дня.

(в) Масса Луны $M = 7.35 \times 10^{22}$кг.

(г) Радиус Луны $R_M = 1.74 \times 10^6$ м.

(д) Период вращения Земли в настоящий момент $T_E = 23.933$ ч.

(е) Масса Земли $M_E = 5.97 \times 10^{24}$ кг.

(ж) Радиус Земли $R_E = 6.37 \times 10^6$ м.

(з) Универсальная гравитационная постоянная $G = 6.67259 \times 10^{-11}$Н $\cdot$ м^2/кг^2.

Для решения задачи можно сделать следующие допущения:

a) Система Земля-Луна изолирована от остальной вселенной.
b) Луна движется вокруг Земли по круговой орбите.
c) Ось вращения Земли перпендикулярна орбитальной плоскости Луны.
d) В отсутствии Луны и вращения Земли масса Земли распределена сферически симметрично и Радиус Земли R_E.
e) Для Земли или Луны момент инерции относительно любой оси, проходящей через ее центр равен моменту инерции однородной сферы массы M и радиуса R, т.е. $I = \frac{2}{5}MR^2$.
f) Вода вокруг Земли неподвижна в системе координат xyz.

Ответьте на следующие вопросы:

(1) Каков суммарный угловой момент системы Земля-Луна относительно центра масс в настоящий момент?

(2) Когда период вращения Земли и периоод обращения Луны станут равными, какова будет продолжительность одного оборота Земли? Обозначьте ответ как T и выразите его через единицы сегодняшнего дня. Необходимо получить приближенное решение, поэтому можно использовать метод последовательных приближений (итерационный).

(3) Представьте Землю в качестве твердой вращающейся сферы, покрытой слоем воды и предположите, что при вращении Луны слой воды остается неподвижным в системе координат xyz. В этой модели ужно учитыватьсилы трения между вращающейся твердой сферой и слоем воды. Быстро вращающаяся твердая сфера тянет лунные приливы так, что прямая, соединяющая приливные выпуклости находится под углом δ к оси x, как показано на рис.1б. В результате этого, лунные приливные силы, действующие на Земле будут создавать крутящий момент Г относительно О, замедляющий вращение Земли.

Предполагается, что угол δ не изменяется и не зависит от расстояния r до тех пор, пока период обращения Луны не совпадет с периодом вращения Земли и силы трения не перестанут действовать. Тогда вращающий момент Г зависит от расстояния между Землей и Луной и пропорционален $\frac{1}{r^6}$.

Когда периоды вращения Земли и обращения Луны станут равными согласно этой модели? Обозначьте ответ как t_f и выразите в единицах настоящего года.

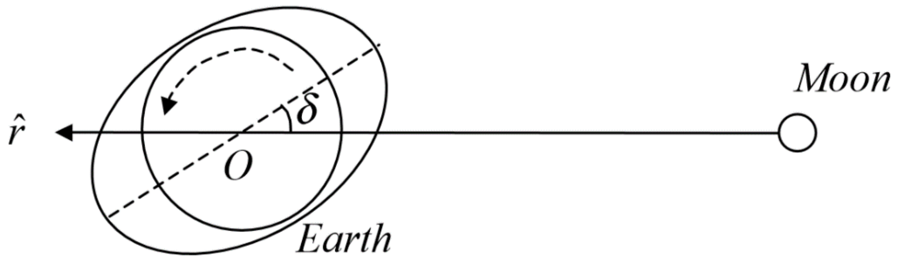

Рис.1б.

Для решения задачи вам могут понадобиться следующие математические формулы :

(M1) Для $0 \leq s < r$ и $x = s\cos\Theta$:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+s^2+2rx}} \approx \left(\frac{1}{r} - \frac{x}{r^2} + \frac{3x^2-s^2}{2r^3} + \cdots\right)$$

(M2) Если $a \neq 0$ и $\frac{d\omega}{dt} = b\omega^{1-a}$, тогда

$$\omega^a(t') - \omega^a(t) = (t'-t)ab$$

Теоретическая задача 2

Движение электрического диполя в магнитном поле

Перевод на русский: Ольга Слинько

В присутствии постоянного однородного магнитного поля $\vec{B}$, поступательное движение системы электрических зарядов сочетается с ее вращательным движением. В результате законы сохранения *полного импульса* и *проекции момента импульса* на направление $\vec{B}$ имеют модифицированный вид. Это иллюстрируется в данной задаче путем рассмотрения движения электрического диполя, сделанного из двух частиц одинаковой массы и несущих заряды q и $-q$ соответственно ($q > 0$). Эти частицы соединены между собой жестким изолирующим стержнем длины l, массой которого можно пренебречь. Пусть *радиус-вектор* $\vec{r_1}$ обозначает положение частицы с зарядом q, $\vec{r_2}$ – второй частицы, тогда $\vec{l} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$. Обозначьте $\vec{\omega}$ *угловую скорость* вращения относительно центра масс диполя. Обозначьте $\overrightarrow{r_{CM}}$ и $\overrightarrow{v_{CM}}$ положение и скорость *центра масс* соответственно. *Релятивистскими эффектами и электромагнитным излучением можно пренебречь.*

Обратите внимание, что сила, с которой магнитное поле действует на частицу с зарядом q, движущуюся со скоростью $\vec{v}$, равна $q\vec{v}\times\vec{B}$, где компоненты векторного произведения $\overrightarrow{A_1}\times\overrightarrow{A_2}$ определяются в координатах xyz как:

$$\left(\overrightarrow{A_1}\times\overrightarrow{A_2}\right)_x = \left(\overrightarrow{A_1}\right)_y\left(\overrightarrow{A_2}\right)_z - \left(\overrightarrow{A_1}\right)_z\left(\overrightarrow{A_2}\right)_y$$

$$\left(\overrightarrow{A_1}\times\overrightarrow{A_2}\right)_y = \left(\overrightarrow{A_1}\right)_z\left(\overrightarrow{A_2}\right)_x - \left(\overrightarrow{A_1}\right)_x\left(\overrightarrow{A_2}\right)_z$$

$$\left(\overrightarrow{A_1}\times\overrightarrow{A_2}\right)_z = \left(\overrightarrow{A_1}\right)_x\left(\overrightarrow{A_2}\right)_y - \left(\overrightarrow{A_1}\right)_y\left(\overrightarrow{A_2}\right)_x$$

(1) **Законы сохранения**

(a) Запишите *уравнения движения* для *центра масс* диполя и для *вращения* относительно центра масс, вычислив равнодействующую сил и суммарный момент сил относительно центра масс, действующие на диполь.

(b) Из уравнения движения центра масс получите ***модифицированный*** *вид* закона сохранения импульса. Обозначьте соответствующую новую сохраняющуюся величину $\vec{P}$. Запишите *выражение* для сохраненной *энергии* E через $\overrightarrow{v_{CM}}$ и $\vec{\omega}$.

(c) Момент импульса состоит из двух частей. Одна часть возникает из-за движения центра масс, а другая из-за вращения относительно центра масс. Из модифицированной формы закона сохранения полного импульса и уравнения, описывающего вращение относительно центра масс, докажите, что величина J, определенная как $J = \left(\overrightarrow{r_{CM}} \times \vec{P} + I\vec{\omega}\right) \cdot \hat{B}$ **сохраняется**.

Учтите, что

$$\overrightarrow{A_1} \times \overrightarrow{A_2} = -\overrightarrow{A_2} \times \overrightarrow{A_1}$$

$$\overrightarrow{A_1} \cdot \left(\overrightarrow{A_2} \times \overrightarrow{A_3}\right) = \left(\overrightarrow{A_1} \times \overrightarrow{A_2}\right) \cdot \overrightarrow{A_3}$$

$$\overrightarrow{A_1} \times \left(\overrightarrow{A_2} \times \overrightarrow{A_3}\right) = \left(\overrightarrow{A_1} \cdot \overrightarrow{A_3}\right)\overrightarrow{A_2} - \left(\overrightarrow{A_1} \cdot \overrightarrow{A_2}\right)\overrightarrow{A_3}$$

для любых трех векторов $\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}$ и $\overrightarrow{A_3}$. Повторное применение первых двух формул может пригодиться для вывода закона сохранения в задаче.

Далее, пусть $\vec{B}$ направлено вдоль оси z.

(2) **Движение в плоскости, перпендикулярной $\vec{B}$.**

Предположим, изначально центр масс диполя покоится в начале координат, $\vec{l}$ сонаправлен с осью x и *начальная угловая скорость* диполя $\omega_0\hat{z}$ ($\hat{z}$ – единичный вектор, направленный вдоль оси z).

(a) Если величина ω_0 меньше критического значения ω_c , диполь не совершит *полного оборота* относительно центра масс. Найдите ω_c.

(b) Для произвольного $\omega_0 > 0$, каково максимальное расстояние d_m, на которое может сместиться центр масс вдоль оси x?

(c) Какова сила натяжения стержня? Выразите ее как функцию угловой скорости ω .

Теоретическая задача 3

Тепловые колебания поверхностных атомов

Перевод на русский: Ольга Слинько

В задаче рассматриваются тепловые колебания поверхностных атомов в элементарном металлическом кристалле с гранецентрированной кубической (ГЦК) структурой решетки. Элементарная ячейка ГЦК структуры состоит из одного атома в каждом углу и одного атома в центре каждой грани кубической ячейки, как показано на рис.3а. Для рассматриваемого кристалла мы используем (a, 0, 0), (0, a, 0) и (0, 0, a) для определения положений трех атомов на осях x, y и z ячейки. Постоянная решетки a равна 3.92 Å (т.е. длина каждого ребра куба 3.92 Å).

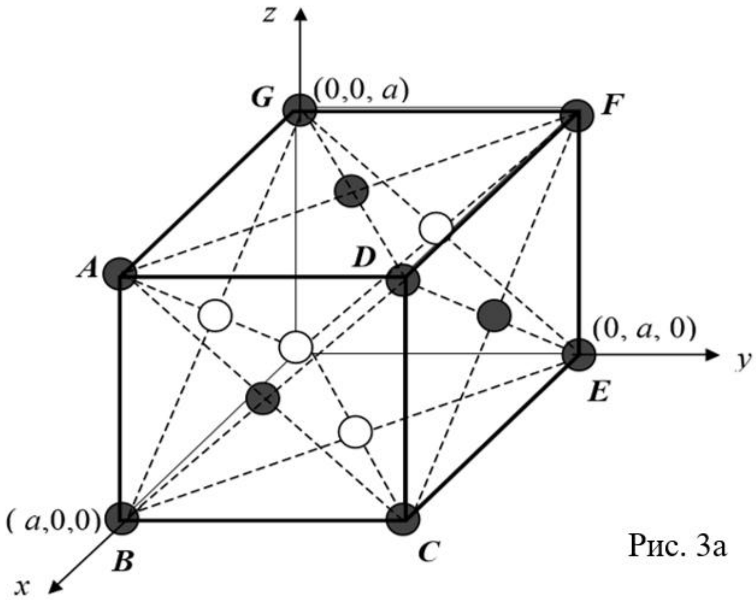

Рис. 3а

(1) Кристалл разрезают таким образом, что плоскость, в которой лежит ABCD становится граничной поверхностью, на которой проводятся эксперименты по дифракции электронов с малыми энергиями. Параллельный пучок электронов с кинетическими энергиями 64.0 эВ падает на эту поверхность под углом ϕ_0, равным 15^0. Обратите внимание, что ϕ_0 – это угол между падающим пучком и нормалью к плоскости поверхности. Плоскость падения пучка содержит $\overline{AC}$ и нормаль к поверхности. Для простоты будем считать что все падающие электроны рассеиваются обратно только поверхностными атомами верхнего слоя.

(a) Какова длина волн де Бройля падающих электронов?

(b) Если установить детектор, который будет регистрировать электроны, не вылетающие из плоскости падения после дифракции, под какими углами к нормали к поверхности будут наблюдаться эти рассеянные электроны?

(2) Примите допущение, что тепловые колебания поверхностных атомов являются простыми гармоническими. Амплитуда колебаний возрастает с ростом темпертуры. Дифракция низкоэнергентических электронов дает возможность измерить среднюю амплитуду колебаний. Интенсивность I рассеянного пучка пропорциональна количеству рассеянных электронов в секунду. Связь интенсивности I и отклонением $\vec{u}(t)$ атомов поверхности задается уравнением

$$I = I_0 \exp\left\{-\langle\left[\left(\vec{K}' - \vec{K}\right)\cdot\vec{u}\right]^2\rangle\right\} \qquad (1)$$

В уравнении (1) I и I_0 – это интенсивности при температуре T и при абсолютном нуле соответственно. $\vec{K}$ и $\vec{K'}$ - волновые вектора падающих и рассеянных электронов соответственно. Треугольные скобки $\langle\ \ \rangle$ обозначают усреднение по времени. Учтите, что волновой вектор $\vec{K}$ и импульс частицы $\vec{p}$ связаны соотношением $\vec{K} = 2\pi\vec{p}/h$, где h – постоянная Планка.

Для измерения амплитуды колебаний атомов металлического кристалла, на его поверхность направляют параллельный пучок электронов с кинетическими энергиями 64.0 эВ под углом 15^0 и устанавливают детектор для регистрации отраженных электронов. Регистрируются только упруго рассеянные электроны. Зависимость $\ln(I/I_0)$ от температуры T показана на рис. 3б.

Примите допущение, что полная энергия атома, колеблющегося в направлении нормали к поверхности $\hat{x}$ равна $k_B T$, где k_B – постоянная Больцмана.

(a) Рассчитайте частоту колебаний поверхностных атомов в направлении нормали к поверхности.

(b) Рассчитайте среднеквадратичное отклонение, т.е. значение $(\langle {u_x}^2\rangle)^{1/2}$ в направлении, перпендикулярном к поверхности при температуре поверхности 300K.

Известно, что:
Атомная масса металла $M = 195.1$
Постоянная Больцмана $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$Дж/К
Масса электрона = 9.11×10^{-31} кг
Заряд электрона = 1.60×10^{-19}Кл
Постоянная Планка $h = 6.63 \times 10^{-34}$Дж · с

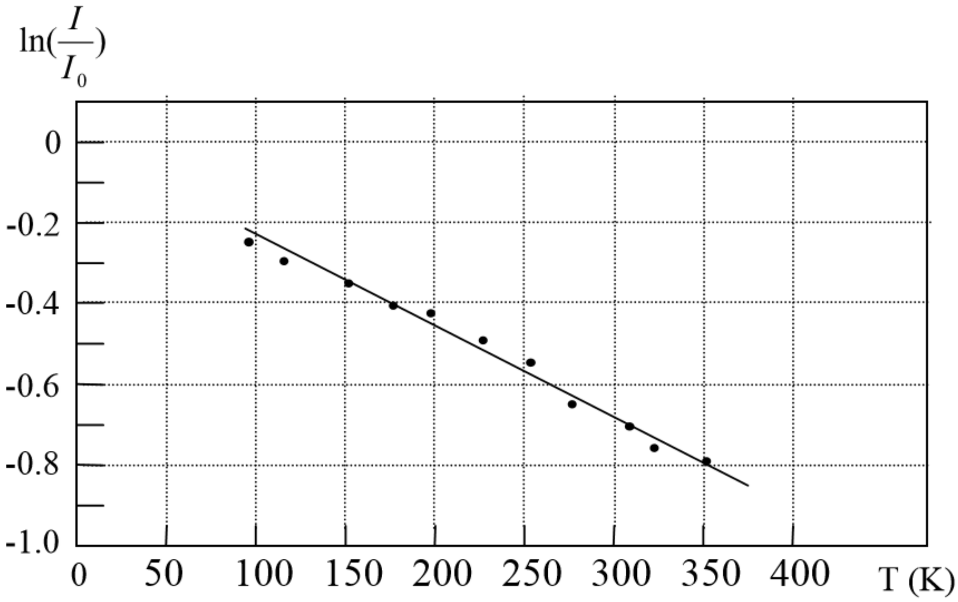

Рис. 3б